



LIBRERIA - LIBRI
VINI - LOFFLEDO
di Garzanti

BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele II

XXV

H

37





RÉFORME ABSOLUE
ET PAR CONSÉQUENT FINALE
DU
SAVOIR HUMAIN.

TOME I.

MESSIANISME

OU

RÉFORME ABSOLUE DU SAVOIR HUMAIN;

NOMMÉMENT :

RÉFORME DES MATHÉMATIQUES

COMME PROTOTYPE

DE L'ACCOMPLISSEMENT FINAL DES SCIENCES,

ET

RÉFORME DE LA PHILOSOPHIE

COMME BASE

DE L'ACCOMPLISSEMENT FINAL DE LA RELIGION.

PAR HOËNÉ WRONSKI.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,
RUE JACOB, n° 56.

AU BUREAU DU MESSIANISME,
RUE PARADIS-POISSONNIÈRE, n° 32.

15 Août. — 1847.



CETTE
RÉFORME DU SAVOIR HUMAIN

EST DEDIEE

A LA FRANCE,

COMME MARQUE DE GRATITUDE
POUR LA LONGUE HOSPITALITÉ QUE L'AUTEUR A REÇUE
DANS CE NOBLE PAYS.

A

AUX NATIONS SLAVES!

Le messianisme, cette union finale de la philosophie et de la religion, qui, comme telle, constitue, d'une part, la philosophie absolue, et de l'autre, la religion absolue, c'est-à-dire, le paracétisme, annoncé par Jésus-Christ, doit produire et accomplir les sept réalités fondamentales de l'homme, savoir :

- 1°.) Il doit fonder péremptoirement la vérité sur la terre, et réaliser ainsi la philosophie absolue.
- 2°.) Il doit, suivant l'Écriture-Sainte, accomplir la religion révélée, et réaliser ainsi la religion absolue, le paracétisme.
- 3°.) Il doit, suivant des principes à priori, réformer et établir définitivement les sciences.
- 4°.) Il doit, conformément aux lois augustes de la liberté de l'homme, expliquer l'histoire.
- 5°.) Il doit, pour faire cesser l'actuelle tourmente politique des nations, découvrir le but suprême des États.
- 6°.) Il doit, par la spontanéité propre de la raison, fixer les fins absolues de l'homme.
- 7°.) Enfin, il doit, en vue de ces fins augustes, dévoiler les destinées respectives des différentes nations.

Or, ces grands objets du messianisme furent déclarés à la tête du dernier de nos ouvrages philosophiques, nommément à la tête des *Prolegomènes du Messianisme*, lorsque, en 1843, en y résumant les résultats obtenus dans les ouvrages antérieurs, et surtout en y complétant les principes premiers et les dernières conséquences de cette doctrine absolue, nous étions fondés, non-seulement à annoncer, mais même à constater déjà les conditions infaillibles de son accomplissement final. Et c'est après la publication de ces décisifs *Prolegomènes*

A.

qu'au centre du monde civilisé, nous adressons maintenant au Ciel, et ne cessons de répéter les plaintes solennelles que voici :

« Dein Orakel zu verkünden,
 « Warum warfest du mich hin,
 « In die Stadt der ewig Blinden? »

Eu effet, dans ce centre de la civilisation, personne ne paraît s'être aperçu de ces décisives réalités de l'homme que l'on venait d'y dévoiler. — Quelle est donc la cause de cet aveuglement des nations qui se disent civilisées, et qui, sous l'enseigne de cette civilisation, prétendent posséder les lumières du monde? — Sans nous arrêter ici à chercher et à déterminer, par un procédé méthodique, cette cause mystérieuse, nous allons la signaler immédiatement. — C'est la *CERTITUDE* à laquelle, à force de civilisation, sont parvenus ces peuples qui se disent éclairés, la *CERTITUDE* nommément de ce que l'homme ne peut découvrir la vérité, ni par conséquent connaître les conditions absolues de son existence, c'est-à-dire, précisément ces sept réalités fondamentales que nous venons de dévoiler à ces peuples civilisés. Et cette certitude ou plutôt cette conviction *PROPRE* est tellement puissante chez ces nations soi-disant éclairées, que, ni l'évidence, ni aucun effort humain, ni même des efforts surnaturels, ne sauraient plus l'ébranler.

Ainsi, le grand résultat de la civilisation des peuples consiste à reconnaître, avec une certitude inébranlable, que l'homme ne peut découvrir la vérité, ni par conséquent connaître les conditions absolues de son existence. Et la conséquence immédiate de ce grand résultat est évidemment que l'homme ne peut, à moins d'un acte de folie, avoir d'autres intérêts que ceux de son animalité, propre ou sociale, et plus ou moins cultivée.

Il s'ensuit que, malgré le prestige des arts industriels, et même malgré l'illusion des sciences expérimentales, une telle civilisation n'est au fond, pour des êtres doués de la faculté infinie de la raison, rien autre qu'un véritable abrutissement intellectuel, surtout un abrutissement immuable, et par conséquent pire que celui des peuples sauvages, dont on peut sortir par l'éveil spontané de la raison et par le développement progressif du Verbe dans l'homme, de cette virtualité créatrice qui le rend semblable à Dieu. — Mais, tous ces arguments, quelque évidents qu'ils soient, sont nécessairement, par suite de la susdite conviction inébranlable des peuples civilisés, incompréhensibles pour eux.

Ce qu'ils comprendraient mieux peut-être, s'ils pouvaient un instant se détacher des intérêts dominants de leur vie terrestre, ce serait qu'un pareil progrès de la civilisation qui conduirait de l'abrutissement changeable ou incomplet des peuples sauvages à l'abrutissement immuable et par conséquent complet des peuples civilisés, serait une véritable absurdité. Néanmoins, quand même nos peuples civilisés parviendraient à comprendre cette frappante absurdité, ils préféreraient en subir toutes les conséquences plutôt que de renoncer à leur inébranlable conviction que l'homme ne peut découvrir la vérité absolue.

Or, les conséquences manifestes de cette absurdité, pour pouvoir la repousser comme incompatible avec la raison, consistent à reconnaître que nos peuples civilisés, après avoir rempli leur tâche dans le progrès du développement de l'humanité, sont parvenus au terme où tout progrès ultérieur vers nos destinées suprêmes n'est plus possible pour eux, c'est-à-dire, au terme où il leur est impossible de développer ultérieurement la raison de l'homme. Comme chez les peuples de plus en plus civilisés qui les ont précédés, la sphère d'activité de nos peuples modernes est, à son tour, accomplie dans toute son étendue. Ainsi, les peuples de l'Orient ont déduit d'abord, de leur *sentiment intime*, le problème du PRÉCEPTÉ MORAL, sans pouvoir le résoudre. Les Grecs et les Romains ont résolu ce problème, en développant la *raison pratique* de l'homme, et en créant ainsi l'idée du DEVOIR, sans pouvoir reconnaître la force nécessaire pour réaliser cette idée auguste. Les premiers peuples chrétiens ont entrevu cette force dans leur *sentiment religieux*, et ont ainsi posé le problème du VERBE, en le symbolisant dans notre divin Sauveur Jésus-Christ, sans pouvoir le résoudre dans l'homme lui-même. Et les nouveaux peuples chrétiens, en cherchant à résoudre ce grand problème par la réformation du christianisme, ont développé la *raison spéculative*, et ont ainsi donné une première solution de ce divin problème du Verbe, en concevant l'idée de la RÉALITÉ DE L'HOMME, sans pouvoir déterminer en quoi consiste cette auguste réalité humaine. Enfin, depuis la révolution française, les modernes peuples civilisés, en cherchant à reconnaître et à établir cette réalité de l'homme, dont ils sont devenus conscients, et ne pouvant encore affranchir la *raison de ses entraves physiques*, c'est-à-dire, des conditions temporelles du monde créé, sous lesquelles, dans le sentiment et dans la cognition, la raison se manifeste à l'homme, ils se sont naturellement partagés en deux grands partis antagonistes, suivant que, comme règle et comme

motif de ce partage, l'une de ces deux facultés terrestres de l'homme, le sentiment ou la cognition, prédomine sur l'autre. Ainsi, l'un de ces partis, celui où prédomine la cognition, désirant établir la réalité de l'homme par l'homme lui-même, la borne à sa vie terrestre, parce qu'il ne peut encore concevoir la raison absolue qui, dans son sentiment, se manifeste par les deux susdits grands problèmes de l'humanité, par ceux du Précepte moral et du Verbe; et l'autre de ces partis, celui où prédomine le sentiment, et qui ne peut non plus concevoir la raison absolue, quoiqu'elle se manifeste aussi dans sa cognition, borne la réalité de l'homme à ces deux problèmes eux-mêmes, en les considérant comme étant déjà des vérités parfaitement résolues. Le premier de ces deux partis politiques, le parti progressiste, celui du droit humain, repousse, dans leur détermination véritable, les deux grands problèmes de l'humanité, parce que leur solution accomplie postule la raison absolue qu'il ne peut concevoir; et il se borne ainsi à la solution temporelle elle-même de ces problèmes augustes. Et le second de ces deux partis politiques, le parti stationnaire, celui du droit divin, repousse, par le même motif, c'est-à-dire, parce qu'il ne peut non plus concevoir la raison absolue, toute solution des deux problèmes dont il s'agit, qu'il considère comme révélés à l'homme par le Créateur, et par conséquent comme étant déjà des vérités qui n'ont besoin d'aucune solution ultérieure. — Tel est donc l'état actuel de la civilisation, cet état critique de l'humanité dans lequel, étant parvenue à accomplir son développement terrestre, elle tombe ainsi, par l'absence universelle de la raison absolue, dans une fatale et périlleuse antinomie de la raison temporelle, c'est-à-dire, dans une contradiction formelle de toutes les vérités fondamentales, qui toutes, dans ce monde créé, impliquent l'idée auguste de l'INFINI. Et pour sortir de cette dominante antinomie de la raison temporelle, il n'existe aucune, absolument aucune issue salutaire, parce que cette raison temporelle est également fondée et également puissante dans les deux grands partis antagonistes qui, comme nous venons de le reconnaître, se partagent aujourd'hui le monde civilisé; dans ces deux partis antagonistes qui sont alors, tout à la fois, et INDESTRUCTIBLES et INCONCILIABLES, de sorte qu'en désavouant ainsi la raison absolue, tout progrès ultérieur devient impossible. — C'est donc ce désaveu universel de la raison absolue, ce désaveu caractéristique de l'époque actuelle de civilisation, qui paralyse les modernes peuples civilisés, et qui, comme aux époques précédentes de l'histoire, arrête

chez ces peuples tout progrès ultérieur dans le développement de l'humanité, et demande de nouveaux peuples pour continuer ce développement vers les destinées suprêmes de l'homme.

Et quels sont donc ces peuples nouveaux auxquels le destin assigne maintenant les progrès ultérieurs et peut-être définitifs de l'humanité? — Pour les reconnaître, il suffit de fixer la fonction caractéristique par laquelle ils pourront désormais, en partant du terme auquel les modernes nations civilisées ont amené le développement de l'humanité, continuer ce développement pour la conduire à son terme final, au but absolu de l'existence de l'homme sur la terre. Et d'après ce que nous venons de reconnaître concernant la limite infranchissable par les modernes nations civilisées, il est manifeste que cette fonction caractéristique des peuples nouveaux consistera dans la TRANSITION DE LA RAISON TEMPORELLE A LA RAISON ABSOLUE, c'est-à-dire, dans le développement final chez l'homme, à côté de l'impuissante RATIONALITÉ DÉTERMINATRICE de sa raison temporelle, dont le caractère inerte est le *logisme*, c'est-à-dire, la connexion des principes et des conséquences, dans le développement final, disons-nous, de la toute-puissante VERTUE CRÉATRICE de la raison absolue, dont le caractère spontané est l'*hyperlogisme*, c'est-à-dire, l'indépendance de toute condition préalable. — Or, d'après cette fonction caractéristique des nouveaux peuples que le destin appelle ainsi à la continuation ultérieure du développement de l'humanité, et par conséquent à sa direction vers son but suprême, on conçoit que ces peuples doivent avoir la double attribution, celle de connaître, en les partageant, tous les progrès actuels de la civilisation, et celle de n'avoir, jusqu'à ce jour, manifesté aucun destin spécial. Et pour peu que l'on connaisse l'ethnographie ou la statistique, physique et morale, des nations existantes, on reconnaît que ces peuples nouveaux qui doivent maintenant continuer le développement ultérieur de l'humanité, pour la conduire à ses destinées suprêmes sur la terre, ce sont les NATIONS SLAVES, ces nations vierges, puissantes et religieuses, qui forment déjà aujourd'hui, en Europe, une population de 80 millions d'âmes.

Nous pourrions alléguer des preuves innombrables de cette haute destination providentielle des nations slaves. Mais, ces preuves seront données méthodiquement dans la présente Réforme de la Philosophie. Et nous pouvons conséquemment nous dispenser de les produire ici, d'autant plus que, pour tout homme éclairé, cette destination provi-

dentielle des nations slaves n'est plus problématique aujourd'hui. — Déjà même les nations slaves la pressentent-elles suffisamment, sans pouvoir encore la déterminer d'une manière positive et didactique, comme le prouve leur récente union idéale sous le nom indéterminé de *Panslavisme*. — Les peuples étrangers aux nations slaves eroient voir, sous ce nom, une union politique; et les nations slaves n'y voient proprement qu'une tendance idéale, dont le but, jusqu'à ce jour, est demeuré un mystère pour ces nations elles-mêmes. Or, c'est ce mystère que nous dévoilons aujourd'hui; et pour que l'on ne puisse plus se tromper sur cette mission providentielle, et par conséquent sur le but de cette haute union des nations slaves, nous la nommerons *Union-Absolue*, en désignant par ce nom une troisième et dernière association morale des hommes, qui aura pour objet la DIRECTION DE L'HUMANITÉ VERS SES DESTINÉES SUPRÊMES, et qui servira ainsi à compléter les deux associations morales existantes, savoir, l'*État* et l'*Eglise*. — D'ailleurs, dans les Prolégomènes du Messianisme, qui forment l'Introduction à la présente Réforme générale du Savoir humain, et qui, par cette raison, doivent être étudiés préalablement, nous avons déjà, en y établissant les principes des destinées des différentes nations, fixé les hautes destinées des nations slaves, ces destinées inattendues que nous venons de signaler; et nous y avons de plus déterminé, avec précision, le caractère de l'Union-Absolue qu'avec abstraction de toute vue politique, ces nations vierges doivent actuellement constituer en premier lieu, en s'associant ainsi avec les hommes éclairés de toutes les nations, auxquels la même obligation morale de constituer aujourd'hui une telle Union-Absolue est également imposée comme un devoir suprême.

Mais, comment les hommes éclairés de nos modernes nations civilisées pourront-ils prendre part à cette nouvelle association morale, constituant l'Union-Absolue, puisque, par leur susdit désaveu de la raison inconditionnelle, ils ne pourront comprendre le saint but de cette union, ni par conséquent ressentir l'obligation morale d'y coopérer? — Cette question est sans doute superflue, parce que l'on conçoit qu'il peut y avoir, parmi nos nations civilisées, des hommes supérieurs, sans doute en petit nombre, qui, malgré leur actuel désaveu de la raison absolue, pourront, par de frappantes et puissantes actions sur leur intelligence, être amenés à cette décisive transition de la raison temporelle à la raison absolue, qui est la condition actuelle du

nouveau progrès dans le développement de l'humanité, et qui devient maintenant la tâche principale des nations slaves.

Aussi, en considérant l'immense contraste entre l'infini qui est dans les présentes annonces du messianisme, et les limites actuelles des connaissances humaines, devons-nous tempérer le reproche que, plus haut, nous avons fait par rapport à ces vérités infinies, en tant qu'elles n'ont pas été aperçues par les peuples civilisés parmi lesquels nous les avons produites; et nous le devons surtout en songeant à l'impossibilité où se trouvent ces peuples de concevoir la réalité de si grands résultats. D'ailleurs, indépendamment de ces limites actuelles, et malgré un vif pressentiment de la vérité, que nous leur accorderions volontiers gratuitement, les nations civilisées ne sauraient plus croire à l'existence de pareils résultats infinis, après tant et de si cruelles espérances déçues constamment. Aussi, prévoyant cette juste méfiance, avons-nous, sans chercher à la désarmer, déposé purement et simplement ces grandes vérités messianiques dans les ouvrages où nous les avons fait connaître. En effet, comme nous l'avons dit dans le dernier de ces ouvrages, dans les susdits *Prolégomènes* (page 56), nous étions convaincus que l'annonce convenable de la vérité, si elle est découverte, forme actuellement, après tant d'erreurs, d'une part, et après de si hardies impostures, de l'autre, un problème assez difficile à résoudre.

Et cependant, comme nous en reconnaissons enfin la grave nécessité, il faut bien, et il faut absolument résoudre ce difficile problème, pour arracher, sinon tous les peuples civilisés, du moins quelques-uns de leurs hommes supérieurs, à cette espèce de paralysie rationnelle, dans laquelle, en désavouant la possibilité de la découverte de la vérité, ils acceptent eux-mêmes leur abrutissement intellectuel, ce funeste abrutissement qui, sans la providentielle existence des nations slaves, aurait pu faire manquer les fins augustes de la création. — C'est donc à la solution de cet impératif problème, en faveur de ce petit nombre d'hommes supérieurs que nous devons, avant tout, avant même l'accomplissement final de la doctrine du messianisme, nous appliquer actuellement.

Par un bonheur également providentiel, cette solution, qui serait aujourd'hui, non-seulement difficile, mais même impossible, peut facilement être donnée par les voies mêmes du messianisme ou de la philosophie absolue qu'il s'agit ainsi d'annoncer. Nous disons que cette solution serait aujourd'hui impossible, c'est-à-dire, que la solution du

problème d'annoncer convenablement la découverte de la vérité, si elle était faite réellement, ne pourrait être donnée à nos modernes nations civilisées, parce que, dans le susdit état de leur paralysie rationnelle, qu'elles considèrent comme un état éminemment spirituel, personne ne saurait parvenir, par les moyens intellectuels existants, à leur faire croire que l'homme peut, sur la terre, découvrir la vérité et arriver ainsi à la connaissance positive des conditions infinies de cette vérité absolue, nommément, à la connaissance positive de Dieu et de l'immortalité de l'âme.

Sans doute, si cette vérité absolue et ces conditions éternelles de l'homme étaient des faits ou des réalités qui existent déjà, ou du moins qui se manifestent dans ce monde, il serait peut-être possible, malgré la brute indifférence intellectuelle de nos peuples civilisés pour ces questions, il serait peut-être possible, disons-nous, malgré ce funeste aveuglement, de leur faire reconnaître ces faits positifs, soit par des observations microscopiques, soit par des expériences délicates, à l'instar de celles que l'on fait pour reconnaître les propriétés de la chaleur, de la lumière, et des autres phénomènes impondérables. Malheureusement, ces faits ou réalités absolues qui sont l'objet de l'intérêt suprême de l'homme, ne se manifestent pas dans ce monde, de manière à pouvoir être saisis par l'expérience, c'est-à-dire, par les sens, ni même de manière à pouvoir être atteints par quelques inductions rationnelles, tirées des phénomènes physiques. Bien plus, ces réalités absolues n'existent même aucunement encore dans ce monde, comme existent toutes les autres réalités qui constituent l'univers, et dont l'homme peut, par des voies, plus ou moins scientifiques, acquérir la connaissance. Ces hautes et invisibles réalités dont il est question, c'est-à-dire, la vérité absolue et ses conditions infinies, Dieu et l'immortalité de l'âme, ne peuvent, avec certitude, s'établir réellement, dans la conscience de l'homme, par aucun autre moyen que par un acte spontané de création, exercé par la toute-puissante virtualité créatrice de sa raison absolue. Et c'est pourquoi ces réalités suprêmes sont ignorées et méconues par nos modernes peuples civilisés, au point qu'ils ne peuvent même, dans leur susdit désaveu de la raison absolue, en concevoir une idée exacte.

Comment pourrions-nous alors, précisément pour ces peuples civilisés, ou du moins pour un petit nombre de leurs hommes supérieurs, résoudre ici préalablement le susdit problème impératif, celui de leur

annoncer, avec succès, la découverte de la vérité et de ses hautes et infinies conditions? — Comme nous venons de le dire, la chose est très-facile par les voies mêmes du messianisme ou de la philosophie absolue qu'il s'agit ainsi de leur annoncer. — Il suffit en effet de frapper l'esprit de ce petit nombre d'hommes supérieurs, et de porter ainsi leur attention, sinon immédiatement sur ces réalités infinies dont ils ne peuvent encore concevoir une idée exacte, mais au moins sur les réalités finies qui, dans leur actuel horizon intellectuel, constituent les objets de leurs intérêts suprêmes, ces objets pour lesquels seuls ils croient devoir vivre, et pour lesquels, conséquemment, s'ils devaient en être privés, ils sont prêts à mourir.

Et pour cela, non-seulement une, mais deux voies distinctes se présentent immédiatement, l'une positive, et l'autre négative. En effet, parmi ces réalités finies qui constituent les objets des intérêts suprêmes des modernes peuples civilisés, il doit y en avoir nécessairement qui sont vraies, parce que sans cela l'actuelle société humaine ne saurait subsister, et il doit y en avoir, tout aussi nécessairement, qui sont fausses, parce que sans cela ces modernes peuples civilisés ne seraient pas arrivés à l'abrutissement intellectuel où ils sont parvenus à l'homme la faculté de découvrir la vérité. Et alors, il suffit, par le moyen même de la philosophie absolue qu'on doit leur annoncer, d'une part, d'accomplir finalement les premières de ces réalités, celles qui sont vraies, de les accomplir surtout au delà de toute attente concevable par ces peuples civilisés, et de l'autre part, de dévoiler l'absurdité des dernières de ces réalités, de celles qui sont fausses, de la dévoiler surtout de manière à y faire renoncer nécessairement.

Il ne reste donc, pour remplir cette tâche, assez facile pour le messianisme ou la philosophie absolue, qu'à distinguer, parmi les réalités qui constituent actuellement l'intérêt suprême des hommes, celles qui sont vraies, et qu'il faut ainsi accomplir dès aujourd'hui, et celles qui sont fausses et qu'il faut de même, dès aujourd'hui, anéantir pour jamais. — Et pour cela, il suffit déjà de nous servir de la susdite annonce des grands objets du messianisme que nous avons reproduite à la tête de cette adresse aux nations slaves. En effet, dans cette annonce, se trouvent énumérées les sept réalités suprêmes de l'homme; de sorte qu'il suffit de les comparer avec les réalités qui prédominent aujourd'hui chez les peuples civilisés, pour pouvoir distinguer,

parmi ces dernières, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

— Nous allons le faire.

Pour ce qui concerne, d'abord, la première de ces sept réalités suprêmes de l'homme, nommément, la fondation péremptoire de la vérité sur la terre, et, à cette fin, la réalisation de la philosophie absolue, c'est là notoirement l'erreur fondamentale des modernes peuples civilisés, de ces peuples soi-disant éclairés qui, dans le progrès historique de l'humanité, se distinguent précisément par leur caractéristique désaveu de cette haute faculté de l'homme de découvrir la vérité, par ce désaveu formel qui, dans sa réaction tout aussi formelle, place ces peuples civilisés dans l'abrutissement intellectuel où, par une conséquence nécessaire et inévitable, ils se trouvent manifestement à l'égard de tout ce qu'il y a de réalité absolue dans l'homme.

Pour ce qui concerne la deuxième de ces mêmes sept réalités suprêmes de l'homme, nommément, celle qui porte sur l'accomplissement de la religion, il est notoire que chez les hommes chez lesquels prédomine la faculté du sentiment sur la faculté de la cognition, la raison absolue se révèle dans la foi religieuse, et établit ainsi, dans la conscience de ces hommes, une base, non-seulement vraie, mais immuable, pour la réalité absolue de la religion. Ainsi, cette deuxième réalité suprême, qu'avoue formellement, avec plus ou moins d'intensité, à peu près la moitié des membres composant les modernes peuples civilisés, est nécessairement ressentie, avec une intensité infinie, au moins par un petit nombre d'hommes supérieurs parmi ces membres religieux. Mais, réduite au seul sentiment de l'homme, c'est-à-dire, à nos conditions temporelles, cette haute réalité de la religion ne peut satisfaire à toutes les demandes impératives de la raison ; et se trouvant alors forcée de se couvrir du voile du mystère, elle provoque, chez le petit nombre d'hommes supérieurs que nous venons de nommer, le besoin d'un accomplissement final, pour devenir, comme vraie, reconnue universellement, et surtout pour répondre à la tendance irrésistible de ces hommes supérieurs, à celle de connaître positivement nos grandes et finales destinées.

Pour ce qui concerne la troisième de ces mêmes sept réalités suprêmes, nommément, celle qui porte sur la réforme et sur l'établissement définitif des sciences, il est également notoire que chez les hommes chez lesquels prédomine la faculté de la cognition sur la faculté du sentiment, la raison absolue se révèle dans le savoir scientifique, et établit

ainsi, dans la conscience de ces hommes, une base, non-seulement vraie, mais également immuable, pour la réalité absolue des sciences. Ainsi, cette troisième réalité suprême, qu'avoue de nouveau formellement, avec plus ou moins d'intensité, et à son tour, l'autre moitié des membres composant les modernes peuples civilisés, est nécessairement ressentie aussi, avec une intensité infinie, au moins par un petit nombre d'hommes supérieurs parmi ces membres savants. Mais, réduite à la seule cognition de l'homme, c'est-à-dire, à nos conditions temporelles, cette haute réalité des sciences ne peut non plus satisfaire à toutes les demandes impératives de la raison; et se trouvant alors forcée de se servir des sens, de l'expérience, au lieu de l'intellect, pour découvrir la vérité, elle provoque de même, chez le petit nombre d'hommes supérieurs que nous venons de nommer en dernier lieu, le besoin d'un accomplissement final pour arriver à la solution des grands problèmes scientifiques que l'on ne peut résoudre aujourd'hui, et pour lesquels, dans l'état de l'actuel abrutissement intellectuel, où l'on cherche la vérité par les sens, on ne peut même prévoir la possibilité de leur solution future.

Pour ce qui concerne, enfin, les quatre dernières de ces sept réalités suprêmes, telles qu'elles sont énumérées plus haut, à la tête de cette adresse aux nations slaves, savoir, l'explication de l'histoire, la découverte du but suprême des états politiques, la fixation des fins absolues de l'homme, et la détermination des destinées des différentes nations, on conçoit facilement que ces quatre dernières réalités absolues de l'homme, qui dépendent manifestement de la première de ces sept réalités suprêmes, c'est-à-dire, de la fondation péremptoire de la vérité sur la terre, reçoivent nécessairement, chez les modernes nations civilisées, la même attribution logique de chimères impossibles à comprendre, et par conséquent à réaliser, que reçoit, chez ces nations, la première de ces sept réalités suprêmes. Ainsi, tout ce qui se rapporte à leur déclaration concernant ces quatre dernières réalités absolues de l'homme, est nécessairement erroné et même faux chez nos peuples civilisés, comme l'est notoirement leur déclaration concernant la première de ces sept réalités suprêmes, c'est-à-dire, leur désaveu formel de la découverte de la vérité absolue, et par conséquent, de sa fondation péremptoire parmi les hommes.

En résumant ces différentes attributions logiques de vérité ou de fausseté, attachées ainsi à toutes les hautes réalités que, plus ou moins

clairement, peuvent concevoir les modernes peuples civilisés, nous reconnaissons qu'il n'en existe que deux qui ont le caractère de vérité, savoir, 1°. la religion, du moins dans sa détermination problématique par la *foi*, c'est-à-dire, par la manifestation de la raison absolue dans notre sentiment, et 2°. les sciences, du moins aussi dans leur détermination problématique par le *savoir*, c'est-à-dire, par la manifestation de la raison absolue dans notre cognition. Et pour ce qui concerne les cinq autres réalités suprêmes de l'homme, nommément : d'abord, comme principe, 1°. la découverte et l'établissement définitif de la vérité par la philosophie; et ensuite, comme conséquences; 2°. le progrès historique de l'humanité, non-seulement dans le passé et dans le présent, mais surtout dans l'avenir; 3°. la haute direction politique des États, en vue du but suprême de cette association juridique des hommes; 4°. l'établissement et la réalisation de nos fins absolues, en considérant l'homme comme un être doué de la faculté infinie de la raison, être qui, pour accomplir sa création, doit lui-même se fixer son but absolu; enfin, 5°. la répartition des destinées humaines parmi les différentes nations, en vue de l'accomplissement solidaire et universel de toutes ces diverses fins de l'existence de l'humanité sur la terre; pour ce qui concerne, disons-nous, ces cinq autres réalités suprêmes de l'homme, nous reconnaissons, dans le présent résumé, que ces cinq réalités absolues sont, en partie, ignorées, et en partie surtout, entièrement méconues et complètement faussées par les modernes nations civilisées.

Ainsi, pour résoudre le problème que nous nous sommes proposé en premier lieu, celui d'annoncer avec succès, au moins à un petit nombre d'hommes supérieurs chez les modernes nations civilisées, la découverte et la fondation péremptoire de la vérité, et par conséquent, la réalisation de la philosophie absolue, nous devons, d'après les conditions que nous avons reconnues plus haut, d'une part, accomplir finalement les deux réalités suprêmes de l'homme, que ces nations civilisées conçoivent déjà, savoir, la religion et les sciences; et de l'autre part, dévoiler l'absurdité des opinions qu'elles se forment sur les autres cinq réalités suprêmes, sur celles-là qu'elles ne peuvent concevoir encore, savoir, sur la vérité absolue, sur le progrès historique de l'humanité, sur le but suprême des États, sur la fin absolue de l'homme, et sur la répartition des destinées entre les différentes nations. Et nous devons surtout, d'après les conditions susdites, d'abord,

accomplir les deux premières réalités suprêmes, la religion et les sciences, au delà de toute attente concevable par les nations civilisées, nommément, pour ce qui concerne la religion, en déduisant, de l'Écriture-Sainte, tous les problèmes mystérieux de l'Ancien et du Nouveau Testaments, et en donnant la solution rigoureuse de ces problèmes, pour conduire la religion révélée à la religion absolue, au paracletisme, annoncé et promis par Jésus-Christ, et pour ce qui concerne les sciences, en découvrant leurs principes métaphysiques et leurs lois fondamentales, et en donnant, avec ces lois, la solution de tous les grands problèmes scientifiques que, jusqu'à ce jour, on n'a pu résoudre, et dont on ne conçoit même pas encore la possibilité de la solution. Et nous devons ensuite, d'après les mêmes conditions susdites, dévoiler l'absurdité des opinions que les nations civilisées se forment aujourd'hui sur les cinq autres réalités suprêmes de l'homme, de manière à ce que ces opinions absurdes soient reconnues, et par conséquent repoussées à jamais, par le petit nombre d'hommes supérieurs auxquels, chez les nations civilisées, nous destinons cette annonce de la découverte de la vérité et de la réalisation de la philosophie absolue.

Or, d'après de pareilles conditions, la solution de ce grand problème d'annoncer, avec succès, la découverte de la vérité, ne saurait être donnée autrement que par le double fait de l'existence et de la publication de la doctrine elle-même qui l'aurait produite, et qui doit ainsi la fonder péremptoirement sur la terre, ou du moins par le double fait de l'existence et de la publication des principes premiers et suffisants de toutes les parties de cette grande doctrine. Et ce sont précisément ces PRINCIPES PREMIERS ET SUFFISANTS que nous avons produits dans les *Prolégomènes du Messianisme*, dans cet ouvrage que nous avons signalé plus haut comme étant une INTRODUCTION GÉNÉRALE pour toutes les parties de la doctrine du messianisme. Ce sont donc ces *Prolégomènes* qui, dans les principes absolus qu'ils présentent, et dans les résultats infinis qu'ils déduisent déjà de ces principes inconditionnels, offrent manifestement, pour tout homme qui saura les approfondir, la solution en question du problème difficile d'annoncer, à nos nations civilisées, la découverte de la vérité. — On peut alors se former une idée de l'état de la culture rationnelle de ces nations, en apprenant qu'elles ne se sont nullement aperçues de cette apparition de la vérité parmi elles. Et l'on concevra que rien autre que leur susdit désaveu de la vérité absolue, c'est-à-dire, leur indébranlable conviction que

l'homme ne peut découvrir la vérité, conviction qui caractérise notre actuelle époque historique, ne saurait expliquer un pareil aveuglement, cet aveuglement funeste et accompli qui rend impossible à ces peuples civilisés tout progrès ultérieur dans le développement de la raison de l'homme, et qui demande ainsi des peuples nouveaux pour continuer et accomplir ce développement progressif de l'humanité, afin de la conduire à ses destinées suprêmes sur la terre.

Dira-t-on que les Prolégomènes du Messianisme n'offraient pas de pareils principes absolus, ni de pareils résultats infinis, pour qu'on eût pu en conclure le fait de la découverte de la vérité? — Eh bien, la doctrine elle-même du messianisme, que nous publions actuellement, et qui n'aura pas d'autres principes, ni d'autres résultats essentiels que ceux que, par anticipation, nous avons publiés dans les Prolégomènes, suffirait-elle enfin pour faire comprendre à nos peuples civilisés, ou du moins à quelques-uns de leurs hommes supérieurs, l'existence de la vérité sur la terre, lorsqu'ils y verront la solution de tous les grands problèmes, scientifiques et philosophiques, cette solution positive et rigoureuse dont ils ont déclaré l'impossibilité? — Et comme ils ne peuvent notoirement comprendre d'autres solutions que celles des problèmes scientifiques, seront-ils convaincus lorsque, déjà dans le premier tome de cette Réforme du Savoir humain, qui paraît actuellement, ils verront la solution, positive et rigoureuse, de tous les grands problèmes des sciences, mathématiques et physiques, qu'ils n'ont pu, jusqu'à ce jour, ni résoudre, ni même comprendre, de ces problèmes précisément pour la solution desquels nous avions établi les principes dans les Prolégomènes du Messianisme?

Aussi, en nous fondant sur ces solutions décisives de tous les grands problèmes scientifiques, sur ces solutions qui sont aujourd'hui aussi réelles et irréfragables qu'elles paraissaient impossibles avant l'application de nos principes philosophiques, de ces principes précisément que nous avons signalés dans les Prolégomènes, pouvons-nous, dès aujourd'hui, lorsque paraît enfin la présente réforme accomplie des mathématiques et des hautes sciences physiques, considérer ces Prolégomènes du Messianisme, qui ont ainsi offert les principes pour cette grande et difficile réforme, comme étant, par la vérité infaillible des conséquences de ces principes, prouvés rigoureusement, et même, en quelque sorte, démontrés scientifiquement. Bien plus, nous sommes maintenant en droit de repousser, comme faux, ou du moins comme insuf-

fisants, tous les prétendus principes philosophiques qui ne pourraient également, par leur application aux sciences, conduire à la solution, pareille à celle que nous donnons actuellement, de tous les grands problèmes scientifiques; de sorte que cette puissance ou cette impuissance scientifique, dont les conditions sont d'ailleurs concevables à priori, car, comme on dit vulgairement, *qui peut faire plus, peut faire moins*, devient désormais un critérium infaillible pour juger de la vérité ou de la fausseté de toute doctrine qui se produirait encore sous le nom de PHILOSOPHIE.

Or, après avoir ainsi constaté, par notre présente Réforme des Mathématiques et par son application à la solution des grands problèmes du monde physique, la vérité des principes philosophiques que, par anticipation, nous avons produits dans les *Prolegomènes* du *Messianisme*, et par conséquent la vérité de la doctrine elle-même de ces *Prolegomènes*, nous pouvons maintenant, avec la même certitude de la vérité des résultats que nous obtiendrons, analyser cette doctrine pour y signaler les susdites conditions propres à résoudre le problème que nous nous sommes ici proposé en premier lieu, celui d'annoncer la découverte de la vérité. Et nous trouverons en même temps, dans cette analyse de la doctrine des *Prolegomènes*, un exposé succinct de la doctrine elle-même du *messianisme*, pour laquelle ces *Prolegomènes*, comme nous l'avons dit déjà, présentent une introduction générale. — Nous allons le faire rapidement.

Pour ce qui concerne d'abord l'accomplissement des deux réalités supérieures et vraies que les modernes nations civilisées conçoivent déjà, savoir, les sciences et la religion, nous avons, dans les *Prolegomènes* du *Messianisme*, sous les noms respectifs de GARANTIE SCIENTIFIQUE et de GARANTIE RELIGIEUSE de la doctrine du *messianisme*, donné ce double accomplissement, ou du moins établi les principes absolus pour ce double accomplissement. — Voici les points principaux de cette double garantie, points que nous allons rappeler séparément.

Dans la garantie scientifique, qui s'y trouve produite aux pages 238 à 442, nous avons offert, d'abord, aux pages 238 à 250, une première garantie, par la RÉFORME DES MATHÉMATIQUES, accomplie depuis 1810, par la découverte des *trois lois fondamentales* de cette grande science, de ces trois lois messianiques par lesquelles tous les problèmes mathématiques peuvent être résolus actuellement; et nous avons offert ensuite, aux pages 255 à 442, une seconde garantie, par la RÉFORME

DAS SCIENCES PHYSIQUES, accomplie dans ces *Prologomènes* par la solution rigoureuse des *trois grands problèmes* du monde physique, notamment : 1°. la solution du problème de la *construction du monde par les corps célestes*, constituant la réforme de la mécanique céleste, aux pages 255 à 305 ; 2°. la solution du problème de la *construction des corps célestes, spécialement de la terre, par la matière*, constituant la réforme de la mécanique terrestre, aux pages 306 à 378 ; et 3°. la solution du problème de la *construction de la matière par ses forces créatrices*, constituant la réforme des sciences physiques strictement dites (de la physique, de la chimie, etc.), aux pages 379 à 435. — Or, c'est précisément cette garantie scientifique de la doctrine du messianisme, garantie pour laquelle nous n'avons produit que les principes dans les *Prologomènes*, que nous accomplissons actuellement dans le premier tome de la présente Réforme du Savoir humain, portant le titre de *Réformé des Mathématiques comme prototype de la réforme générale des Sciences*. Et c'est dans ce premier tome présent que nous produisons ainsi, pour l'accomplissement de cette garantie scientifique du messianisme, la solution rigoureuse, d'abord, de tous les grands problèmes des mathématiques, et ensuite, des trois susdits grands problèmes du monde physique.

Dans la garantie religieuse, qui se trouve produite dans les *Prologomènes*, aux pages 442 à 500, et qui est fondée sur ce que nous y avons établi d'abord, sous le point de vue spéculatif, concernant la solution du problème de la religion absolue ou du *Parasclétisme* (page 179), ayant pour objet la *création propre de l'homme*, et concernant la solution du problème de la religion révélée ou du *Christianisme-accomplé* (pages 180 à 190), ayant pour objet la *réhabilitation spirituelle de l'homme*, nous avons offert principalement, comme garantie religieuse positive, la *réalisation pratique* du *Christianisme-accomplé*, aux pages 471 à 500. Et pour cela, considérant d'abord le *Christianisme* en général, aux pages 473 à 479, nous y fixons, tout à la fois, et ses *éléments exégétiques* (page 478), et son *système didactique* (page 479), présentant, pour le christianisme-accomplé, sa *déduction dogmatique*, dans une nouvelle attribution théologique de la morale, et sa *constitution symbolique*, dans une nouvelle détermination théologique de la vie éternelle. Considérant ensuite les *Eglises chrétiennes* en particulier, aux pages 480 à 500, nous y distinguons les *aberrations religieuses*, dans le *mysticisme* et dans le *protestantisme* (pages 480 à 483), et l'an-

tique *religion centrale*, composée des deux *églises catholiques*, latine et grecque, ou d'Occident et d'Orient (pages 483 à 500). Dans ces aberrations, nous reconnaissons que le mysticisme religieux est absolument impropre à produire, *par son développement*, le christianisme-accompli, et que le protestantisme religieux est essentiellement propre à amener, *par une nouvelle réforme*, ce christianisme-accompli. Et pour ce qui concerne les deux églises catholiques, latine et grecque, nous reconnaissons, par ces nouvelles considérations messianiques, qu'elles sont aujourd'hui arrêtées dans leurs progrès, prescrits par Jésus-Christ, surtout l'Eglise latine; par suite du susdit désaveu de la raison absolue, mais que, l'une et l'autre, ces antiques églises sont propres à amener le christianisme-accompli, *par le simple développement de leurs principes*. — Or, c'est de nouveau et précisément cette garantie religieuse de la doctrine du messianisme, garantie pour laquelle nous n'avons produit que les principes dans les *Prolegomènes*, que nous accomplissons actuellement dans le second tome de la présente Réforme du Savoir humain, portant le titre de *Réforme de la Philosophie, comme base de l'accomplissement de la Religion*. Et c'est dans ce second tome, tel qu'il paraîtra incessamment, que nous produirons ainsi, pour l'accomplissement de cette garantie religieuse du messianisme, la solution rigoureuse; d'abord, de tous les problèmes de la religion révélée ou du Christianisme-accompli, pour opérer la réhabilitation spirituelle de l'homme, et ensuite, de tous les problèmes de la religion-absolue ou du Paracletisme, pour opérer la création propre de l'homme, son immortalité. — Pour se former une idée de cet accomplissement religieux dans le second tome de la présente Réforme du Savoir humain, il suffit de comparer le premier tome présent de cette Réforme, offrant l'accomplissement scientifique, avec ce qui a été dit provisoirement de cet accomplissement dans les *Prolegomènes*; et l'on aura l'idée de l'étendue et de la perfection de l'accomplissement religieux qu'offrira le second tome que nous annonçons.

Pour ce qui concerne ensuite les cinq autres réalités suprêmes de l'homme, celles que les modernes nations civilisées ne peuvent concevoir, et sur lesquelles elles n'ont conséquemment que des opinions defectueuses, erronées, et même tout à fait fausses, nous avons, dans les *Prolegomènes* du Messianisme, fixé suffisamment ces hautes réalités pour que, par l'extrême contraste de leur vérité avec les opinions erronées que s'en forment les peuples civilisés, on eût pu conclure facile-

C.

ment toute l'absurdité de ces opinions. — Voici de nouveau les points principaux de ces cinq réalités absolues de l'homme, points que nous allons de même rappeler séparément.

La première de ces cinq hautes réalités, c'est-à-dire, la fondation péremptoire de la vérité sur la terre, et à cette fin, la réalisation de la philosophie absolue, a été fixée, aux pages 546 à 556, dans la *ROSDATION* du messianisme, formant le complément de la précédente garantie religieuse, de cette garantie supérieure où il faut effectivement s'élever jusqu'à la vérité ABSOLUE pour atteindre au principe premier de la religion. Aussi, la base immuable de la fondation du messianisme dont il est ici question, est-elle formée précisément par les deux ÉLÉMENTS de l'essence intime de l'Archi-Absolu ou de ce qui est Indiscible, par ces deux éléments qui, dans cette essence intime, sont revêtus du caractère de vérité absolue. — Et revêtue ainsi de ce caractère infailible, cette base du messianisme, telle qu'elle était signalée dans les *Prologomènes*, accusait suffisamment l'existence de la vérité absolue sur la terre, pour qu'on eût pu la reconnaître, si le désaveu de cette vérité suprême, qui caractérise nos modernes peuples civilisés, ne s'y était pas opposé invinciblement. — Eh bien, dans le second tome de la présente Réforme du Savoir humain, nommément, dans la Réforme de la Philosophie, cette vérité absolue, cette essence intime de l'Archi-Absolu, sera signalée de manière à ce que tout homme qui saura pénétrer dans ce sanctuaire, ne puisse plus en douter, en voyant surtout que c'est de ce sanctuaire qu'émane la création entière, celle de l'Univers, et même celle de Dieu.

La deuxième de ces cinq hautes réalités en question, nommément, la fin ou le but absolu de l'homme sur la terre, consistant dans sa *CRÉATION PROPRE*, et formant le dogme suprême du messianisme, a été fixée, à la fin des *Prologomènes*, dans la *genèse des facultés hyperphysiques* de l'homme, aux pages 565 à 568. Et, comme fin absolue de toutes les actions humaines, cette haute et décisive réalité de l'homme a été reproduite nécessairement dans toutes les parties pratiques de la doctrine des *Prologomènes*; de sorte que les peuples civilisés, parmi lesquels a été produit cet ouvrage, ne pouvaient méconnaître ce grand dogme du messianisme, la création propre de l'homme, autrement qu'en méconnaissant toute fin morale dans l'humanité, comme ils le font effectivement.

On conçoit de plus que deux autres des cinq réalités suprêmes dont

il est ici question, savoir, le progrès historique de l'humanité et le but suprême des États, doivent se régler d'après cette fin ou ce but absolu de l'homme que nous venons de signaler. Et l'on conçoit en même temps que les peuples civilisés qui méconnaissent ce but final et absolu de l'homme sur la terre, ne doivent pouvoir se former une idée exacte, ni du progrès historique de l'humanité, c'est-à-dire, de ce qui constitue l'histoire, ni du but suprême des États, c'est-à-dire, de l'organisation politique que doit recevoir l'association juridique des hommes. Et de là vient précisément cette universelle tourmente politique dans laquelle vivent aujourd'hui les nations civilisées, et de laquelle elles ne pourront sortir par aucun moyen concevable par elles-mêmes. — Or, ce progrès historique, subordonné ainsi au but final et absolu de l'homme, a été signalé dans les *Prolegomènes du Messianisme*, aux pages 134 à 161, dans l'aperçu de la *Philosophie de l'Histoire*, extrait de cette philosophie spéciale que nous avons produite antérieurement dans la *Métapolitique messianique*. Et le but suprême des États, subordonné également au but final et absolu de l'homme, avait été signalé déjà dans cette *Métapolitique messianique*, et l'a été surtout dans l'*Introduction* aux *Prolegomènes* et dans la partie de cet ouvrage, aux pages 211 à 219, où, pour arriver par induction à la connaissance de la loi de création, on l'a tirée de la genèse des sciences morales, notamment, de la politique. — Eh bien, les nations civilisées, parmi lesquelles ont été produits ces ouvrages, n'ont pu rien comprendre à cette organisation absolue des États, qui ferait cesser toutes leurs susdites tourmentes politiques. Et en continuant ainsi à désavouer la possibilité de la découverte de la vérité, elles courent en aveugles à leur ruine imminente et inévitable, par le développement croissant, dans le bas peuple, du socialisme, du communisme, et de toutes ces combinaisons soi-disant démocratiques qui ne sont réellement que de véritables combinaisons zoocratiques. A Dieu ne plaise qu'elles reçoivent, par cette ruine, un terrible châtimement de leur susdit abrutissement intellectuel, par cette ruine qui pourrait devenir celle du monde civilisé tout entier, si la Providence n'avait prévu ce malheur et n'en avait préservé l'humanité par l'existence et par l'action directrice des nations slaves. — Nous avons ainsi prédit déjà positivement, dans nos ouvrages, cette ruine d'un grand État réformé sur de pareils principes soi-disant démocratiques, nous en avons même assigné le terme (sept années); et notre triste prédiction s'est malheureusement accomplie, même avant

ce terme, car l'existence NATURELLE de cet Etat avait réellement cessé alors, et l'on n'a pu depuis continuer son existence ARTIFICIELLE que par ce que l'on nomme la *grande politique*, en substituant la *politique des intérêts* à la place de la *politique des idées*.

Enfin, la dernière des cinq réalités suprêmes de l'homme, de celles que les modernes nations civilisées ne peuvent concevoir, et dont elles n'ont conséquemment que de fausses idées, consiste, comme nous l'avons rappelé plus haut, dans la répartition des destinées humaines parmi les différentes nations, afin de les faire concourir solidairement à l'obtention du but final et suprême de l'humanité, à ce grand but que nous venons de signaler. Et nous avons également, dans les Prolegomènes, aux pages 500 à 546, parmi les résultats pratiques du messianisme, fixé les principes absolus de cette répartition des destinées nationales, après y avoir fait reconnaître l'absence actuelle de tout but universel pour l'humanité, c'est-à-dire, la cessation de la direction des peuples par la Providence, pour provoquer l'homme à l'établissement spontané de ses buts absolus comme être raisonnable, et après y avoir ainsi reconnu la nécessité d'une urgente *direction de l'humanité* par l'homme lui-même, nommément par l'*Union-Absolue* des hommes, par leur véritable *Sainte-Alliance*, formant leur association messianique, c'est-à-dire, la troisième et dernière association morale des hommes, destinée à compléter les deux précédentes associations morales, savoir, l'*Etat*, formant l'association juridique, et l'*Eglise*, formant l'association éthique des hommes. Nous y avons conséquemment reconnu (pag. 501 à 506) la Vaine Anticipation sur cette direction de l'humanité par la diplomatie moderne, à cause de l'impossibilité actuelle de cette direction, c'est-à-dire, à cause de la double ignorance où se trouvent encore les nations civilisées, savoir, celle du *but* ou des *destinées finales* du monde, et celle des *moens* ou de la *règle de répartition* de ces destinées entre les diverses nations existantes. Aussi, est-ce précisément par la double connaissance, et de ces *destinées finales*, et de cette *règle hodégétique*, en appliquant ces principes absolus aux nations existantes, que nous y parvenons (pages 508 à 546) à découvrir le destin absolu et suprême des trois distinctes nations européennes, nommément, 1°. le destin des nations romaines, et spécialement de la France; 2°. le destin des nations germaniques, et spécialement de l'Allemagne; et 3°. le destin des nations slaves, et spécialement de la Russie. Nous découvrons ainsi, en effet, 1°. que le destin absolu de la France (pages 508 à 513) con-

siste dans l'accomplissement de l'association juridique des hommes, c'est-à-dire, dans l'accomplissement de l'État, par la découverte et par la réalisation de son but suprême; 2°. que le destin absolu de l'Allemagne (pages 513 à 523) consiste dans l'accomplissement de l'association éthique des hommes, c'est-à-dire, dans l'accomplissement de l'Église, par la découverte et par la solution du dogme suprême de la religion; enfin 3°. que le destin absolu de la Russie (pag. 523 à 546) consiste dans l'accomplissement de l'association messianique des hommes, c'est-à-dire, dans l'accomplissement de leur susdite Union-Absolue, par la découverte du but absolu de l'homme, et par la direction de l'humanité vers ce but final et suprême de son existence. Et c'est ainsi qu'entièrement à priori, par la simple application des principes absolus qui sont produits dans les *Prologomènes du Messianisme*, nous y parvenons à la découverte de ce nouveau destin des nations slaves, dont nous avons plus haut recouru, tout à la fois, et la préparation providentielle, et l'actuelle et impérative urgence morale.

Or, comme nous venons de le dire, ces cinq dernières réalités supérieures de l'homme, celles que les modernes nations civilisées ne peuvent concevoir, se trouvent signalées ainsi, dans les *Prologomènes*, aux endroits que nous venons d'indiquer, avec une détermination suffisante pour que, par le contraste de leur frappante vérité à côté des opinions erronées qu'en ont ces nations civilisées, on eût pu déjà conclure facilement l'absurdité de ces opinions. Mais, ce ne sont proprement que les principes de ces hautes réalités qui se trouvent ainsi produits et fixés dans les *Prologomènes*. Et l'on conçoit ici également que la détermination didactique et accomplie de ces hautes réalités de l'homme, en la fondant sur leurs principes absolus, établis dans les *Prologomènes*, sera donnée dans la présente Réforme du *Savoir humain*, notamment, dans le second tome de cette Réforme, c'est-à-dire, dans la Réforme de la Philosophie.

Toutefois, il ne faut pas s'attendre à ce que cette détermination didactique et accomplie des cinq dernières réalités supérieures de l'homme, soit comprise immédiatement par les nations civilisées elles-mêmes. C'est tout au plus si un très-petit nombre d'hommes supérieurs de ces nations pourroient les comprendre ainsi immédiatement. Et ce n'est que par la susdite voie négative que l'on pourra parvenir à faire comprendre ces cinq réalités supérieures à toutes ces nations civilisées, en ramenant constamment à l'absurde, par la preuve apogogique, toutes les

opinions et toutes les déclarations que manifesteront ces nations civilisées. Il importera donc, pour le salut de l'humanité, de créer et d'entretenir, parmi les nations civilisées, de nouveaux journaux ou écrits périodiques dont le but soit précisément, et exclusivement, cette constante et publique réduction à l'absurde de toutes les opinions et déclarations, manifestées dans le monde civilisé, concernant ces cinq réalités suprêmes de l'homme que ces nations ne peuvent encore comprendre. Et cette tâche, qui seule, entendez-vous bien SEULE, pourra sauver le monde civilisé de sa ruine imminente, appartiendra naturellement à la susdite Union-Absolue, lorsqu'elle sera formée, et provisoirement, à celles des nations slaves qui voudront ainsi exercer déjà leur influence directrice sur les nations civilisées, et par conséquent à ceux des hommes supérieurs qui, parmi ces nations civilisées, comprendront cette sainte tâche de repousser des périlleuses erreurs dominantes, afin de préserver ainsi leurs nations respectives d'une ruine inévitable. — Nous-mêmes, si les circonstances nous le permettent, nous nous proposons de relever ainsi publiquement et périodiquement, peut-être dans des *Bulletins messianiques*, les graves erreurs, scientifiques et philosophiques, surtout celles qui sont produites par des corps savants, dont l'influence publique est notoirement plus dangereuse.

Nous pensons avoir prouvé suffisamment que, par suite de la conviction erronée et inébranlable à laquelle, à force de haute civilisation, sont parvenues nos nations modernes, de cette conviction funeste que l'homme ne peut découvrir la vérité absolue, tout progrès essentiel et ultérieur de la raison de l'homme est actuellement impossible à ces nations, et par conséquent que le progrès des lumières, dont elles font tant parade, est complètement arrêté chez ces mêmes nations civilisées. Et nous pensons avoir prouvé également que, par leur nombre et leur valeur, par leur disposition providentielle, et surtout par leur profond et vif pressentiment des grandes destinées du monde, de ces destinées dont elles se sont constamment tenues éloignées jusqu'à ce jour, les nations slaves sont appelées maintenant à continuer ce développement arrêté dans le progrès des lumières, pour conduire et diriger l'humanité dans sa marche progressive vers le destin final et absolu de l'homme. — Toutefois, pour constater davantage ces décisives vérités, nous allons encore jeter un coup d'œil rapide, d'une part, sur les limi-

tes de ce progrès, infranchissables par les nations civilisées, et de l'autre part, sur la perspective infinie qu'ouvrent aujourd'hui les nations slaves.

Or, pour ce qui concerne d'abord ces limites infranchissables par les nations civilisées, il est notoire, et elles en conviennent elles-mêmes, en s'en faisant surtout un titre d'esprit supérieur et de gloire, qu'elles ne peuvent arriver à la vérité scientifique ou philosophique, physique ou morale, autrement que par le moyen des sens. Et pour peu que l'on réfléchisse sur ce mot auguste de *VÉRITÉ*, on conçoit, très-facilement, que ce n'est certainement pas sur la voie finie, illusoire, et surtout bornée des sens que l'homme pourra parvenir à la vérité. Mais, pour que l'on ne nous accuse pas d'inexactitude dans cette appréciation du savoir, nommément du savoir scientifique de nos modernes nations civilisées, nous allons citer les paroles récentes d'un de leurs savants distingués, de M. Flourens, qui, en parlant de Fontenelle, ou de la philosophie moderne, relativement aux sciences physiques, et en y résumant l'histoire de l'Académie des sciences de Paris, dont il est un des secrétaires perpétuels, dit expressément : « D'abord cartésienne, « l'Académie devint ensuite newtonienne; mais, soit avec Descartes, « soit avec Newton, soit depuis Newton et Descartes, elle a toujours « été vouée à l'expérience. Écrire son histoire, c'est écrire l'histoire de « la méthode expérimentale. »

Ainsi, c'est par l'expérience que ces Messieurs veulent parvenir à la connaissance des FORCES CRÉATRICES de la matière et du monde physique ! — Cependant, un peu de réflexion, même sans aucune tendance philosophique, suffit pour comprendre que l'expérience, lors même qu'elle pourrait atteindre à ces forces créatrices, ce qu'elle ne peut nullement, ne saurait qu'en signaler l'existence, et ne pourrait faire connaître les CONDITIONS et les PRINCIPES de cette existence; et c'est précisément dans ces conditions et dans ces principes d'existence que se trouve la VÉRITÉ, ce seul et exclusif objet de la RAISON de l'homme, de cette faculté infinie qui, par l'acte de sa spontanéité, et non par l'inertie des sens ou de l'expérience, produit et sanctionne la vérité. — L'existence des choses, quelque délicates et superflues que soient ces choses, telles que la chaleur, la lumière, l'électricité, etc., n'est qu'un objet de l'ENTENDEMENT; objet qui, comme dépendant uniquement de cette faculté inférieure de l'homme, n'a pour lui qu'un intérêt de sa vie terrestre ou animale. La vérité de cette existence des choses, pure-

ment comme existence, est un FAIT qui s'établit et s'arrête dans la conscience empirique, passive ou animale de l'homme, et ne pénètre pas immédiatement dans sa conscience logique, active ou rationnelle. Sans doute, il importe à la vie terrestre de l'homme de connaître beaucoup de ces faits; mais, dans cette connaissance des faits, quelque vaste qu'elle soit, il n'y a pas encore de SCIENCE. Celle-ci ne commence que lorsque, de l'individualité de ces faits, l'intelligence humaine se porte sur leur universalité, c'est-à-dire, sur les LOIS qui président à leur existence, qui règlent ou déterminent cette existence. Et elle, la science, ne s'accomplit définitivement que lorsque l'intelligence de l'homme parvient à découvrir les CONDITIONS elles-mêmes de ces lois, c'est-à-dire, l'ESSENCE INTIME des choses. — Or, ni les SENS, ni même l'expérience, quelque délicate et ingénieuse qu'elle soit, ne peuvent nous faire connaître ces LOIS qui président à l'existence des choses, et encore moins les CONDITIONS elles-mêmes de ces lois ou l'ESSENCE INTIME des choses; parce que les lois et leurs conditions sont, dans les choses, des fonctions du SAVOIR, tandis que les simples faits de l'existence ne sont, dans les choses, que des fonctions de leur ÊTRE. Ainsi, la faculté cognitive de l'entendement suffit pour constater, par la conscience empirique ou passive de l'homme, l'existence des choses, constituant les FAITS; mais, il faut la faculté créatrice de la RAISON pour pouvoir, dans la conscience potentielle de l'homme, découvrir leur ESSENCE INTIME, cette CONDITION des lois de leur existence; et il faut, pour la découverte de ces LOIS, la faculté intermédiaire du JUGEMENT, qui, dans la conscience logique ou active de l'homme, opère une transition de l'entendement à la raison, et réciproquement, de la raison à l'entendement. Et cette faculté intermédiaire, le jugement, peut naturellement, par une telle double transition, arriver à cette connaissance des lois qui président à l'existence des choses, nommément, d'une part, en partant de l'essence intime des choses, qui est la condition de ces lois, et en les tirant ainsi immédiatement, par *déduction*, de cette essence elle-même, ou bien, de l'autre part, en partant des simples faits de l'existence des choses, et en présupposant, par *induction*, les lois de cette existence. Dans le premier cas, les lois déduites ainsi de l'essence intime des choses, sont *fixées à priori*; elles ont alors le caractère de *nécessité*, et elles portent, dans l'intelligence, une *certitude apodictique*. Et dans le second cas, les lois induites ainsi des simples faits de l'existence des choses, sont purement *présupposées à posteriori*; elles n'ont

alors que le caractère de *contingence*, et elles ne portent, dans l'intelligence, qu'une *certitude problématique*. — Quant à ces simples *faits* de l'existence des choses, lorsqu'ils sont bien constatés par l'entendement, c'est-à-dire, lorsqu'ils sont *vérifiés* par la jonction de la conscience logique ou active à la conscience empirique ou passive, dans laquelle ils s'établissent d'abord, ils portent alors, dans l'intelligence de l'homme, une certitude intermédiaire, entre la certitude problématique et la certitude apodictique, nommément, une *certitude assertorique*.

On peut maintenant, avec facilité, se former une idée exacte des sciences expérimentales dont les savants, dans nos modernes nations civilisées, font aujourd'hui une si pompeuse parade. — On voit, d'abord, qu'à proprement parler, il n'existe pas encore, chez ces savants civilisés, de véritables sciences physiques. — Ils obtiennent bien, par leur méthode expérimentale, la connaissance de nombreux *faits physiques*; mais, comme nous venons de le voir, ces faits, qui demeurent étrangers à toute investigation de la raison de l'homme, ne constituent pas encore la science. Ce sont tout au plus des matériaux pour les sciences à venir; des matériaux qui, en général, ne peuvent avoir aujourd'hui d'autre utilité que leur application aux arts industriels, ni par conséquent d'autre intérêt que celui qui s'attache à la vie terrestre ou animale de l'homme. Bien plus, l'accumulation continue et progressive de ces faits ou matériaux physiques, est plutôt nuisible qu'utile, parce que, d'une part, elle fait perdre de vue l'idée de la vraie science, et que, de l'autre, par la facilité que l'on a de devenir un savant en faisant des expériences quelconques, elle entraîne, dans la carrière scientifique, une foule d'hommes qui, dans la société, pourraient employer mieux leurs talents et leur fortune. — Quant aux prétendues lois que les savants civilisés s'empressent d'assigner à ces nombreux faits physiques; en les tirant, par une rapide induction, de ces faits bien ou mal observés, on voit maintenant, d'après ce que nous venons de reconnaître concernant le caractère logique ou plutôt psychologique de cette induction, quelle est la valeur extrêmement précaire de ces lois purement présomptives et tout à fait problématiques. Aussi, sont-ils forcés de changer et de rectifier continuellement ces prétendues lois, à mesure que de nouvelles expériences font reconnaître leur fausseté, comme cela vient de leur arriver récemment pour la célèbre loi de Boyle ou de Mariotte. En un mot, il n'y a là qu'une espèce d'anticipation illusoire sur la science, qui, par la nature purement contingente

de l'induction, de cette fonction encore inerte du jugement, ne peut donner une satisfaction péremptoire à la raison de l'homme, et ne peut subsister que pour nos savants civilisés qui ne conçoivent pas, et qui, par conséquent, nient la faculté toute-puissante de l'homme de découvrir la vérité. — Enfin, pour ce qui concerne les conditions elles-mêmes de ces lois qui président à l'existence des faits physiques, c'est-à-dire, pour ce qui concerne l'essence intime de ces faits ou substances physiques; et dont la découverte demande l'action spontanée qu'exerce la raison absolue de l'homme, en fixant cette essence, par la loi de création, dans l'acte même de la création du monde, on couçoit maintenant que les savants des nations civilisées, qui désavouent l'existence dans l'homme de cette raison absolue, renoncent nécessairement, même avec gloire, à la connaissance de cette essence intime des substances physiques, et se contentent, par une orgueilleuse contradiction, de se forger, sur cette essence intime, des hypothèses, plus grossières souvent qu'elles ne sont risibles. Aussi, par suite de l'absence totale de cette véritable science physique, car c'est là, et seulement là que se trouve, pour les sciences physiques, le mystère de la vérité, nos savants civilisés sont ordinairement les hommes le moins éclairés du monde. Demandez-leur ce que c'est que la matière, la chaleur, la lumière, l'électricité, la vie, etc., toutes ces substances ou phénomènes physiques, avec les noms desquels ils font tant parade, et vous verrez qu'ils n'en savent pas plus que les autres hommes.

Pour ce qui concerne ensuite les sciences mathématiques de nos modernes nations civilisées, on dirait, et cela n'est pas une figure de rhétorique, que l'évidence infinie, et par conséquent la certitude absolue que ces sciences portent en elles, offusquaient les géomètres de ces nations civilisées, par le contraste importun de cette certitude apodictique avec la certitude purement problématique de toutes les autres connaissances scientifiques. C'est par cette raison, en effet, qu'ils ont cherché à ravalier les sciences mathématiques, en voulant en chasser l'idée de l'infini, ce principe de leur haute évidence et de leur certitude absolue. Pour preuve, nous rappellerons ici toutes ces bizarres explications matérialistiques qu'ils voulaient donner de l'auguste idée de l'infini par la grossière idée du fini, et nous rappellerons surtout ce premier des fameux prix décepnaux, par lequel l'Académie des sciences de Paris a couronné la *Théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, destinée à extirper ainsi des mathématiques cette importune idée de l'infini, qui,

à côté des glorieuses prétentions universelles à l'animalité, accusait dans l'homme une nature ou une condition plus élevée. — De plus, choqués également par la méthode féconde de la synthèse, qui avait conduit à toutes les découvertes antérieures, mais qui, à son tour, laissait transpirer l'importune faculté créatrice de la raison absolue, les géomètres civilisés l'ont également chassée de leur science, pour lui substituer la méthode analytique, qui ne fait que découvrir les éléments ou les parties constitutives d'une idée proposée ou d'un objet donné, et qui, comme telle, est utile en chimie et en d'autres sciences expérimentales, mais stérile en mathématiques, parce qu'elle ne peut, dans son application rigoureuse, faire découvrir rien au delà de ce qui, comme élément ou comme partie constituante d'une idée donnée, est déjà contenu dans cette idée, et parce que, en mathématiques, l'idée donnée est toujours construite à priori avec tous ses éléments ou parties constitutives. Aussi, est-ce précisément à cette stérile *Analyse*, avec laquelle les géomètres modernes font tant de bruit, que l'on doit leur actuelle impuissance de faire aucune découverte fondamentale, comme nous le prouvons positivement dans la présente *Réforme des Mathématiques*.

Enfin, pour ce qui concerne la philosophie de nos modernes nations civilisées, nous ne pouvons ou plutôt nous ne devons ici parler que de la philosophie de la nation germanique, de cette seule philosophie qui aujourd'hui mérite ce nom. Nous ne pourrions, en effet, parler ici de la philosophie actuelle des autres nations civilisées sans faire rire le lecteur; et nous n'avons pas pour objet, dans cette adresse aux nations slaves, de rendre ridicule aucune production humaine. Il s'agit ici de choses trop graves pour que le rire, lors même qu'il serait instructif, n'y soit entièrement déplacé. — Or, pour en venir à cette philosophie allemande, qui, à tous égards, mérite une attention sérieuse au milieu de l'actuelle confusion rationnelle des nations civilisées, nous l'avons, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, caractérisée suffisamment, par le moyen absolu de la loi de création elle-même, pour que nous ne puissions nous dispenser ici de la discuter ultérieurement. Nous nous bornerons donc à rappeler la conclusion finale à laquelle nous y sommes parvenus par un tel examen génétique, ou plutôt par un tel accomplissement génétique de la philosophie allemande au moyen de la loi de création, de cette loi suprême qui préside à la genèse de toutes les réalités, et par conséquent à la genèse des vérités philosophiques. — Or, cette conclusion finale consiste en ce que, par une

marche rapide et inattendue à cette époque de la civilisation, cette haute philosophie, suivant la carrière ouverte par l'immortel Kant, après avoir parcouru méthodiquement tous les échelons de l'intelligence temporelle de l'homme, et après être ainsi parvenue à découvrir le caractère de l'Absolu, dans l'identité primitive du savoir et de l'être, s'est arrêtée tout à coup devant la solution du grand problème que proposait cette découverte du caractère de l'Absolu, c'est-à-dire, devant la solution du problème de l'essence intime de l'Absolu, conforme à ce caractère temporel, mais précis, que présente l'identité primitive du savoir et de l'être. Et cette impuissance de la philosophie allemande à résoudre ce grand problème, c'est-à-dire, à découvrir cette auguste essence intime de l'Absolu qui répond à son haut et aujourd'hui indélébile caractère de l'identité primitive en question, provient, comme nous l'avons également reconnu dans les Prolegomènes, de l'absence actuelle, dans cette philosophie germanique, de la virtualité créatrice de la raison absolue, de cette décisive virtualité qui, non plus qu'aux autres nations civilisées, ne s'est pas encore révélée à cette philosophie que nation germanique. Aussi, par suite de l'impossibilité où se trouvaient alors les philosophes allemands de résoudre le grand problème qu'ils venaient de poser pour l'accomplissement de la philosophie, se sont-ils rejetés en arrière, sur les échelons que Schelling, entraîné par l'impétuosité de son génie, avait franchis pour arriver à la découverte décisive du caractère de l'Absolu. Et c'est ainsi que les uns, comme le dialectique Hegel, revinrent à un pur logisme, et les autres, comme le métaphysique Krause, à un pur ontologisme, sans parler des nombreuses combinaisons d'éléments hétérogènes, par lesquelles, avec une conscience plus ou moins claire, d'illustres philosophes allemands voulaient de même satisfaire aux conditions du grand problème signalé par Schelling. Ce puissant philosophe lui-même, après avoir épuisé sa brillante imagination poétique à la solution de son problème, revint pieusement à l'idée d'une révélation universelle, présentée positivement dans le fait même de l'univers, révélation dans laquelle il croyait que la solution de ce problème se trouvait donnée.

Ainsi, ce grand et auguste problème de la découverte de l'essence intime de l'Absolu, conforme à son caractère indélébile de l'identité primitive du savoir et de l'être, se trouve maintenant proposé formellement à l'humanité ; et c'est de la solution de ce décisif problème, de cette solution difficile qui ne pourra être opérée que par le déve-

l'oppression dans l'homme de la VIRTUALITÉ CRÉATRICE de la raison absolue, que dépend aujourd'hui le progrès ultérieur de l'humanité, pour arriver à ses destinées suprêmes, c'est-à-dire, au but final et absolu de l'homme sur la terre. — Or, c'est à ce grand et décisif progrès ultérieur et final de l'humanité que se trouvent actuellement appelées les nations slaves.

Il ne nous reste ici qu'à légitimer cette haute mission providentielle des nations slaves. Et pour le faire, nous dirons comme le disait Klopstock, en parlant de l'Allemagne, que le bras de fer de la modestie arrête nos paroles et met un frein jusqu'à nos pensées. — Nous ne pourrions donc légitimer cette grande mission des nations slaves autrement qu'en signalant et en fixant la tâche qu'on doit remplir dans son sein pour se rendre digne d'une si haute vocation. Et pour cela ; il suffira de signaler, avec précision, les problèmes que doit résoudre la doctrine du messianisme, cette doctrine absolue qui émane ici du sein des nations slaves, et qui, surtout par la découverte du but final et absolu de l'homme sur la terre, c'est-à-dire, par la découverte du décisif dogme messianique de la CRÉATION PROPRE de l'homme, donne aux nations slaves le droit de présider à la direction de l'humanité vers ces destinées suprêmes, vers cet auguste et final but de l'homme sur la terre.

Nous nous bornerons donc à reproduire ici les grands problèmes du messianisme, tels que nous les avons produits dans les *Prolégomènes* ; et pour légitimer la présente mission providentielle des nations slaves, nous nous imposons la tâche de résoudre rigoureusement, dans la présente *Réforme du Savoir humain*, tous ces difficiles et augustes problèmes de l'humanité. — Les voici, tels que, dans les *Prolégomènes* (*) ; ils ont été déduits des sept RÉALITÉS ÉLÉMENTAIRES du monde, desquelles résultent les susdites sept RÉALITÉS SYSTEMATIQUES et SUPRÊMES de l'homme.

Première Réalité. — Philosophie.

Problème I. — La philosophie, et nommément la philosophie absolue que le Messianisme est appelé à constituer, doit, avant tout, fonder

(*) Nous pouvons aujourd'hui, après la susdite fondation de la doctrine du Messianisme, telle qu'elle a été donnée dans les *Prolégomènes* (page 545 à 558), préciser mieux les présents problèmes de l'humanité.

UNE CERTITUDE INCONDITIONNELLE chez l'homme; certitude qui n'existe pas encore, et sans laquelle il ne saurait y avoir, pour l'être raisonnable, aucune VÉRITÉ ABSOLUE.

Problème II. — Elle, la philosophie, doit, en conséquence; découvrir le PRINCIPLE ABSOLU du monde, c'est-à-dire, l'essence intime de l'ARCHI-ABSOLU ou de ce qui est INDICIBLE; principe duquel seul découle toute réalité, et par conséquent la certitude absolue dans le savoir humain (Problème I). — C'est la solution de ce deuxième problème qui constitue la base immuable du corps systématique de la doctrine du Messianisme.

Problème III. — Elle, la philosophie absolue, doit de plus dévoiler la CRÉATION DE L'UNIVERS, dans son origine, dans ses progrès et dans ses fins, en la déduisant tout entière du susdit principe inconditionnel de toute réalité (Problème II).

Problème IV. — Elle doit même, en se fondant toujours sur cet absolu principe de réalité, démontrer positivement, d'une manière didactique et rigoureuse, la création propre, non-seulement de l'ÊTRE-SUPRÊME, nommé DIEU, mais de plus de ses deux éléments primordiaux, qui, sous les noms augustes d'ABSOLU et de VÉRITÉ, sont, eo Dieu, les principes de sa réalité.

Problème V. — Elle doit ainsi, dans l'essence de l'acte de la création, découvrir la LOI que suit nécessairement cette haute production spontanée de l'univers; et elle doit par là dévoiler la LOI DE CRÉATION, cette loi auguste qui donne naissance à toute réalité quelconque, même à celle de Dieu.

Problème VI. — Elle doit, par là même, c'est-à-dire, en connaissant la loi de création de toute réalité (Problème V), se trouver, non-seulement au-dessus de l'ERRERIE, dont elle doit signaler les sources et les abîmes, mais de plus au-dessus de la VÉRITÉ, qu'elle seule peut ainsi produire et établir définitivement dans le monde.

Deuxième Réalité. — Religion.

Problème VII. — La religion, et notamment la religion absolue, le PARACLETISME, que la doctrine messianique est appelée à constituer, doit, munie de la loi de création, dévoiler l'origine céleste du BIEN, et l'origine infernale du MAL, en montrant que la production réelle du premier est un ouvrage spontané du Créateur, et que l'existence effec-

tive du dernier ne peut s'établir que comme ouvrage également spontané de créatures libres, douées de la puissance créatrice de la raison, dont un perversif usage peut seul introduire ainsi le mal dans le monde.

Problème VIII. — Elle, la religion, doit encore prouver que, si le mal existe effectivement sur la terre, c'est-à-dire, si l'homme, comme être raisonnable et par conséquent libre, peut donner la préférence à la maxime du mal sur la maxime du bien, cette dépravation morale de la nature humaine, cette présence ou révélation en nous de l'idée absolue du mal, loin d'être un ouvrage immédiat du Créateur, accuse au contraire une perversive création secondaire du mal, une véritable CHUTE MORALE, chez les êtres supérieurs de qui nous tenons ce funeste héritage.

Problème IX. — Elle, la religion absolue, doit alors, en suivant toujours la loi de création, décliner notre responsabilité propre de cette chute morale (Problème VIII), en prouvant qu'avant l'actuelle époque historique, c'est-à-dire, avant le développement providentiel et accompli de l'homme, où il est parvenu aujourd'hui sous ses conditions terrestres, il lui était impossible, absolument impossible de concevoir, et surtout de déterminer positivement, dans son caractère essentiel, le PROBLÈME DE SES DESTINÉES, par la solution duquel l'humanité peut actuellement se libérer de son état mortel de dépravation morale, et peut ainsi, avant tout, obtenir déjà la RÉHABILITATION de son état primitif de pureté morale; réhabilitation qui accomplira d'abord les DESTINÉES RELATIVES de l'humanité actuelle.

Première et deuxième Réalités. — *Union finale de la philosophie et de la religion, constituant le Messianisme.*

Problème X. — Après cet accomplissement des destinées relatives de l'actuelle espèce humaine (Problème IX), le Messianisme doit, alors seulement, déchirer le voile qui couvre le but final dans la création des êtres raisonnables, c'est-à-dire, les DESTINÉES ABSOLUES de l'humanité, en lui apprenant, d'une manière infaillible, que la solution accomplie du problème de nos destinées, c'est-à-dire, l'obtention de la VÉRITÉ et de l'IMMORTALITÉ, qui constitue nos destinées absolues, ne doit ni ne peut s'établir que comme ouvrage propre et spontané de l'homme. — En effet, le Créateur tout-puissant ne pourrait les donner à aucun

être, parce que l'immortalité, ayant pour condition la connaissance de la vérité, ne peut, comme cette dernière, être produite que par l'être même qui, avec la virtualité créatrice de sa raison, peut ainsi produire en lui la vérité et son corollaire, sa propre immortalité.

Problème XI. — C'est là, sans contredit, la plus haute sagesse et la plus haute bonté du Créateur, d'avoir produit des êtres qui, à l'instar de lui, doivent et peuvent eux-mêmes (Problème X), par la découverte de la vérité, accomplir leur création, en se donnant l'immortalité par une telle réalisation du VÉRRE en eux et par son IDENTIFICATION AVEC L'ABSOLU qui est l'essence de leur raison. Et c'est là ce que l'Écriture-Sainte nous a fait pressentir en disant que « Dieu a créé l'homme à son image. » — Toute autre interprétation de ces paroles de l'Écriture serait, non-seulement fautive, mais de plus absurde.

Problème XII. — Ainsi, cette production spontanée de la vérité par l'homme, c'est-à-dire, la découverte de l'essence intime de l'Archi-Absolu ou de ce qui est Indicible, découverte qui seule peut, non-seulement garantir, mais surtout produire (Problème XI) l'immortalité des êtres raisonnables, est l'acte de la CRÉATION PROPRE de l'homme; acte pour lequel seul existe l'univers, et qui forme ainsi le DOGME FONDAMENTAL du Messianisme.

Problème XIII. — Enfin, la doctrine du Messianisme doit montrer combien, non-seulement toute VÉRITABLE PHILOSOPHIE, mais même toute RELIGION POSITIVE, spécialement la religion chrétienne, sont CONFORMES à la majestueuse fin de la création que nous venons de dévoiler (Problème XII), et qui seule est digne de la grandeur de Dieu. — C'est là précisément l'identification de la philosophie avec la religion, opérée conjointement par la philosophie absolue et par la religion absolue; IDENTIFICATION qui constitue le MESSIANISME.

Troisième Réalité. — Mysticisme.

Problème XIV. — Hors de cette direction absolue de l'humanité (Problèmes X, XI, XII et XIII), tout est TÉNÉBRE, ERREUR OU PERVERSION. — Le Messianisme doit indiquer tous les précipices qui bordent ce chemin escarpé de la vérité. Il doit surtout signaler ici l'abîme de notre héréditaire dépravation morale, c'est-à-dire, la fatale présence en nous de l'idée absolue du mal; idée dans laquelle se complaisent, sous les conditions présentes de l'homme, des êtres qui, plus intimement liés

aux auteurs infernaux de cette destructive idée absolue ou de cette chute morale, demeurent étrangers à l'actuelle espèce humaine, et se constituent même ennemis du genre humain, en cherchant ainsi, dans cette confusion des deux mondes, formant le MYSTICISME, à attaquer, avec leur sentiment flétri par l'ancien péché du monde primitif, la pureté de la raison de l'homme nouveau dans le monde présent.

*Quatrième Réalité. — Église,
formant l'association éthique des hommes.*

Problème XV. — Par l'établissement de la susdite conformité messianique de la révélation religieuse avec la vérité philosophique (Problème XIII), le Messianisme peut démontrer rigoureusement l'ORIGINE DIVINE du christianisme, dans l'Ancien et dans le Nouveau Testaments; et il peut alors dévoiler la VÉRITABLE DESTINATION du christianisme sur la terre, dans son application à l'établissement de l'ÉGLISE ou de l'association éthique des hommes, ayant pour objet apparent de purifier en nous, par notre propre conscience, nos MAXIMES MORALES, les principes intimes de nos actions, et de réaliser par là, déjà sur la terre, un tel AGÈNE DE DIEU. Aussi, pour l'accomplissement de cette Église chrétienne, le Messianisme doit-il, dans la vue finale des destinées absolues de l'humanité (Problème X), embrasser toutes les autres religions positives, surtout celle du peuple d'Israël, de ce peuple de Dieu qui, le premier, a eu la révélation claire du MESSIE (*), et qui seul l'a attendu réellement, avec autant de conscience que l'on a mis ailleurs d'aveuglement à le méconnaître.

Problème XVI. — Et par conséquent, cette doctrine messianique peut et doit indiquer, d'une manière positive, les destinées inévitables et l'unique DIRECTION SALUTAIRE des diverses Églises chrétiennes et des autres associations religieuses, en fixant, avec infailibilité, une ADOLESCENCE universelle pour l'union finale de toutes ces associations éthiques et de toutes les religions positives.

(*) La personification du Messianisme dans le MESSIAH ne doit être considérée que comme une expression allégorique, la seule propre, dans l'enfance de l'humanité, à caractériser la concrète l'idée abstraite de la doctrine du Messianisme, telle que nous la fixons maintenant, d'une manière didactique.

*Cinquième Réalité. — État,
formant l'association juridique des hommes.*

Problème XVII. — Dans la même vue des fins absolues de l'humanité, c'est-à-dire, des destinées finales des êtres raisonnables (Problème X), le Messianisme doit montrer en quoi la politique, et surtout la POLITIQUE MODERNE, est ou n'est pas conforme à ces fins augustes, seules dignes de la méditation des souverains. Et dans le cas où cette politique moderne se trouverait suivre une fausse direction, ou du moins marcher hors de toute direction salutaire, comme paraît l'accuser le désordre politique, permanent et même progressif dans tout le monde civilisé, la présente doctrine messianique, connaissant les susdites destinées absolues de l'humanité, devra et pourra facilement assigner à la politique sa VÉRITABLE DIRECTION, non comme une nouvelle utopie, mais comme un simple moyen matériel, offrant une voie praticable et bien éclairée pour arriver à ces vues finales des êtres raisonnables, en observant que c'est précisément et uniquement pour arriver à ces fins de leur création que les hommes ont besoin, dans une telle direction positive, de former l'État ou leur association juridique, ayant ainsi pour objet de constituer, par la coercition, non-seulement la moralité des ACTIONS HUMAINES, mais même le saint et final but de cette moralité, et de réaliser par là sur la terre un tel RÈGNE DE L'HOMME.

*Sixième Réalité. — Union (publique et légale),
formant l'association messianique ou directrice de l'humanité.*

Problème XVIII. — Le Messianisme doit dévoiler les conditions intellectuelles des deux partis sociaux, du DROIT HUMAIN et du DROIT DIVIN, qui se partagent aujourd'hui l'empire de la raison dans le monde. Il doit ainsi découvrir les principes du funeste et indestructible antagonisme de ces partis, c'est-à-dire, les principes de la fatale ANTONOMIE SOCIALE qui, dans l'interminable lutte de leurs assertions et de leurs prétentions, tout à la fois, et contradictoires et également fondées, menace le monde civilisé de sa destruction, et qui néanmoins paraît être l'unique voie providentielle pour arriver à l'accomplissement de nos hautes destinées. Enfin, par la connaissance positive de ces conditions et de ces principes opposés des deux partis antagonistes, INCONCILIABLES

et INDESTRUCTIBLES, le Messianisme doit prévoir jusqu'à l'époque de cette fatale et inévitable perdition de l'humanité, si elle demeure ainsi abandonnée à sa propre et si funeste impulsion actuelle.

Problème XIX. — Par là même, et pour prévenir cette terrible issue du développement fatal des êtres raisonnables, le Messianisme, connaissant seul et les destinées finales de l'espèce humaine, et les moyens pour opérer la résolution ou la cessation de la critique antinomique sociale que nous venons de signaler, doit indiquer, d'une manière infail-
lible, la direction positive qu'une UNION D'HOMMES SUPÉRIEURS, formant, sous le nom d'UNION-ABSOLUE, l'association messianique des hommes, doit désormais donner à l'humanité, tout à la fois, et pour éviter son imminente ruine, et pour la conduire au but sublime qu'elle doit atteindre sur la terre.

Septième Réalité. — Sciences.

Problème XX. — Enfin, connaissant la loi de création de toute réalité, la doctrine du Messianisme doit et peut seule CONSTITUER PÉREMP-
TOIREMENT les sciences, en établissant et en réglant, d'après cette loi auguste, les divers systèmes de réalités, qui forment les objets respec-
tifs des sciences, et qui constituent ainsi leur ENCYCLOPÉDIE ABSOLUE, cherchée en vain depuis si longtemps.

Problème XXI. — Le Messianisme doit donc donner, à toutes les sciences, leurs LÉGISLATIONS ABSOLUES, en les subordonnant, chacune séparément, d'abord, à une seule LOI SUPRÊME, comme principe premier et fondamental de leurs respectives réalités, et ensuite, à TROIS LOIS UNI-
VERSALLES, comme moyens de la solution de tous leurs problèmes, et cela en déduisant ces lois primordiales, dans chaque système scientifi-
que de réalités, de l'application immédiate de la loi de création elle-même.

Tels sont donc, au nombre de vingt et un (*), les grands problèmes

(*) A ces vingt-un problèmes, résultant des présentes sept réalités élémentaires, et qui ne forment ainsi que les *problèmes élémentaires* de l'humanité, il faut joindre les *problèmes systématiques*, qui proviennent de la combinaison de ces vingt-un problèmes, et qui engendrent conséquemment des réalités systématiques, comme le sont les sept réalités supérieures que nous avons signalées à la tête de cette Adresse. Ainsi, par exemple, par la

de l'humanité, dont la solution, proposée ainsi par le messianisme, doit actuellement décider du sort de l'existence des hommes sur la terre. Et c'est cette solution, non-seulement inattendue, mais déclarée impossible par les modernes nations civilisées, que la doctrine du messianisme, conçue et établie au sein des nations slaves, accepte la tâche de donner complètement et rigoureusement, dans la présente *Réforme du Savoir humain*, pour légitimer la susdite mission providentielle de ces nations vierges, celle de présider actuellement, avec ces hautes vérités messianiques, à la direction de l'humanité, afin de continuer son développement progressif, qui est maintenant arrêté chez les nations civilisées, et afin de conduire ainsi l'humanité à ses destinées suprêmes, au but final et absolu de l'homme sur la terre.

Or, déjà dans le premier tome de cette *Réforme du Savoir humain*, nous présentons dans la *Réforme des Mathématiques*, offrant le prototype de la *Réforme générale des Sciences*, nous présentons, par la solution complète du dernier des susdits vingt-un problèmes messianiques, une garantie préalable, et en quelque sorte infaillible, de la solution également complète de tous les autres de ces problèmes messianiques, de cette solution que nous donnerons dans le second tome de la présente *Réforme du Savoir humain*, c'est-à-dire, dans la *Réforme de la Philosophie*, par laquelle précisément sera obtenue cette complète solution en question des vingt autres problèmes messianiques. — Nous disons que la *Réforme des Mathématiques*, qui paraît aujourd'hui dans le premier tome, offre une garantie en quelque sorte infaillible de la *Réforme de la Philosophie*, qui va paraître incessamment dans le second tome, parce que les grands problèmes scientifiques qui sont résolus dans cette *Réforme des Mathématiques*, étaient également considérés comme insolubles par les savants des nations civilisées; et parce que ces problèmes exigeaient conséquemment, pour leur solution, des principes philosophiques inconnus, résultant précisément de cette réforme de la phi-

combinaison de trois présentes réalités élémentaires, nommément, de la quatrième, de la cinquième et de la sixième, résultent, en les considérant d'abord dans leur développement distinct, la septième réalité systématique, celle de la répartition des destinées humaines entre les différentes nations, et en les considérant ensuite dans leur développement commun et réciproque, la quatrième réalité systématique, celle du progrès historique de l'humanité. Et il en est de même de toutes les autres de ces réalités systématiques et suprêmes, qui toutes proviennent ainsi de la combinaison des présentes sept réalités élémentaires.

philosophie pour laquelle ces principes féconds et supérieurs offrent ainsi une telle garantie préalable. En effet, dans cette Réforme des Mathématiques, en y comprenant la réforme des trois susdits grands problèmes du monde physique, nous parvenons, par l'application de la loi de création, qui, par anticipation, résulte de notre réforme de la philosophie, nous parvenons ainsi, disons-nous, à découvrir les principes philosophiques de ces sciences, principes dont les savants civilisés ne se doutaient même pas encore (*); et de ces principes, nous déduisons immédiatement les trois lois fondamentales de chacune de ces sciences, parmi lesquelles lois domine toujours une loi suprême, de laquelle dérivent les deux autres lois fondamentales, et par conséquent la science tout entière. — Or, ce sont ces trois lois fondamentales, constituant ainsi, dans chacune de ces sciences, sa *Loi suprême*, son *Problème-universel*, et son *Fait téléologique*, qui nous offrent les méthodes absolues pour la solution de tous les problèmes de ces sciences, mathématiques et physiques. — Mais, en outre de ce procédé philosophique dans la solution de ces problèmes scientifiques, ce qui, dans cette solution, telle que la donne notre Réforme des Mathématiques, offre surtout la susdite garantie préalable et en quelque sorte infaillible de notre Réforme de la Philosophie, ce sont les résultats positifs de cette même solution scientifique, en tant qu'ils ont, si nous osons le dire, la triple perfection logique, 1°. d'être entièrement rationnels ou à priori, sans rien tirer à posteriori des sens ou de l'expérience; 2°. d'être absolument exacts ou rigoureux, et non des hypothèses ou de simples approximations; enfin, 3°. d'être entièrement accomplis, au delà de toute attente des savants civilisés, comme plus haut nous nous sommes proposé de le faire, pour annoncer ainsi la découverte de la vérité. — L'ouvrage est maintenant sous les yeux du public, qui peut juger si nous avons réellement rempli ces difficiles et décisives conditions. Nous nous bornons donc, pour guider le lecteur dans cette vaste réforme des sciences, à ajouter ici quelques mots rapides.

Pour ce qui concerne d'abord les sciences physiques, notamment, les trois susdits grands problèmes du monde physique, nous en pré-

(*) Dans son *Analyse des Réfractions*, Kramp dit (page 60) expressément : « Pour ce qui concerne les principes de la science, les plus grands géomètres sont obligés d'avouer ingénument leur ignorance; » et il ajoute « qu'il faut avouer de plus, que cette ignorance ne fait pas trop d'honneur aux mathématiques. »

sentous, effectivement la solution tout à fait conforme à la triple perfection logique que nous venons de nous imposer pour condition.

Ainsi, dans le premier de ces problèmes, dans celui de la construction du monde par les corps célestes, constituant l'objet de la mécanique céleste, qui, jusqu'à ce jour, ne formait qu'une science empirique, fondée sur la célèbre loi newtonienne, reconnue, par expérience, sur le mouvement de la lune, nous découvrons, entièrement à priori, son principe premier, sa loi suprême, accompagnée de ses deux autres lois fondamentales; et nous transformons ainsi la mécanique céleste, cette science purement empirique, en une véritable science rationnelle. Appliquant alors à ce principe nouveau et infallible, nos méthodes absolues de mathématiques, nous parvenons à la solution exacte et rigoureuse de tous les problèmes de la mécanique céleste, dont on n'a pu donner la solution jusqu'à ce jour, si ce n'est par de grossières approximations. Enfin, les lois que nous découvrons dans cette réforme de la mécanique céleste, sont universelles et s'étendent ainsi, au delà de notre système solaire, à tous les systèmes célestes, en découvrant les vraies conditions de l'équilibre permanent et universel entre tous les astres, c'est-à-dire, la véritable loi téléologique de la périodicité de leurs mouvements, et en dévoilant ainsi la fausseté des prétendues perturbations dans ces mouvements des astres. — De plus, pour la garantie scientifique de cette réforme de la mécanique céleste, nous alléguons deux exemples décisifs : l'un, par la nouvelle théorie du mouvement de la lune, de ce mouvement réfractaire dont la science n'a pu, jusqu'à ce jour, assigner les lois; et l'autre, par la théorie entièrement nouvelle du mouvement des planètes inconnues qui causent des anomalies dans le mouvement des planètes connues, cette théorie dont M. Leverrier, sans l'avouer, s'est servi pour la découverte de la planète Neptune.

De même, dans le deuxième de ces trois grands problèmes du monde physique, dans celui de la construction des corps célestes, spécialement de la terre, par la matière, constituant l'objet de la mécanique terrestre, qui, jusqu'à ce jour, ne formait qu'une science hypothétique, fondée sur les hypothèses de Newton, de Huyghens, et de Boscowich ou de Clairaut, nous découvrons, entièrement à priori, son principe premier, sa loi suprême, accompagnée aussi de ses autres lois fondamentales; et nous transformons ainsi la mécanique terrestre, cette science purement hypothétique, en une science rationnelle et positive, dans laquelle, par l'application de nos méthodes absolues de mathématiques, en prouvant

la fausseté des prétendus théorèmes de Newton, de Huyghens et de Clairaut, nous parvenons à découvrir, non-seulement la vraie figure ou forme extérieure de la terre, mais de plus sa construction intérieure ou la répartition de ses masses. — Et pour la garantie scientifique de cette réforme de la mécanique terrestre, nous alléguons également ici deux exemples décisifs : l'un, pour la rectification du système métrique de la France, dont l'unité fondamentale, le mètre, est purement hypothétique, par suite de sa détermination insuffisante à l'aide de la fausse mécanique terrestre ; et l'autre, pour la rectification de la théorie des marées, qui est fondée sur les mêmes principes erronés, et dont le Bureau des longitudes de Paris se sert pour calculer les phénomènes annuels, en compromettant ainsi, sans le savoir, le salut de la marine française.

Enfin, dans le dernier de ces trois grands problèmes du monde physique, dans celui de la construction de la matière par ses forces créatrices, constituant l'objet des sciences physiques strictement dites (de la physique, de la chimie, etc.), de ces sciences qui notoirement sont encore purement hypothétiques, en reposant même sur des hypothèses aussi bizarres que risibles, par exemple, les boules atomistiques de Wollaston, rangées comme des boulets de canon dans les arsenaux, nous découvrons également les principes premiers de ces sciences, leurs respectives lois suprêmes, et nous parvenons ainsi, en signalant les forces créatrices du monde physique, à dévoiler la vraie construction de la matière dans tous ses degrés d'élaboration successive. Nous y découvrons, entre autres résultats principaux, tels que sont, par exemple, la distinction des affinités, mécanique et chimique, et l'explication qui en résulte pour le phénomène inexplicable de l'isomorphie, nous y découvrons surtout, disons-nous, la détermination dynamique ou génétique des modestes atomes chimiques, que, par un grossier retour à l'ancienne doctrine atomistique de Leucippe et Démocrite, nos physiciens et chimistes civilisés confondent avec des atomes mécaniques et même géométriques. Et par la fixation de ces conditions fondamentales, nous transformons également ces sciences purement hypothétiques en véritables sciences rationnelles et positives. — De plus, pour la garantie scientifique de cette réforme, en y embrassant les conditions mécaniques de la matière, c'est-à-dire, son mouvement, nous alléguons de nouveau deux exemples décisifs : l'un, par la vraie thermométrie, en découvrant, dans la construction intime de la matière, les vrais principes de la gra-

dation de la chaleur, principes qui expliquent, entre autres circonstances, le phénomène singulier que le maximum du refroidissement des liquides n'est pas au moment de leur transformation en solides; et l'autre, par le mouvement spontané des corps, en découvrant les lois que suit ce mouvement spécial, lois qui deviennent aujourd'hui d'une grande importance pour la nouvelle locomotion sur les chemins de fer (*).

Pour ce qui concerne ensuite les sciences purement mathématiques, nommément, les mathématiques pures elles-mêmes, nous en présentons également la réforme en satisfaisant aux susdites trois conditions de la perfection logique des sciences, du moins aux deux dernières de ces trois conditions, parce que la première s'établit d'elle-même dans les mathématiques pures, par suite de leur susdite évidence caractéristique. — Ainsi, quant à la seconde de ces conditions, à celle qui impose la solution rigoureuse des problèmes, et qui exclut les simples approximations, nous avons pu y satisfaire facilement par la distinction que nous avons découverte et établie entre les procédés *théoriques* et les procédés *techniques*, c'est-à-dire, généralement entre la *THÉORIE* et la *TECHNIQUE* des sciences; distinction qui, dans les mathématiques, en signalant, d'une part, dans leur théorie, la *génération* de la *NATURE* des quantités, et de l'autre part, dans leur technique, la simple *évaluation* ou la *MESURE* des quantités, nous donne, par l'application convenable de la loi suprême et du problème-universel des mathématiques, qui sont communs à leur théorie et à leur technique, les moyens de résoudre rigoureusement tous les problèmes. Et quant à la dernière des trois conditions de la perfection logique, à celle qui impose l'accomplissement de la science, il nous a été très-facile d'y satisfaire, en portant cet accomplissement bien au delà de l'attente des géomètres parmi les nations civilisées, parce que, comme nous l'avons déjà dit plus haut, la science était arrêtée à tous ses abords, par suite de l'introduction de l'analyse à la place de la synthèse, dont la fécondité créatrice n'était plus au pouvoir des géomètres civilisés. En effet, nous avons pu facilement, par l'application de la loi suprême et du problème-universel des mathématiques, que nous venons de citer, donner la solution, dans tous leurs degrés, de tous les principaux problèmes des mathématiques pures, dont les géomètres, ne pouvant résoudre que quelques premiers

(*) Cette grave question est soumise au Conseil général des Ponts et Chaussées de France; et nous attendons sa décision.

degrés de ces problèmes, déclaraient l'impossibilité. — Nous pourrions alléguer ici plusieurs exemples majeurs, entre autres celui de l'intégration finie des fonctions quelconques, par le moyen des facultés algébriques, que nous avons introduites dans la science, intégration dont la recherche était considérée comme une folie, par Lagrange lui-même. Mais, nous devons surtout alléguer ici un exemple décisif, celui de la résolution des équations algébriques de tous les degrés. Voici ce qu'un géomètre distingué, M. Kramp, disait de la solution de ce problème :

« La solution générale des équations algébriques ne va pas au delà
« du quatrième degré. Les moyens les plus ingénieux, employés par les
« plus grands analystes, pour résoudre généralement les équations algé-
« briques d'un degré supérieur au quatrième, n'ont servi qu'à rendre
« la question plus compliquée : les plus heureux de tous ces essais ont
« été encore ceux qui, après de longs et d'inutiles détours, ont ramené
« leurs auteurs au point dont ils étaient partis. La raison de ce défaut
« absolu de succès n'est pas encore connue ; et l'on ne peut assurer, si
« le problème renferme en lui-même quelque condition inconnue, mais
« impossible à remplir, ou si, sans surpasser les forces de l'analyse en
« général, elle surpasse seulement celles de la vôtre, et si quelque géo-
« mètre des siècles à venir réussira peut-être à vaincre une difficulté
« qui jusqu'ici a paru insurmontable. »

(*Arithmétique universelle de Kramp*, n°. 96, page 70,
publiée en 1808.)

Eh bien, pour compléter notre Réforme des Mathématiques, nous donnons, comme une Addition à cette Réforme, la solution de ce difficile problème, dans un ouvrage qui est extrait du second tome de notre Réforme du Savoir humain, et qui paraît en même temps que la présente Réforme des Mathématiques, sous le titre : *Résolution générale des Équations algébriques de tous les degrés, précédée du Manifeste historique concernant l'actuelle Réforme du Savoir humain, et offrant, pour cette Réforme générale et absolue, tout à la fois, et sa couronne et sa garantie, par la solution philosophique du plus grand problème des sciences, de ce problème mystérieux des Équations, que les efforts de tous les savants n'ont pu, jusqu'à ce jour, ni résoudre, ni même comprendre.*

Enfin, pour bien caractériser cette réforme des mathématiques, dans

F.

la partie pure de ces sciences, nous ne saurions le faire mieux qu'en transcrivant ici le résumé que nous en avons fait, à la page **CXIV** du *Complément de cette Réforme des Mathématiques*, lorsque nous y indiquons la méthode par laquelle on doit aujourd'hui ouvrir la nouvelle et dernière période des mathématiques. — Voici donc ce résumé, en prévenant que les numéros entre parenthèses, qui y sont cités, indiquent les formules où se trouvent ces décisifs résultats :

« Quoi qu'il en arrive, la science est maintenant accomplie. — Ses principes philosophiques sont déduits de la **LOI DE CRÉATION** elle-même, de cette loi qui préside nécessairement à la génération de tous les systèmes de réalités, et par conséquent à l'établissement de toutes les vérités, scientifiques et philosophiques. Ses trois lois fondamentales, constituant la trichotomie mathématique, savoir, sa **LOI SUPRÊME**, son **PROBLÈME-UNIVERSEL**, et son **FAIT TÉLÉOLOGIQUE**, sont dévoilées. Et ses méthodes absolues, fondées sur ses trois lois fondamentales, savoir, la **MÉTHODE SUPRÊME** (142), la **MÉTHODE SECONDAIRE**, **systématique** (760) et **élémentaire** (808), et la **MÉTHODE TÉLÉOLOGIQUE** (308) et (310), laquelle, sans avoir une **NÉCESSITÉ** absolue, présente au moins une **CONTINGENCE** absolue, sont établies péremptoirement. Bien plus, une transition de l'état relatif de la science, où elle est demeurée jusqu'à ce jour, à son état absolu, où elle doit être portée actuellement, savoir, la **MÉTHODE PRIMORDIALE** (729), qui est une anticipation sur la méthode suprême (142), est développée dans tous ses détails, et peut ainsi servir, dès aujourd'hui, même pour les géomètres, nos contemporains, à entrer dans ces nouvelles et absolues voies de la science. — Nous pouvons donc, non-seulement sans exagération, comme nous l'avons déjà dit plus haut, mais de plus avec la certitude absolue de l'assentiment de toute la postérité, déclarer ici que la science du géomètre, la plus grande des sciences, ce prototype de tout le savoir humain, est rigoureusement accomplie par notre **PHILOSOPHIE ABSOLUE**, et qu'elle offre ainsi un critérium infailible de la toute-puissance de cette philosophie suprême. »

Nous pensons que si le second tome de notre Réforme du Savoir humain, nommément, la Réforme de la Philosophie, répond à la garantie que nous venons d'en donner dans le premier tome de cette Réforme générale, nommément, dans la présente Réforme des Mathé-

matiques, comme prototype de la réforme générale des sciences, la doctrine du Messianisme, qui offre cette Réforme générale du Savoir humain, et qui émane du sein des nations slaves, suffira pour légitimer la susdite mission providentielle de ces nations, cette haute mission qui en tout sera conforme à cette doctrine du Messianisme. En effet, pour répondre ainsi à l'actuelle et peut-être infaillible garantie préalable, que nous offrons aujourd'hui par la réforme des sciences, il faudra, comme nous en acceptons la tâche, que la Réforme de la Philosophie, que nous produirons dans le second tome de la présente Réforme générale du Savoir humain, donne, d'après les susdites trois conditions de la perfection logique, la solution, tout à la fois, rationnelle, rigoureuse, et accomplie, des vingt-un grands problèmes messianiques que nous avons rappelés plus haut, cette grave et décisive solution, de laquelle, comme nous l'avons remarqué déjà, dépendent manifestement les destinées suprêmes de l'homme, et par conséquent la direction de l'humanité vers cette fin absolue de son existence sur la terre. Et c'est précisément cette direction de l'humanité, en tout conforme à la doctrine du Messianisme, à cette doctrine absolue qui doit donner la solution des grands problèmes en question, c'est, disons-nous, cette impérative direction de l'humanité qui est précisément l'actuelle mission providentielle des nations slaves, cette haute mission que nous nous proposons ainsi de légitimer par la solution de ces difficiles et augustes problèmes messianiques. — Nous savons bien que cette doctrine absolue, de laquelle, comme nous venons de l'apprendre, dépend actuellement le sort de l'humanité, ne sera pas cultivée, ni peut-être même adoptée immédiatement par toutes les nations slaves. Mais, nous savons aussi que cette doctrine du messianisme est une partie intégrante et inséparable de la mission providentielle de ces nations, et par conséquent que, tôt ou tard, elle sera le drapeau de leur association messianique en Union-Absolue, en Sainte-Alliance !

Nous sommes même convaincus, par les conditions caractéristiques des nations slaves, qu'aussitôt qu'elles connaîtront la présente détermination didactique de leur haute mission providentielle, surtout d'après les principes qui sont exposés et déduits dans les *Prolegomènes du Messianisme*, toutes ces nations, sans en excepter aucune, attribueront à leur mot encore indéterminé de *Panslavisme*, et par conséquent à leur universelle tendance idéale et encore mystérieuse, la signification réelle que nous venons de leur dévoiler, celle d'une nouvelle et impérative

association morale pour préserver l'humanité de sa ruine imminente et surtout pour la diriger et la conduire vers ses destinées finales sur la terre, en écartant expressément de cette suprême association morale toute idée d'influence politique et d'influence religieuse, et en respectant ainsi loyalement l'autorité souveraine sous laquelle ces nations existent aujourd'hui. Nous osons même présumer assez de la vérité grave et toute-puissante des principes absolus dont il s'agit, pour croire que, lorsque cette détermination du destin des nations slaves, telle qu'elle est déjà exposée provisoirement dans les *Prologomènes* du Messianisme, et telle qu'elle le sera surtout dans le second tome de la présente Réforme du Savoir humain, lorsque, disons-nous, cette détermination didactique et positive parviendra à la connaissance de l'Empereur de Russie, de ce Protecteur providentiel des nations slaves, Sa Majesté ressentira vivement cette vocation céleste et reconnaitra même infailliblement ce saint et glorieux destin national. Aussi, quelle que soit la direction que, dans l'absence de cette haute détermination positive, on aurait pu assigner déjà au développement du puissant Empire de la Russie, ne pouvons-nous douter que son Souverain éclairé ne lui adjoigne, tôt ou tard, celle que la Providence lui a assignée pour le salut de l'humanité. Peut-être même déjà, comme tout le fait présumer, cette direction providentielle forme-t-elle au moins le principe de la secrète politique de la Russie. Ce n'est en effet que par cette supposition que l'on peut expliquer les paroles remarquables du ministre Uwarow, paroles qu'avec surprise nous avons citées dans les *Prologomènes* et que voici : « Il faut guérir la nouvelle génération russe de sa préférence pour la civilisation moderne de l'étranger. » — Toutefois, quelque profonde et peut-être infaillible que soit la conviction que portent par elles-mêmes ces vérités absolues, nous ne nous permettons que de les signaler au monde, ou plutôt nous ne faisons que remplir le devoir de rendre publiques ces vérités que Dieu nous a permis de reconnaître. Nous n'avons pas la folle prétention d'imposer nos idées aux nations : nous nous bornons à les soumettre à leur examen. Nous connaissons surtout et respectons trop l'autorité souveraine pour ignorer qu'à elle seule appartient le droit sacré de proclamer et de réaliser les vérités nouvelles. Aussi, après les avoir signalées à l'auguste attention de l'Empereur de Russie, nous ferons ici comme nous l'avons fait dans une autre occasion pareille, nous nous écarterons, avec un saint respect, du sanctuaire de sa conscience souveraine, où, recueillie en présence

de Dieu, Sa Majesté prononcera seule sur le sort des nations slaves, ou plutôt sur celui de l'humanité entière. Mais, nous ne pouvons, dans ce moment, cacher la profonde émotion que nous éprouvons à l'aspect de la grandeur personnelle de ce Monarque, et qui nous fait pressentir ses dispositions éclairées et salutaires. C'est en effet ce qu'attendent de Sa Majesté ses sujets, toutes les nations slaves, la postérité, et surtout l'Éternel, dont les saintes et mystérieuses lois sont maintenant dévoilées.

Pour ce qui concerne les autres nations, notamment, les modernes nations civilisées, on peut prévoir facilement l'opposition violente qu'elles feront contre le développement de cette mission providentielle des nations slaves. Mais, conformément à tout ce que nous venons d'apprendre, il est manifeste, par suite des conditions impératives de cette mission elle-même, que l'opposition qu'on fera ainsi, ne sera pas fondée et n'aura conséquemment aucune efficacité. Le seul moyen par lequel cette opposition pourrait devenir valide, serait que les nations civilisées présentassent elles-mêmes la solution des grands problèmes messianiques que nous venons de poser pour légitimer, par leur solution, l'actuelle mission urgente de diriger l'humanité vers ses destinées suprêmes, pour l'arracher à la présente confusion absolue et universelle des idées, où elle est prête à périr. Et par conséquent, dans le cas où les modernes nations civilisées ne pourront donner cette décisive solution, et elles ne le pourront pas certainement, il faudra bien qu'elles reconnaissent la mission nouvelle des nations slaves, où cette impérative solution sera donnée.

Mais, les peuples civilisés s'écrieront sans doute : « Que nous importent vos problèmes et leur solution ! » — Et ils nous confondront par les raisonnements irréfragables que voici :

« Vous savez bien, et vous le dites formellement, que nous sommes arrivés à ne plus croire à toutes ces rêveries métaphysiques. Et alors, c'est une contradiction de votre part de vouloir nous imposer la solution de ces rêveries. — Puisque vous êtes si savant sur les choses que vous croyez placées au-dessus de nous, vous devriez, d'après le proverbe que vous avez cité, *qui peut plus peut moins*, savoir mieux les choses qui nous concernent réellement et, hors desquelles, toutes vos argumentations n'ont aucun sens pour nous. — Nous allons vous les apprendre positivement et succinctement, en vous prévenant que nous ne reconnaissons que quatre réalités et que nous n'avons que sept problèmes que voici :

« Première Réalité. — La Vie naturelle. »

« *Problème I.* — La vie est le bien suprême de l'homme, et il doit conséquemment rechercher tous les moyens pour en jouir.

« *Problème II.* — Parmi ces moyens, celui de l'association des hommes est le principal, n'importe le motif par lequel on le rendra efficace.

« Deuxième Réalité. — L'Intérêt. »

« *Problème III.* — Tout homme a le droit d'agir d'après son intérêt ; et alors, pour qu'il n'y ait pas un conflit entre les intérêts des hommes, il faut une organisation politique de la société, organisation qui ne doit conséquemment avoir aucun autre objet que celui d'éviter ce conflit d'intérêts divers.

« Troisième Réalité. — La Vie surnaturelle. »

« *Problème IV.* — La vie humaine est soumise aux lois de la nature. Comme les autres êtres vivants, l'homme naît et meurt. Et puisque la vie est le bien suprême de l'homme (*Problème I*), il est conséquent pour l'homme de chercher à la prolonger autant que possible, même illusoirement au delà de la mort. — De là naît le besoin social de garantir, par une religion quelconque, cette illusion aux hommes timorés, à ceux qui n'ont pas la force de se soumettre volontairement aux lois de la nature. Et pour ceux qui croiraient réellement à cette vie future, et qui ne voudraient pas de religion, il faudrait leur garantir cette croyance mystique par la déclaration que l'État reconnaît l'Être-suprême et l'immortalité de l'âme. »

« Quatrième Réalité. — Sciences et Philosophie. »

« *Problème V.* — Les sciences physiques et techniques doivent, par l'expérience, rechercher les moyens, d'une part, pour augmenter les jouissances de la vie, et de l'autre, pour diminuer les maux qui en sont inséparables.

« *Problème VI.* — Les sciences morales doivent, également par expérience, chercher à découvrir, dans les relations sociales, quel est l'intérêt bien entendu des hommes.

« *Problème VII.* — Enfin, la philosophie doit, toujours par expérience,

« ce, découvrir les moyens de guérir finalement les susdits hommes
 « timorés de leur ILLUSION RELIGIEUSE, et provisoirement de s'en servir
 « pour arriver à l'intérêt bien entendu de toute l'humanité. »

« Voilà, poursuivront les peuples civilisés, nos problèmes et par con-
 « séquent la vraie civilisation. Aussi, sont-ce ces véritables problèmes
 « de civilisation que nous cherchons à résoudre, du moins nous, *hom-*
 « *mes du progrès*; car, les hommes rétrogrades qui sont parmi nous,
 « et que vous nommez *hommes stationnaires*, n'y pensent pas encore,
 « mais ils y viendront également, lorsque, d'après notre problème VII,
 « notre lumineuse philosophie les aura éclairés. — Eh bien, si vos na-
 « tions slaves peuvent nous donner la solution complète de ces sept
 « grands problèmes, nous les placerons à la tête de la civilisation.
 « Mais, toute autre solution, nous la repousserons par la supériorité de
 « nos moyens physiques, par nos sciences, et par notre philosophie.

« D'ailleurs, vos nations slaves ne demanderaient pas mieux que de
 « s'approprier aussi nos avantages de civilisation, si leurs gouvernements
 « despotiques ne les en empêchaient violemment. Patience, et ils y vien-
 « dront à leur tour, peut-être plus tôt qu'on ne s'y attend. Voyez vos
 « Slaves que l'exil a jetés parmi nous. Ils y ont bientôt oublié leur rude
 « nationalité; et ils se sont empressés d'entrer dans toutes nos voies et
 « errements de civilisation. Les uns se sont faits démocrates à outrance,
 « en allant jusqu'au communisme; d'autres se sont faits aristocrates,
 « également à outrance, en allant jusqu'au royalisme fictif; d'autres en-
 « fin, se sont livrés à toutes nos élucubrations révolutionnaires, ten-
 « jours à outrance, en allant jusqu'au mysticisme. Et parmi ces derniers,
 « parmi vos Slaves mystiques en exil, il y en a même qui, pour plaire
 « à nos théosophes civilisés, ont volé dans vos ouvrages le nom de
 « *Messianisme* et l'ont adapté à nos folles rêveries théosophiques, entre
 « autres, à la propagande d'une nouvelle religion, fondée sur une for-
 « melle destruction de toute science, en ravalant ainsi ce beau nom de
 « *Messianisme* au point qu'il ne fera plus fortune, non-seulement parmi
 « nos nations civilisées, mais pas même parmi vos nations slaves (*).

(*) Comme si un homme, en s'affublant des insignes religieux qu'il aurait dérobés,
 et des débris des bibliothèques que, par haine pour le savoir, il aurait voués à l'incen-
 die, pourrait en imposer au point de faire prévaloir, sur la science, la plus crasse igno-
 rance! — Et pour répondre à ces autres imitations de la civilisation moderne qu'on nous
 signale chez les exilés slaves, nous nous bornerons à faire remarquer que le plus grand
 nombre de ces Slaves en exil sont restés fidèles à leur sévère et glorieuse nationalité, en

« Que nous parlez-vous donc de répartition de destinées distinctes
 « entre les différentes nations ! — Il n'y a pour toutes les nations qu'une
 « seule destinée finale, celle de la civilisation, fondée sur la philoso-
 « phie anglaise du dix-huitième siècle, de laquelle sont résultés les prin-
 « cipes de la révolution française, ces principes infaillibles qui, comme
 « l'a prédit Mirabeau, feront le tour du monde. Voyez les Allemands,
 « qui, depuis si longtemps, se perdaient en spéculations métaphysiques
 « sur la religion, et qui, dès qu'ils ont entrevu les avantages suprêmes
 « de la liberté, ont bien vite oublié leurs oiseuses discussions théologi-
 « ques, pour venir, à leur tour, se ranger sous les principes révolu-
 « tionnaires de la liberté, ces Allemands surtout qui connaissent bien
 « l'histoire et qui doivent savoir que cette liberté politique a été conçue
 « par les hommes il y a plus de deux mille ans, parmi les nations
 « grecques et romaines, sans qu'elle ait pu alors suffire à l'humanité. »

A cette grave remontrance des peuples civilisés, nous ne nous per-
 mettrons, en forme de réplique, qu'une petite question, celle de savoir
 si la moderne liberté politique, renouvelée après deux mille ans, suf-
 fira à l'humanité mieux que ne lui a suffi l'ancienne et primitive li-
 berté politique des Grecs et des Romains, et si, pour sauver aujour-
 d'hui l'humanité de son actuelle confusion rationnelle, il ne faut pas,
 comme alors, quelque doctrine analogue à celle du christianisme, à
 cette doctrine divine qui l'a sauvée alors, quelque doctrine surtout qui
 émanerait du christianisme, où elle aurait été promise, et qui aurait
 conséquemment toute son efficacité ? — S'il en était ainsi, et les peup-
 les civilisés ne peuvent ne pas admettre cette hypothèse, puisque leurs
 orateurs déclarent que les sages forment leur prophétie par l'histoire,
 qu'arriverait-il alors ? — Il arriverait, pour le moins, ce que l'histoire
 nous apprend sur les événements qui ont accompagné l'introduction et
 l'établissement du christianisme, au milieu de l'ancienne haute civilisa-
 tion des Grecs et des Romains. En effet, la moderne civilisation serait
 vaincue à son tour, même beaucoup plus facilement ; et alors, d'après

présentant trop vivement leurs hautes destinées futures pour vouloir y déroger par de
 telles imitations étrangères. Nous n'aurions pas assez de place ici pour citer les noms
 illustres de tous ceux qui, pour le moins, déplorent, chez le petit nombre de leurs com-
 patriotes privés de haute instruction, ces imitations scandaleuses et si compromettantes
 pour la mission providentielle des nations slaves.

l'annonce du divin fondateur du christianisme, l'humanité, en parvenant à la VÉRITÉ ABSOLUE qu'il lui a promise, accomplirait le christianisme et triompherait définitivement. — Nous disons que, cette fois-ci, la victoire serait beaucoup plus facile, parce que l'intervalle des martyrs, pour arriver à Constantin-le-Grand, n'existerait plus aujourd'hui, et parce que les nations slaves, qui apporteraient et défendraient les VÉRITÉS ABSOLUES, seraient assez puissantes pour les établir sur la terre, puisque déjà elles ont été assez puissantes pour préserver récemment l'humanité de la ruine dont elle était menacée par le triomphe des dites doctrines des peuples civilisés. D'ailleurs, le prestige de ces doctrines civilisées est disparu actuellement : les grands mots de progrès, de lumières, de sciences, de philosophie, de liberté, de paix, de triomphe de la raison, de conquêtes de la vérité, etc., etc., n'ont plus aujourd'hui aucun sens, ou plutôt, comme nous venons de le démontrer dans cette Adresse aux nations slaves, ces grands mots ont aujourd'hui un sens tout à fait contraire.

Il ne reste donc, pour la défense de ces doctrines civilisées, rien autre que la prétendue puissance moderne qu'on nomme *Opinion publique*, puissance qui n'est notoirement rien de plus que la manifestation périodique, dans les journaux, des opinions personnelles et même anonymes des rédacteurs de ces journaux. Eh bien, ces opinions personnelles ne peuvent précisément être fondées que sur les doctrines civilisées qu'elles cherchent à défendre; et alors, elles n'ont pas plus de valeur ni par conséquent de puissance que ces doctrines elles-mêmes. Il suffira donc, pour paralyser leur influence, de dévoiler, journalièrement aussi, dans les nouveaux écrits périodiques que nous avons signalés plus haut, l'absurdité de ces manifestations journalières de la prétendue Opinion publique. Et certes, il n'y a maintenant rien de plus facile; car, il ne s'agit plus que de dévoiler l'erreur, lorsqu'on possède déjà la vérité. — D'ailleurs, quelle est au juste la valeur logique de ces opinions personnelles des journalistes dont on voudrait faire l'Opinion publique? — Ce sont, comme le dit le mot, de simples *opinions*, c'est-à-dire, de simples présomptions sur la vérité, qui sont loin de la conviction, et surtout très-loin de la certitude. Ce sont donc ces *opinions* des journalistes, dépourvues de toute certitude, qui forment cette redoutable puissance moderne par laquelle est actuellement gouverné le monde civilisé! — Et qui sont ces journalistes? — Ce sont généralement de simples littérateurs, qui ne connaissent que la grammaire et

le dictionnaire, et qui parfois, mais très-rarement, sont, tout au plus, des hommes instruits dans des connaissances purement historiques; car, de véritables savants, en sciences morales comme en sciences physiques, qui se vouent à la recherche de la vérité dans ces différentes branches du savoir humain, et qui les enrichissent de leurs découvertes, produisent ces découvertes dans de durables ouvrages méthodiques, et ne descendent pas jusqu'au public qui lit les journaux. — Quels sont en effet les lecteurs des journaux? — A l'exception des nouvelles du jour que tout le monde peut avoir besoin de connaître, les véritables lecteurs des journaux, ceux qui y lisent ce que l'on nomme les *articles de fond*, c'est-à-dire, les articles soi-disant philosophiques sur la politique, sur la religion, sur les sciences et même sur l'industrie, sont nécessairement des hommes moins instruits que les auteurs de ces articles. Et nous venons de voir quelle est la qualité, scientifique et surtout philosophique, de ces auteurs ou rédacteurs des journaux. — Or, ce sont là, dit-on, ces rédacteurs des journaux et ces lecteurs de journaux qui forment actuellement le monde civilisé, et qui, dans leur réaction intellectuelle, constituent l'Opinion publique, cette prétendue puissance moderne qui gouverne le monde!

Mais, quand même, comme on voudrait le faire accroire, l'Opinion publique serait la manifestation des pensées de toute une nation, la question resterait la même, car il s'agirait toujours de savoir si ces pensées de toute une nation sont vraies ou fausses? — En effet, la pluralité des voix n'est pas un critérium logique pour distinguer la vérité des principes des connaissances humaines; elle suffit à peine, comme le prouve le calcul des probabilités, à distinguer la vérité des *faits*, c'est-à-dire, des objets des connaissances humaines. La découverte des principes des connaissances humaines est toujours le résultat de l'acte spontané de la raison absolue d'un seul individu; et elle ne peut conséquemment être l'ouvrage de la multitude, parce que la création d'une idée, comme création, est, dans son essence propre, un acte absolument individuel, le principe même de l'individualité. Sans doute, lorsque les principes des connaissances humaines sont ainsi découverts par des individus, ils peuvent être communiqués à la multitude, à des nations entières. Mais, cette communication nationale ne saurait manifestement ni amplifier la vérité, ni rectifier la fausseté de ces prétendus principes des connaissances humaines, conçus par des individus et communiqués à la multitude. Bien plus, lorsque ces principes favori-

sent les intérêts et flattent les passions de la multitude, ils dégénèrent toujours dans leur communication à cette multitude; de sorte qu'au lieu de présenter un critérium de la vérité, la pluralité des voix est presque toujours, pour les principes des connaissances, et surtout pour des principes pratiques, du moins pour ceux qui n'ont pas le caractère impératif de la nécessité morale, un critérium logique de la fausseté de ces principes. — Ainsi, l'Opinion publique, en l'étendant au-delà du cercle des journaux, et en l'attribuant à une nation tout entière, serait encore plus suspecte et plus dangereuse, parce qu'il n'existerait plus aucun contrôle national pour discerner l'erreur de la vérité, et parce qu'alors on pourrait plus facilement, et tout à son aise, exploiter la crédulité de la nation (*).

Après cette déduction générale de l'Opinion publique, nous pouvons nous dispenser de nommer nous-mêmes son CARACTÈRE MORAL. Nous nous bornerons donc à la signaler comme étant évidemment et nécessairement la source de la CONFUSION RATIONNELLE qui domine aujourd'hui tous les peuples civilisés et qui les conduit ainsi à une ruine inévitable. Et nous ferons remarquer que le seul, ABSOLUMENT LE SEUL moyen de préserver l'humanité de cette ruine imminente et inévitable, consiste dans la susdite constante RÉDUCTION À L'ABSURDE de toutes les manifestations de cette prétendue Opinion publique, en lui opposant des écrits périodiques ou des journaux, fondés sur des VÉRITÉS ABSOLUES, et destinés à introduire et à faire ainsi triompher ces vérités supêmes dans le monde, afin de conduire l'humanité à ses finales et augustes destinées sur la terre.

Nous ne doutons pas que si, parmi nos contemporains, il se trouve des hommes qui, par tout ce que nous dévoilons dans la présente Adresse aux nations slaves, comprennent, tout à la fois, et le danger imminent de l'humanité par suite du développement progressif des doctrines des nations civilisées, et le salut que présentent les vérités absolues de la doctrine du messianisme, ces hommes supérieurs ne reconnaissent que le moyen prompt d'écarter ce danger, est celui que nous signalons dans l'opposition périodique, dans cette opposition décisive que, par des journaux messianiques, il faut établir actuellement contre les manifestations périodiques de la prétendue Opinion publique elle-même.

(*) C'est par cette raison que nous nous dispensons généralement de répondre aux insultes des journaux.

les nations civilisées. Et si malheureusement il ne se trouvait pas aujourd'hui de tels hommes supérieurs, il ne faudrait pas néanmoins désespérer du salut de l'humanité, parce que l'existence providentielle des nations slaves suffirait, un peu plus tardivement sans doute, pour la préserver de la ruine qu'on lui prépare. En effet, quelque lent que soit peut-être ce moyen providentiel, il sera inmanquable, car c'est l'ouvrage de Dieu.

En terminant cette Adresse aux nations slaves, nous devons ici exprimer la profonde reconnaissance que son auteur porte à tous les hommes qui, par leur bienveillance, ont facilité ses travaux. Et c'est à ce titre qu'avant tout, il présente ici son hommage à la France, comme marque de gratitude pour la longue hospitalité qu'il a reçue dans ce noble pays. — Dans le second tome de cette Réforme du Savoir humain, lorsqu'il aura accompli la grande tâche présente, et lorsqu'il aura ainsi la conviction d'avoir, par ses travaux, contribué au bien de l'humanité, il prendra la liberté de nommer, malgré lui, l'homme honorable et bienveillant qui l'a aidé dans ses travaux, et à qui, s'il en résulte réellement quelque bien public, la postérité le devra principalement. Il n'oubliera pas non plus de signaler de même à la reconnaissance publique tous les autres hommes bienveillants qui lui ont prodigué leurs services, et qui ont ainsi contribué grandement à l'accomplissement de ses travaux.

Paris, le 15 août 1847.

ANTICIPATION SUR LE TOME II

DE CETTE RÉFORME DU SAVOIR HUMAIN.

Pour rassurer les hommes de bien qui auraient compris l'urgence actuelle de réaliser les présentes vérités absolues, et qui craindraient que le concours des nations slaves ne soit trop tardif, en considérant

l'extrême gravité de la confusion morale et intellectuelle qui domine déjà les nations civilisées, nous devons, par anticipation sur le second tome de cette Réforme du Savoir humain, les prévenir que tous les grands et urgents intérêts de l'humanité sont déjà vivement sentis, et par conséquent garantis suffisamment par les principaux Souverains du monde civilisé. Nous ne pouvons caractériser mieux cette universelle garantie souveraine, qu'en reproduisant ici, avec leurs motifs indiqués dans nos ouvrages antérieurs, la dédicace qui est à la tête du second tome de la présente Réforme du Savoir humain, et par laquelle nous faisons hommage de ces hautes vérités aux Souverains auxquels nous osons attribuer ainsi ces augustes pressentiments, d'après ce que nous y démontrons positivement sur les différentes destinées des nations européennes. — Voici cette dédicace.

A Sa Majesté l'Empereur de Russie et Roi de Pologne, comme Protecteur providentiel du destin messianique des Nations slaves.

Voyez les *Prolégomènes du Messianisme*, pages 523 à 546.

A Leurs Majestés l'Empereur d'Autriche et le Roi de Prusse, comme Garants réciproques du destin religieux des Nations germaniques.

Voyez les *Prolégomènes du Messianisme*, pages 513 à 523.

Aux mânes de l'Empereur Napoléon, comme Révéléateur du destin politique des Nations romaines, et principalement du haut destin de la France.

Voyez, dans les *Prolégomènes du Messianisme*, leur Introduction, pages 7 à 40; et dans la *Métapolitique messianique*, le Secret politique de Napoléon, pages 211 à 239, surtout le Tableau génétique de l'autorité politique, pages 261 et 262.

A Sa Majesté le Roi des Français, comme Modérateur politique dans la présente Époque critique de l'humanité.

Voyez, dans les *Prolégomènes du Messianisme*, leur susdite Introduc-

tion, pages 7 à 40, ainsi que le Programme du Destin de la France, pages 508 à 513; et dans la *Métapolitique messianique*, la Conclusion finale, pages 247 et suivantes, surtout l'Épître à Sa Majesté Louis-Philippe, pages 3 à 15, dans laquelle se trouve établi irréfragablement, ce nous semble, le PRINCIPÉ ABSOLU de ce que, dans l'actuelle absence de tout but providentiel de l'humanité, aucune combinaison politique, indépendante des lois impératives et par conséquent divines de la morale, ne peut ni ne doit être considérée comme valide légalement, si elle n'est pas fondée expressément sur la connaissance positive et préalable des DESTINÉES FINALES ET ABSOLUES de l'homme sur la terre.

PRINCIPÉ CONTRE-RÉVOLUTIONNAIRE.

Toute combinaison politique, réalisée par des hommes en dehors de l'autorité souveraine, peut n'être qu'une ERREUR, lorsqu'on ignore encore qu'à toute combinaison pareille doit présider la connaissance préalable des destinées finales et absolues de l'humanité sur la terre. Et, comme fait accompli, elle peut alors devenir légale par la sanction des autres Souverains. — Mais aujourd'hui, lorsque enfin se trouve dévoilée cette nécessité de connaître préalablement les destinées finales de l'homme, d'après lesquelles seules doit désormais s'établir toute détermination sociale, il est manifeste que des combinaisons politiques, tramées et réalisées ainsi en dehors de l'autorité souveraine, en se dispensant de cette connaissance préalable, seront, pour le moins, des FOURBERIES; et elles ne pourront devenir légales par aucune sanction quelconque. — Dieu plus, vouloir maintenant étouffer par le silence, à l'aide des journaux ou d'autres moyens quelconques, ce principe fondamental et irréfragable, ce serait une véritable ESCROQUERIE PUBLIQUE, qui aurait pour objet de pouvoir impunément exploiter la nation par l'ignorance et par des révolutions.

PREMIÈRE DIVISION.

ACCOMPLISSEMENT FINAL DES SCIENCES.

PAR LA RÉFORME

DES MATHÉMATIQUES.

OUVRAGES SCIENTIFIQUES DE L'AUTEUR.

1. — Philosophie des Mathématiques (1811).
2. — Résolution générale des Equations de tous les degres (1812).
3. — Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange (1812).
4. — Philosophie de l'Infini (1814).
5. — Philosophie de la Technie algorithmique; première section, contenant la Loi suprême des Mathématiques (1815).
6. — *Idem*; seconde section, contenant les Lois des Séries, comme préparation à la Réforme des Mathématiques (1816 et 1817).
7. — Critique de la Théorie des fonctions génératrices de Laplace, contenant, pour le cas fondamental, l'intégration générale des équations aux différences et aux différentielles, totales et partielles, de tous les ordres (1819).
8. — Introduction à un Cours de Mathématiques (en anglais), offrant un aperçu de la présente réforme des Mathématiques (1821).
9. — Canons de Logarithmes, où est donnée la solution de l'équation du cinquième degré (1827).
10. — Loi téléologique du Hasard, comme base de la réforme du Calcul des Probabilités (1833).
11. — Nouveaux Systèmes de Machines à vapeur, contenant les nouvelles lois physiques (1834 et 1835).

Not. A l'exception du dernier, ces ouvrages, constituant la préparation à la Réforme des Mathématiques qui est produite dans l'ouvrage présent, n'existent plus. — Ils ont été détruits en France.

RÉFORME DES MATHÉMATIQUES,

COMME PROTOTYPE

DE LA

REFORME GÉNÉRALE DES SCIENCES,

ET COMME GARANTIE PRÉALABLE

DE LA RÉFORME DE LA PHILOSOPHIE.

RENDUE URGENTE PAR LES GRAVES ERREURS, SCIENTIFIQUES, POLITIQUES,
RELIGIEUSES ET PHILOSOPHIQUES, QUI CAUSENT LE PÉRILLEUX
DÉSORDRE ACTUEL DU MONDE CIVILISÉ.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA RÉFORME DES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

Programme scientifique pour l'accomplissement final de la Réforme des Mathématiques.

DEUXIÈME PARTIE.

Réforme des Mathématiques, comme prototype de la Réforme générale des Sciences et de la Philosophie.

TROISIÈME PARTIE.

Manifeste historique concernant la Réforme des Mathématiques, comme transition à la Réforme de la Philosophie (*); suivi de l'exposition des graves erreurs mathématiques de l'Académie des sciences de Paris.

COMPLÉMENT.

Accomplissement historique et didactique de la Réforme des Mathématiques, dans leurs parties pures et appliquées.

(*) Ce Manifeste historique est produit à la fin de la Réforme de la Philosophie (tome II); et il paraît en partie aujourd'hui, en même temps que la présente Réforme des Mathématiques, dans l'ouvrage intitulé : *Résolution générale des Equations algébriques de tous les degrés.*

AVIS.

N'ayant pu produire méthodiquement cette Réforme des Mathématiques, parce que nous ne pouvions d'abord disposer du temps et de l'espace nécessaires pour cette production tout entière, nous en avons présenté les parties distinctes, les unes après les autres, à mesure que les circonstances nous ont permis de le faire ainsi successivement. Mais le tableau génétique de ces sciences, qui, suivant la loi de création elle-même, se trouve donné au commencement de cette Réforme, offre, d'une manière générale, non-seulement la liaison ou la connexion méthodique, mais de plus la génération progressive de ces parties distinctes des mathématiques; et il découvre ainsi leur véritable et même absolue dépendance réciproque. — En outre, dans un Complément étendu, nous avons, autant que cela a été nécessaire, développé ultérieurement et accompli ainsi toutes les parties de cette Réforme des Mathématiques, en y ajoutant aux mathématiques pures, les branches principales des mathématiques appliquées, nommément la solution des trois grands problèmes du monde physique, de ces problèmes qui, par l'extension que nous leur découvrons à priori, forment proprement les véritables sciences physiques. — Nous pouvons ainsi considérer la présente Réforme des Mathématiques, en tout ce qui concerne ses conditions scientifiques, comme étant entièrement accomplie, surtout dans les principes premiers de cette grande réforme, et par conséquent, dans ses lois fondamentales et dans ses méthodes absolues.

Quant aux conditions philosophiques de la présente Réforme des Mathématiques, il faut les étudier dans le second tome de cette Réforme générale du Savoir humain, nommément, dans la Réforme de la Philosophie, surtout pour ce qui concerne l'intelligence de la Loi de création, qui préside à cet accomplissement scientifique. — A la vérité, pour préparer le lecteur à la connaissance de cette loi primor-

diale, nous en présentons ici une déduction provisoire, qui au reste suppose déjà, à certains égards, la connaissance de notre philosophie absolue. Mais, pour arriver à la connaissance parfaite de cette universelle loi de création, il faudra, dans le second tome, la déduire de l'acte même de la création de l'Univers, principalement de l'acte de la création propre de Dieu, où elle s'établit par elle-même, c'est-à-dire, par l'acte même de cette primordiale et suprême création propre.

Toutefois, les géomètres qui ne sentiront pas le besoin de remonter aux principes philosophiques de leur science, trouveront, dans la présente Réforme des Mathématiques, comme nous venons de le dire, toutes les conditions purement scientifiques pour l'accomplissement de leur science et, par conséquent, les lois fondamentales et les méthodes nécessaires pour la solution de tous leurs problèmes.

ERRATA.

POUR LA RÉFORME.

Pages. Lignes.

- 15, 8; qui formera le troisième, *lisez* qui formera le cinquième.
 16, 12; ou de modifier, *lisez* ou modifier
 19, 30; et $(233)'''$, *lisez* et $(232)'''$,
 56, 21; il a de donné, *lisez* il y a de donné,
 59, 10; dérive, *lisez* dérivent
 88, 5; $\mathbb{Z}$, *lisez* $\mathbb{Z}_2$,
 92, 2; dans la formule (53), mettez $(\mathfrak{C} - 1)$ à la place de l'exposant
 $(\mathfrak{C} + 1)$.
 111, 5; quantité Q , *lisez* quantité Q'' ,
 137; la sixième puissance de 93 doit être 646 999 183 449.
 149, 17; dont les résidus x , *lisez* dont les racines x ,
 189, 1; qui entre, *lisez* qui entrent
 204, formule (335); S_μ , *lisez* S_μ
 277, formule (582); $\mathbb{A}_1$, *lisez* $\mathbb{A}$,
 300, deuxième formule (635).

$$\frac{(\mathfrak{C}-1)}{1} \cdot \frac{R(\mathfrak{C})_0}{R(\mathfrak{C})_a}, \quad \text{lisez} \quad \frac{(\mathfrak{C}-1)}{1} \cdot (x-a)^{-a} \cdot \frac{R(\mathfrak{C})_0}{R(\mathfrak{C})_a},$$

- 317, 38; ou X_1, X_2, X_3 , etc., est un nombre, *lisez* où X_1, X_2, X_3 ,
 etc., constituent un nombre

328, formule (695); $\frac{1}{3 \cdot a^4}$, *lisez* $\frac{1}{3 \cdot a^3}$,

335, formules (717); $P(3) =$, *lisez* $P(3) =$

- 366, formule (749); à la place du zéro, mettez $(1-a) \cdot e^A$, r étant une
 quantité arbitraire, et e la base des logarithmes naturels.

- 367, formule (749); à la place du zéro, mettez la quantité e^A
Idem, formule (749); au second membre de cette égalité, ajoutez le terme

$$+ \frac{e^A}{r \cdot (r-\beta) \cdot (r-\delta)}.$$

- 371, formule (753); au second membre de cette égalité, ajoutez le terme
 $+ (a-1) \cdot e^A.$

- Idem*, formule (753); au second membre, ajoutez $-e^A.$

- Idem*, formule (753); au second membre, ajoutez $+ 1^{11} - 1 \cdot e^{12}.$

Pages. Lignes.

Idem, formule (755); aux seconds membres de ces égalités, ajoutez respectivement les termes $+(u-1) \cdot e^{ux}$, et $+1^{u-1} \cdot e^{ux}$.

Idem, formules (755); aux seconds membres de ces égalités, ajoutez respectivement les termes $-e^{ux}$ et $+1^{u-1} \cdot e^{ux}$.

373, formule (757); aux seconds membres de ces égalités, ajoutez respectivement les termes

$$+ \frac{r \cdot e^{\frac{r}{\beta}} \cdot d\frac{r}{\beta}}{r \cdot (r-\beta) \cdot (r-6)}, + \frac{r^2 \cdot e^{\frac{r}{\beta}} \cdot d\frac{r}{\beta}}{r \cdot (r-\beta) \cdot (r-6)}, + \frac{r^3 \cdot e^{\frac{r}{\beta}} \cdot d\frac{r}{\beta}}{r \cdot (r-\beta) \cdot (r-6)}, \text{ etc., etc.}$$

375, dans la troisième des formules (759),

$$3 \cdot \left(\frac{dx}{d\frac{r}{\beta}} \right)^2 - ; \quad \text{lisez } 3 \cdot \left(\frac{d^2x}{d\frac{r}{\beta}} \right)^2 -$$

POUR LE COMPLÉMENT.

Pages. Lignes.

xvj, formule (553); $(\mathbb{P}_{n-1})^2$, lisez $(\mathbb{P}_{n-1})^3 \cdot x$

xxj, pagination xx, lisez xxj.

xxvii, dernière ligne; $[\Lambda_r^*]$, lisez $[\Lambda_r^*]$

lxx, deux dernières lignes; lisez P_4 et P_5

xcvii, formule (847); ajoutez + avant le dernier terme.

cij, formule (852); *idem*.

cxj, troisième formule (881); $= 4 \cdot f_0 x \cdot f_3 x$, lisez $= 4 \cdot f_0 x \cdot f_3 x$.

cxcv, deuxième formule (241); Pour plus d'exactitude, à la place de x^2 , mettez $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \text{etc.})$, en supposant que $x = (x_1 + x_2 + x_3 + \text{etc.})$.

ccxvj, 29; ce sont, les variations; ôtez la virgule.

ccxxvi, 23; qu'il faudra, lisez qu'il faille.

ccxxvii, Post-scriptum, l. 7; pariel, lisez pareil.

cccx, formule (17); $\frac{1}{r}$, lisez $\frac{1}{r}$.

cccliv, ajoutez le facteur $[\mu]$ au numérateur des trois formules (84), (86) et (88).

PREMIÈRE PARTIE

PROGRAMME SCIENTIFIQUE

POUR L'ACCOMPLISSEMENT FINAL

DE LA RÉFORME DES MATHÉMATIQUES.

Dans les *Prologomènes du Messianisme*, qui ont paru l'année dernière, et qui, en outre de leurs déterminations théoriques, présentent, comme résultat pratique, la détermination péremptoire du destin de la France, de l'Allemagne, et de la Russie, dans ces décisifs *Prologomènes*, disons-nous, la réforme des mathématiques, que nous allons ici accomplir finalement par la résolution de tous les grands problèmes de cette science, se trouve alléguée comme garantie scientifique de la philosophie absolue que produit enfin la doctrine du Messianisme. Et à ce titre, l'histoire de la présente réforme scientifique, ses parties constitutives, les trois lois fondamentales auxquelles elle ramène les mathématiques, comme modèle de la réforme pareille et définitive de toutes les sciences, les grands problèmes qu'elle a résolus avec ces lois et dont nous allons précisément donner l'accomplissement final, enfin, comme document historique de son apparition dans le monde, le singulier accueil qu'elle a reçu en France, où tous les ouvrages (6 à 7 volumes in-4°) qui l'ont fait connaître dans ce pays, ont été détruits publiquement, et l'indigne spoliation de l'auteur que cet exemplaire accueil en France, pour ne pas dire davantage, lui a provoqué en Angleterre, tous ces objets distinctifs de la réforme dont il s'agit, sont indiqués, avec assez de détail, dans les *Prologomènes* que nous venons de citer. — Nous pouvons donc nous dispenser de caractériser ici davantage cette inattendue réforme des mathématiques que nous allons accomplir. Nous nous bornerons à signaler les grands problèmes qui, jusqu'à ce jour, sont demeurés non résolus et que, par l'application des lois nouvelles et universelles qu'elle donne à la science, nous allons résoudre complètement pour montrer ainsi la toute-puissance de ces lois messianiques et, par conséquent, la haute importance de cette réforme des mathématiques.

Pour procéder avec méthode, nous classerons ici les problèmes en question d'après les trois lois nouvelles par l'application desquelles nous pourrions définitivement donner la solution respective de ces problèmes, d'après ces trois lois fondamentales auxquelles, comme nous venons de le dire, la présente réforme des mathématiques ramène toute cette science. Et pour l'intelligence philosophique de ces trois lois, qui sont maintenant données complètement, savoir, les deux premières, dans nos ouvrages mathématiques, et la troisième dans l'ouvrage présent, le lecteur doit, avant tout, recourir aux susdits *Prologomènes* du Messianisme, où il verra leur origine supérieure, leur véritable sens, et leur application finale, non-seulement pour la présente science du géomètre, mais généralement pour toutes les branches du savoir humain, pour toutes les sciences, et même pour la philosophie. Il y reconnaîtra en outre que, comme telles, ces trois lois messianiques qui, dans chaque branche du savoir humain, forment respectivement sa *Loi suprême*, son *Problème-universel*, et sa *Loi téléologique* (loi de finalité), doivent présider à une réforme définitive de toutes les sciences, même de la philosophie, à l'instar de la présente réforme des mathématiques, opérée par ces mêmes lois messianiques. Et il y verra la raison pour laquelle ces trois lois, telles qu'elles président à la présente réforme des mathématiques, et telles qu'elles sont reproduites au frontispice de cet ouvrage, constituent l'emblème de tout le savoir humain, de toutes les sciences, et surtout de la philosophie absolue que produit enfin la doctrine du Messianisme.

Or, en considérant séparément ces trois lois universelles des mathématiques, et en n'examinant d'abord que la branche principale de leurs parties pures, nommément l'Algorithmie, qui est la base de toute cette grande science, voici les problèmes que nous allons résoudre à l'aide de ces lois messianiques, problèmes dont les géomètres ont désespéré jusqu'à ce jour.

1^{re} CLASSE. — LOI SUPRÊME.

La forme de cette loi suprême des mathématiques est notoirement.....(1)

$$Fx = A_1.\Omega_1 + A_2.\Omega_2 + A_3.\Omega_3 + A_4.\Omega_4 + \text{etc. etc.}$$

Dès 1810, pour annoncer notre réforme des mathématiques, nous avons fait connaître cette loi à l'Institut de France. Les commissaires, nommés pour l'examiner, déclarèrent que cette loi a excité leur surprise. Voici leurs paroles :

- « Mais, ce qui a frappé vos commissaires dans le *Mémoire* de
- « M. Wronski, c'est qu'il tire, de sa formule, TOUTES celles que l'on
- « connaît pour le développement des fonctions (c'est-à-dire, TOUTES
- « LES MATHÉMATIQUES MODERNES), et qu'elles n'en sont que des CAS
- « TRÈS-PARTICULIERS. »

Signés : LAGRANGE et LAPLACE.

Dans la *Philosophie des Mathématiques*, publiée en 1811, nous avons signalé, sous la marque (xxii), cette loi suprême et ses conditions absolues; et nous avons annoncé que nous la ferions connaître dans la nouvelle branche des mathématiques, la *technie de l'algorithme*, qui a pour objet les lois de la génération universelle des quantités, branche à laquelle se réduisent principalement les mathématiques modernes. En effet, dans la *Philosophie de la Technie algorithmique*, publiée de 1815 à 1817, nous avons établi péremptoirement cette loi suprême des mathématiques, et donné définitivement sa démonstration rigoureuse. — Aussi, dès alors, la réforme des mathématiques, ayant pour objet, d'abord, la découverte de leurs lois fondamentales, de ces lois qui demeuraient inconnues, et ensuite, l'application de ces lois à la solution de tous les grands problèmes des mathématiques, de ces problèmes que la science actuelle ne peut résoudre, fut-elle fondée péremptoirement. La simple inspection de cette loi suprême, dans laquelle les quantités Ω , Ω , Ω , Ω , etc., sont des fonctions arbitraires, suffisait pour faire comprendre, avant toute application spéciale, que tous les modes concevables de la génération des quantités ou d'une fonction quelconque Fx , sont dévoilés et fixés dans cette loi suprême. Et le développement scientifique de cette première et principale loi fondamentale, tel que nous l'avons produit dans la *Philosophie de la Technie* et antérieurement dans la *Philosophie des Mathématiques*, confirma cette prévision. — Ainsi, pour ce qui concerne d'abord les lois fondamentales des mathématiques, constituant la première partie de leur réforme, dans le premier tome de la *Philosophie de la Technie*, sous les marques (51) et (53), nous avons déduit de la présente loi fondamentale, c'est-à-dire, de la présente loi suprême, la seconde loi fondamentale, constituant le PROBLÈME-UNIVERSEL des mathématiques, dont nous avons déjà donné, par anticipation, la solution définitive et générale dans la *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, sous les marques (13), (14) et (15); et, d'après le sens philosophique de la présente loi suprême, sens que nous avons dévoilé dans les *Prolegomènes du Messianisme*, comme consistant dans le principe absolu des mathématiques, c'est-à-dire, dans l'IDENTITÉ PRIMITIVE de leurs éléments primordiaux, du fini et de l'infini, cette loi suprême a offert ces éléments primordiaux à la loi de création, par laquelle, dans notre *Philosophie des Mathématiques*, nous avons déduit antérieurement toutes les lois générales, et parmi elles la troisième loi fondamentale des mathématiques, constituant la loi rétrospective de la finalité entre leurs éléments hétérogènes, le fini et l'infini. Et pour ce qui concerne ensuite la solution de tous les grands problèmes des mathématiques par l'application de ces trois lois fondamentales, solution qui constitue la seconde partie de la réforme dont il s'agit, c'est là précisément l'objet de ce Programme.

Or, en ne considérant ici, en premier lieu, que les problèmes dont la

solution s'opère immédiatement par l'application de la loi suprême elle-même, ce sont, d'une part, les problèmes de toute la techné algorithmique, constituant principalement les mathématiques modernes, et de l'autre part, les problèmes qui ont pour objet l'accomplissement de la théorie, constituant l'avénir ou la nouvelle période historique des mathématiques. — Pour ce qui concerne d'abord les problèmes techniques, qui, d'après ce que nous avons vu dans les susdits ouvrages mathématiques, et récemment dans les *Proligomènes du Messianisme*, embrassent les algorithmes techniques des séries, des fractions continues, des facultés exponentielles, des produits continues, de l'interpolation et du canon algorithmique, nous en avons déjà donné la solution complète dans notre *Philosophie de la Techné algorithmique*, où, pour cette solution, nous avons déduit, de la loi suprême, les lois de tous les modes possibles de ces diverses générations techniques. Et déjà même, dans le Mémoire où, en 1810, nous avons fait connaître à la première classe de l'Institut de France notre loi suprême comme principe universel des mathématiques, avions-nous déduit, de cette loi suprême, toutes les lois ou formules connues pour ces diverses générations techniques qui, comme nous venons de le dire, constituent les mathématiques modernes. — Pour ce qui concerne ensuite les nouveaux problèmes théoriques dont la solution doit accomplir la science et former une nouvelle période historique pour les mathématiques, ce sont les deux grands problèmes qui ont pour objets respectifs, l'un, la génération théorique-absolue des quantités, et l'autre, leur génération relative-absolue, en considérant, sous le nom de *génération-neutre*, cette espèce de génération des quantités où se confondent la génération théorique, servant à déterminer leur nature algorithmique, et la génération technique, servant à déterminer leur valeur numérique; espèce que nous avons fait connaître, en détail, vers la fin du second tome de la *Philosophie de la Techné*. Et la solution de ces deux décaïfs problèmes, qui doit accomplir la science en donnant les moyens pour la solution de tous les grands problèmes des mathématiques, a été déduite de la loi suprême, comme nous allons le montrer, dans la *Philosophie de la Techné*, où nous avons déjà donné, par la même loi suprême, comme nous venons de le dire, la solution de tous les problèmes purement techniques. — En effet, pour ce qui concerne d'abord celui des deux problèmes en question qui a pour objet la génération-théorique absolue des quantités, pour déterminer leur nature algorithmique, et non simplement leur valeur numérique, nous en avons donné la solution générale, sous les marques (142), (143), (144), etc., dans le premier tome de la *Philosophie de la Techné*, en y déduisant, de la loi suprême, la génération théorique et progressive de toute quantité, génération progressive qui, lorsque les équations différentielles (142)', (143)', (144)', etc., dont elle dépend, sont intégrables, est finie, et qui, lorsque ces équations ne sont pas intégrables, est indéfinie, mais toujours accom-

plie et de plus en plus exacte à volonté. C'est ainsi et uniquement ainsi que s'établit universellement toute génération, finie ou indéfinie, des quantités ou des fonctions quelconques, proposées, soit par des différences, des différentielles, ou par toutes autres de leurs conséquences algorithmiques, soit par des équations, immanentes ou transcendentes, primitives ou dérivées, aux différences ou différentielles, totales ou partielles, soit enfin par toutes autres conditions algorithmiques. Pour bien concevoir cette origine ou ce principe de la génération, finie ou indéfinie, des quantités ou des fonctions problématiques quelconques, il faut savoir qu'il existe un certain nombre déterminé d'algorithmes ou de fonctions algorithmiques, tels que *sommes, produits, puissances, numérations* (*), *facultés, logarithmes, sinus, etc.*, etc., qui, comme bases de la science, constituent les parties élémentaires et les parties systématiques de toute l'algorithmie, et qui seules, par leur combinaison, peuvent former d'autres quantités ou fonctions propres à satisfaire à des conditions algorithmiques proposées. Nous disons que le nombre de ces algorithmes fondamentaux, dont peuvent se composer toutes les autres fonctions algorithmiques, est *éternel*; car, ce sont précisément ces algorithmes fondamentaux qui proviennent de la susdite application de la loi de création aux deux éléments primordiaux, le fini et l'infini, que la loi suprême donne à la science; et comme on le voit dans le tableau génétique de l'algorithmie, développé ainsi par la loi de création, tableau que nous avons reproduit et complété dans les *Protégomènes du Messianisme* (pages 219 et suiv.), les algorithmes fondamentaux en question, qui proviennent de cette application de la loi de création, et qui ne sauraient évidemment provenir de rien autre au monde, sont effectivement en nombre déterminé et équivalent au nombre des branches principales dans lequel la loi de création peut développer tout système de réalités. Quant à la combinaison de ces algorithmes fondamentaux; par laquelle s'engendrent toutes les autres fonctions algorithmiques, propres à la solution des problèmes ou des conditions proposées, elle ne saurait, à son tour, s'opérer autrement que suivant les seuls modes possibles de la génération des quantités, tels que ces modes sont fixés par la loi suprême, et notamment par les susdits modes qui sont déterminés, sous les marques (142), (143), (144), etc., dans le premier tome de la Philosophie de la Technique. Et nous venons de remarquer que, d'après ces modes absolus de la génération des quantités, lorsque les équations différentielles (142)', (143)', (144)', etc., sont intégrables, ce qui arrive fort rarement, la génération dont il est question, en s'arrêtant à celles des fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, etc., qui y correspondent, devient finie.

(*) Ce sont les fonctions marquées par ∇ , comme nous l'avons montré dans la Critique de la Théorie des fonctions génératrices de Laplace (pages 64 et 101).

et lorsque ces équations différentielles ne sont pas intégrables, ce qui arrive le plus souvent, la génération en question, ne pouvant s'arrêter rigoureusement à aucune des susdites fonctions génératrices, devient indéfinie, et elle donne alors, d'une manière progressive, mais toujours accomplie et de plus en plus exacte à volonté, la génération de la nature algorithmique elle-même de la quantité ou de la fonction problématique, et non pas seulement sa valeur, comme la donnent les algorithmes techniques, les séries, les fractions continues, etc. — Or, en l'absence de ces principes philosophiques et absolus de la génération des quantités, les géomètres, ignorant d'où leur viennent les susdits algorithmes fondamentaux, les *puissances*, les *fonctions*, les *logarithmes*, les *sinus*, etc., et n'ayant encore aucune idée de la loi d'après laquelle se conduisent ces algorithmes fondamentaux pour la génération des quantités, puisque la loi suprême leur était inconnue, ne pouvaient concevoir que la génération finie des quantités, et ne pouvaient conséquemment résoudre, d'une manière théorique, que le très-petit nombre de problèmes où la quantité problématique s'établit par cette simple et en quelque sorte matérielle génération finie. — C'est là l'unique cause de ce que les grands problèmes de la science n'ont pu être résolus jusqu'à ce jour; et c'est aussi là, dans cette génération absolue (142), (143), (144), etc., des quantités, telle que la loi suprême la dévoile enfin à la science, le moyen puissant que cette réforme des mathématiques apporte pour la résolution de leurs grands problèmes. — Que reste-t-il donc à faire pour réaliser enfin cette méthode suprême qui, par les procédés en question (142), (143), (144), etc., de la génération absolue, finie ou indéfinie; de la nature des quantités, doit nous conduire à la solution de tous les grands problèmes de la science? Il ne reste évidemment qu'à faire connaître les moyens par lesquels les susdites équations différentielles (142)', (143)', (144)', etc., desquelles dépendent ces procédés, peuvent, dans tous les cas possibles, être intégrées suffisamment, d'après les conditions qui y sont requises. Eh bien, nous ferons connaître ces moyens définitifs, en grand détail, dans la *Réforme de la Mécanique céleste*, que nous donnerons à la suite de l'ouvrage présent, et où nous montrerons qu'il suffit, pour cette intégration, d'appliquer ici les procédés très-simples que, dans la *Critique de la Théorie des fonctions génératrices de Laplace*, nous avons fait connaître, sous les marques (91), (93), (103), (120), etc., pour l'intégration des équations aux différences et aux différentielles, à une, à deux, et à un nombre quelconque de variables indépendantes. Les géomètres auront ainsi, dès le moment où paraîtra ce deuxième ouvrage, la méthode suprême complètement réalisée et propre à son application immédiate à tous les problèmes.

Il est sans doute superflu de rappeler ici ce que, dans la *Philosophie de la Technique*, nous avons établi concernant cette généralité des problèmes qu'embrasse effectivement la méthode suprême dont il s'agit, en ce que les éléments

qui entrent dans cette méthode, sont les différences ou les différentielles des fonctions cherchées, différences ou différentielles qui, comme nous l'avons prouvé dans cet ouvrage, sont les éléments absolus des quantités, et qui, par cela même, peuvent être déterminées dans tous les problèmes des mathématiques, quels qu'ils soient. Et c'est ainsi que même la simple résolution des équations ordinaires ou immanentes peut, d'une manière facile, être donnée par cette même méthode suprême, comme on le verra dans la *Résolution générale des Équations*, qui formera le troisième des ouvrages présents, et où, pour la spécifier pour ce cas, nous la nommerons *méthode mévastrique*. On conçoit également que, quoiqu'il n'entre qu'une seule variable indépendante dans la méthode suprême (142), (143), (144), etc., dont il s'agit, on peut facilement l'étendre à un nombre quelconque de variables indépendantes, et obtenir ainsi la solution de tous les problèmes qui impliquent de pareilles variables indépendantes, surtout, par exemple, l'intégration des équations aux différences et aux différentielles partielles. Nous-même, dans les *Mémoires* que nous avons présentés au Bureau des Longitudes de Londres sur la Théorie de la Terre, nous avons donné, sous les marques (412), (413), etc., par le moyen de cette méthode suprême, l'intégration de l'équation aux différentielles partielles qui est le problème fondamental de cette théorie, et que nous avons reproduite, à la marque (LVI), dans les *Prolégomènes du Messianisme*, sous le nom de problème-universel de la théorie de la terre. Lorsque, dans la suite de ces ouvrages, et notamment dans le sixième ouvrage, nous publierons cette nouvelle théorie mathématique de la terre, nous y reproduirons nécessairement cette intégration de l'équation aux différentielles partielles (LVI), pour servir d'exemple à l'application universelle de cette méthode.

Mais, l'exemple principal que, dans le deuxième des ouvrages présents, nous donnerons de l'application de la méthode suprême (142), (143), (144), etc., dont il s'agit, c'est le développement complet de l'exemple que nous avons déjà donné, sous ces mêmes marques (142), (143), (144), etc., du premier tome de la *Philosophie de la Technique*, en l'y appliquant ainsi immédiatement à la vraie et définitive constitution mathématique de la mécanique céleste. — Déjà, dans cet ouvrage que nous venons de citer, avons-nous pu, par la simple indication de cette application de la méthode suprême, faire connaître la véritable constitution de la mécanique céleste, et faire ainsi apprécier le néant de ces rapides accumulations de prétendues équations (irrégularités) astronomiques, que, par le moyen précaire et insuffisant des séries, on entassait sans cesse, les unes sur les autres, et que l'on a recueillies et complétées finalement sous le nom imposant de *Mécanique Céleste* d'un grand savant. — Voici, en effet, les paroles par lesquelles, dans ce premier tome de la *Philosophie de la Technique*, publiée déjà en 1815, nous terminons cette indication de l'em-

ploi de la méthode suprême pour arriver à la vraie constitution algorithmique de la mécanique céleste.

« On aura surtout l'avantage inappréciable de pouvoir juger les véritables progrès de la Mécanique Céleste. Car, pour chaque mouvement faisant partie du Système du Monde, le tout consiste évidemment, suivant la théorie philosophique que nous venons d'exposer, à réduire le plus possible la valeur absolue de la série (146)' formant l'équation séculaire de ce mouvement; de sorte que, pour donner un véritable avancement à la science, il faudra, d'après le procédé de cette nouvelle ou plutôt unique théorie, faire l'un ou l'autre, savoir, découvrir une fonction ultérieure Ω_{n+1} , à la suite des fonctions déjà connues $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$ formant la génération du mouvement dont il est question, ou de modifier celles de ces fonctions qui seront déjà connues, de manière à ce que, dans l'un ou dans l'autre cas, la série complémentaire (146)' ou l'équation séculaire soit réduite à une valeur plus petite que celle qu'on aura déjà obtenue. On aura ainsi un critérium précis et infaillible pour reconnaître une véritable découverte en Mécanique céleste, et en même temps, pour estimer à leur juste valeur, un tas de formules rhapsodiques que, sous le nom pompeux d'équations, on ne cesse d'accumuler et d'ajuster pour compléter certains mouvements célestes, par exemple, celui de la lune. »

Nous reviendrons à cette haute question dans la suite de ce Programme, lorsque nous parlerons des grands problèmes des mathématiques appliquées. — Pour le moment, dans cette première Classe de problèmes qui nous occupe ici, il nous reste encore à faire connaître le second des deux susdits problèmes théoriques, qui, par l'application de la loi suprême, a pour objet de fixer la loi spéciale de la génération-neutre absolue des quantités.

Nous avons déjà dit plus haut que, par la génération-neutre des quantités, que nous avons fait connaître vers la fin du second tome de la Philosophie de la Technique, nous entendons cette génération algorithmique où se confond la génération théorique, qui a pour objet la construction de la nature elle-même des quantités, avec la génération technique, qui n'a pour objet que la détermination de leur valeur. Et dans ce même ouvrage que nous venons de citer, nous avons en outre distingué la génération-neutre et purement *axiomatica* à l'algorithme technique dont elle dérive, de la génération-neutre *absolue* qui, tout en opérant sous la forme d'un algorithme technique, cesse d'en être dépendante et se règle déjà principalement sur la nature elle-même de la quantité, comme nous l'avons fixée positivement, sous les marques (556) et (556)', dans ce même deuxième tome de la Philosophie de la Technique. Or, c'est cette génération-neutre absolue des quantités, telle précisément qu'elle est fixée sous ces marques (556) et (556)', et telle qu'elle dérive immédiatement de la loi suprême, dont elle est une espèce d'anticipation technique, c'est, disons-nous,

cette génération-neutre absolue qui forme le deuxième grand problème nouveau pour l'accomplissement de la science; problème que, déjà dans le susdit deuxième ouvrage, dans la *Réforme de la Mécanique céleste*, nous résoudrons également. — Nous nous bornerons ici à faire remarquer que, comme anticipation technique sur la loi suprême, cette absolue génération-neutre des quantités est essentiellement utile lorsque, dans leur détermination, il s'agit principalement de leur valeur, comme, par exemple, dans les mouvements des astres pour lesquels on a besoin de construire des tables numériques. Aussi, comme nous l'avons dit dans les *Prolegomènes du Messianisme* (pages 296 et suiv.), nous sommes-nous déjà servi de cette absolue génération-neutre des quantités, du moins pour la détermination des intégrales, dans la théorie des mouvements lunaires dont nous avons porté les tables numériques au Bureau des Longitudes de Londres, sur la demande du Parlement britannique, à ce Bureau où, par suite de recommandations venues du Continent, l'auteur a trouvé, pour récompense de ses travaux, l'indigne spoliation que l'on peut bien mettre à côté de la destruction de ses ouvrages mathématiques en France. — Nous venons de rappeler que c'est principalement pour la détermination des intégrales que nous nous sommes servi de la méthode de la génération-neutre absolue des quantités, dont il est ici question; et à ce sujet, nous devons prévenir que cette méthode, comme application technique de la susdite méthode suprême, en servant à déterminer les quantités par leurs éléments absolus, c'est-à-dire, par leurs différentielles, est proprement, en principe, comme la méthode suprême elle-même, la méthode générale d'intégration, en ce qu'elle fait découvrir les fonctions elles-mêmes dont les différentielles sont données, soit immédiatement, soit médiatement par des équations quelconques, immanentes ou transcendantes, et primitives ou différentielles. Il est sans doute superflu de prévenir également que, comme application technique de la méthode suprême, cette méthode de la génération-neutre absolue des quantités, qui forme ainsi la méthode générale d'intégration, implique nécessairement, dans ses degrés progressifs, mais toujours accomplis et de plus en plus exacts à volonté, les différentielles progressives de tous les ordres, prises dans leur généralité absolue; et elle offre, par cette généralité de ses éléments, les moyens de son application universelle à la solution de tous les problèmes, comme nous le montrerons lorsque, dans le second et dans le sixième des ouvrages présents, nous l'appliquerons à la nouvelle théorie des mouvements célestes et à l'intégration générale de la susdite équation aux différentielles partielles qui forme le problème-universel de la mécanique terrestre et qui, comme nous l'avons déjà dit, se trouve produite, sous la marque (LVI), dans les *Prolegomènes du Messianisme*. Et alors, en joignant à cette définitive et absolue méthode générale d'intégration, la loi universelle de différentiation que, par l'application de la loi suprême, nous avons produite, sous les marques (278) et

(283), dans le second tome de la Philosophie de la Technie, nous pouvons affirmer qu'en possédant en outre la susdite méthode suprême, la science sera accomplie dans cette importante branche qui constitue le calcul différentiel et intégral (*).

A la fin du second tome de la Philosophie de la Technie algorithmique, après avoir caractérisé et déterminé, sous les marques (556) et (556'), cette absolue génération-neutre des quantités que nous venons de signaler comme formant le deuxième grand problème de la science, dont la solution est donnée par la loi suprême des mathématiques, nous avons dit que « nous promettons de donner aux géomètres, comme dernier fruit de notre philosophie des mathématiques, cette anticipation technique sur la susdite méthode suprême, par laquelle, dès aujourd'hui, peuvent être résolus tous les grands problèmes de la science, et qui, par son universalité en quelque sorte théorique, c'est-à-dire, propre à déterminer à la fois la nature et la valeur des quantités, forme l'entrée à la nouvelle période des mathématiques. — Eh bien, si les mathématiciens parmi lesquels nous avons publié nos travaux et auxquels nous avons fait cette promesse, au lieu de décrier ces travaux et de faire ainsi détruire ces ouvrages dans leur pays, nous avaient demandé l'accomplissement de cette grande promesse, ils l'auraient obtenu depuis près de trente ans. Mais, c'est précisément ce qu'ils ne voulaient pas, parce que, dans leur sincère et profond amour exclusif de la vérité, ils prévoyaient probablement que cette production aurait empêché le progrès de la vérité dans le monde. Aujourd'hui que les ouvrages de l'auteur sont ainsi détruits en France, et qu'il a été réduit au silence pendant ces trente années, diffamé même dans les journaux de ces illustres et très-savants mathématiciens, la prétendue grande production qu'il avait promise alors, ne pourra certainement plus nuire aux progrès de la vérité dans le monde; et nous pensons faire plaisir à ces grands savants en accomplissant enfin cette promesse de l'auteur, pour leur donner le moyen de légitimer la destruction de ses ouvrages, en prouvant, sinon au monde savant, du moins aux lecteurs de leurs journaux politiques, aux hommes incompétents à juger la science, toute la futilité, peut-être même tout le danger politique de ces rêveries mathématiques. Nous allons donc, dans le deuxième des ouvrages présents, c'est-à-dire, dans la *Réforme de la Mécanique céleste*, faire enfin connaître, sous le nom de MÉTHODE FUNDAMENTALE, cette absolue génération-neutre des

(*) La loi universelle du calcul différentiel, qui se trouve sous les susdites marques (556) et (556') dans la Philosophie de la Technie, et qui sert à déterminer, pour un ordre quelconque, les différentielles d'une fonction d'un nombre quelconque de variables, lesquelles, elles-mêmes, sont fonctions d'un nombre quelconque d'autres variables indépendantes, a été publiée en 1816. — Or, en 1831, dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, Poisson a reproduit, comme sa découverte, un principe particulier de cette loi universelle, c'est-à-dire, tout ce qu'il en a pu comprendre. Et lorsque deux jeunes hommes, MM. Bolyai et Borchart, en ont saisi le secret perpétuel de cette Académie, il leur répondit que ce qui est produit en 1816 précède nécessairement ce qui a été produit en 1836.

quantités qui, comme anticipation technique sur la méthode suprême, et par conséquent comme moyen provisoire de la solution de tous les grands problèmes, ouvre la nouvelle période historique des mathématiques.

2^e CLASSE. — PROBLÈME-UNIVERSEL.

La forme de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques est... (2)

$$0 = fx + x, \cdot f, x + x, \cdot f, x + x, \cdot f, x + \text{etc.}, \text{etc.};$$

les caractéristiques f, f, f, f , etc. dénotant des fonctions quelconques de l'inconnue x , et les quantités x, x, x , etc. étant connues ou données. — Or, comme nous l'avons vu dans la Classe précédente de problèmes, cette forme du problème-universel, où il s'agit de déterminer la quantité inconnue x , est déduite de la loi suprême, sous les marques (51) et (53), dans le premier tome de la Philosophie de la Technique, comme étant la forme universelle de tout problème qui peut s'établir ou exister en mathématiques. Et comme nous l'avons également vu plus haut, la solution générale de ce problème-universel, par laquelle se trouve déterminée l'inconnue x en fonction des quantités connues x, x, x , etc., qui entrent dans ce problème, a été donnée, par anticipation, déjà en 1812, dans la *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, sous les susdites marques (13), (14) et (15), afin d'acquiescer par là le droit de réfuter ce grand mathématicien, en montrant que sa découverte principale, son célèbre théorème, n'est qu'un cas très-particulier de la solution générale de notre problème-universel. — Quant à la démonstration de cette définitive solution générale, en tant qu'elle présente en toute réalité le développement définitif de tous les éléments qui entrent dans cette grande question, on conçoit que, dans cet accomplissement, sa démonstration devait dériver immédiatement de la loi suprême. Et en effet, le principe de cette solution accomplie et par conséquent de sa démonstration se trouve dans la solution de l'équation absolument générale.... (3)

$$\varphi x = 0,$$

qui, ainsi que sa solution, dérive immédiatement de la loi suprême, sous les marques (323)' et (333)'', dans le second tome de la Philosophie de la Technique. Le présent problème-universel, comme deuxième loi fondamentale des mathématiques, n'est rien autre que le développement, suivant la loi suprême, de la fonction générale et arbitraire φx qui, égale à zéro, constitue cette équation absolument générale (323)''; et alors, en prenant, pour la quantité arbitraire α qui entre dans la solution (323)'', la quantité que donne, pour x , l'équation.... (4)

$$0 = fx,$$

formée ainsi par la fonction fondamentale $f x$ du problème-universel, cette solution absolue (23)^{me}, qui dérive immédiatement de la loi suprême, donnera la solution spéciale du problème-universel, telle que, par anticipation, nous l'avons produite, sous les susdites marques (14) et (15), dans la *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange*.

Ainsi, dès 1816, le problème-universel et sa solution générale, constituant la deuxième loi fondamentale des mathématiques, se trouvaient établis positivement et démontrés rigoureusement, tout comme la loi suprême, qui constitue la première de ces lois fondamentales. Et aujourd'hui, après trente ans à peu près, les savants parmi lesquels nous avons publié ces bases de la réforme des mathématiques, n'en ont encore aucune idée. Bien mieux, pour empêcher les autres mathématiciens d'en avoir jamais une idée, les illustres savants dont nous parlons, ont décrié et laissé détruire ces ouvrages en France. — Mais voyons quels sont les grands problèmes de la science que, dans la suite des ouvrages présents, destinés à l'accomplissement de cette réforme des mathématiques, nous résoudrons par le moyen du présent problème-universel, formant la deuxième loi fondamentale des mathématiques.

D'abord, il est manifeste, et cela a même été prouvé à priori sous les susdites marques (51) et (53) de la Philosophie de la Technique, que la forme de cette deuxième loi fondamentale, dérivant de la forme même de la loi suprême, est la forme universelle de tous les problèmes qui peuvent s'établir en mathématiques. Et en effet, toutes les équations, immanentes et transcendantes, primitives et dérivées, aux différences et différentielles, totales et partielles, peuvent être assimilées à la présente forme (2) du problème-universel; et par conséquent, la solution générale de ce problème-universel doit contenir immédiatement la solution de toutes ces équations, comme nous allons le voir effectivement.

Pour ce qui concerne, en premier lieu, les équations immanentes ou ordinaires, de la forme générale... (5)

$$0 = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} \dots + A_n x;$$

dont la solution, jusqu'à ce jour, a résisté à tous les efforts des géomètres, l'application du problème-universel à cette solution conduirait d'abord à la découverte et à l'établissement définitif de la forme générale des racines x , telle que nous l'avons fait connaître, déjà en 1812, dans l'opuscule intitulé *Résolution générale des Equations de tous les degrés*, et cette application du problème-universel donne ensuite la MÉTHODE FONDAMENTALE pour la résolution des équations, constituant la seconde des trois méthodes qui, par l'application des trois lois fondamentales des mathématiques, existent pour la solution de ces équations immanentes de tous les degrés. — Dans l'Introduction au troisième des ouvrages que nous annonçons dans ce Programme, et qui, par la raison

que nous dirons en traitant la troisième Classe de problèmes, aura le titre de *Résolution téléologique des Équations de tous les degrés*, nous ferons connaître fort en détail ces trois méthodes, telles qu'elles sont ainsi fondées respectivement sur les trois lois fondamentales des mathématiques; et par conséquent, nous y caractériserons plus amplement la présente méthode fondamentale qui dérive de l'application du problème-universel. Nous pouvons donc nous dispenser d'en dire ici davantage; et nous nous bornerons à prévenir que, dans cette Introduction de l'ouvrage que nous venons d'annoncer, on apprendra positivement que la grande et définitive solution des équations de tous les degrés par la méthode fondamentale, qui résulte de l'application du problème-universel, et pour laquelle nous avons posé les principes dans l'opuscule de 1812, est déjà donnée par nous en toute réalité.

Bien plus, nous offrons formellement, dès aujourd'hui, à ceux des géomètres qui nous la demanderont, cette définitive et éminemment simple méthode fondamentale pour la résolution algébrique des équations de tous les degrés, comme accomplissement final de notre opuscule, publié en 1812. — Déjà même, dans la troisième partie de l'ouvrage présent, nous donnerons un exemple décisif de cette grande et fondamentale méthode pour la résolution des équations de tous les degrés, en l'appliquant à la résolution d'une équation du cinquième degré, et en produisant ainsi ses cinq racines sous la susdite forme générale que nous avons fait connaître, à la marque (18), dans l'opuscule que nous venons de citer. Les géomètres y verront, tout à la fois, et l'impossibilité d'obtenir ces racines, sous cette forme décisive, par aucun des moyens que la science possède actuellement, et la facilité avec laquelle cette solution, en la déduisant ainsi des principes supérieurs de notre opuscule de 1812, de ces principes que les académiciens de Paris considèrent comme inabordables, peut maintenant être opérée dans tous les cas.

Pour ce qui concerne, en second lieu, les équations transcendentes et les équations différentielles, totales et partielles, nous nous bornerons également, afin de ne pas faire de simples promesses, à faire connaître dans quelles productions publiques nous avons déjà résolu réellement ces hautes équations qu'on ose à peine aborder, en y montrant les procédés par lesquels, suivant toujours la solution générale du problème-universel, on pourra maintenant résoudre généralement ces grands problèmes. — Et nous le ferons notamment en indiquant ces solutions, d'une part, dans les Mémoires que nous avons présentés au Corps royal des ponts et chaussées de France, sur la *Réforme scientifique de la locomotion*, et de l'autre part, dans les susdits Mémoires que nous avons présentés au Bureau des Longitudes de Londres sur la *Construction mécanique de la terre*.

Or, un des problèmes les plus importants et les plus difficiles dans la réforme de la locomotion que nous avons soumise au Corps royal des ponts et chaussées

sees de France, est sans contredit celui qui, dans la roue-accomplie, formant un des éléments de cette réforme scientifique, a pour objet de déterminer, pour toute vitesse du mouvement que nous désignons par v , et pour toute pente sur laquelle s'opère ce mouvement et que nous désignons par α , la grandeur de l'arc générateur du mouvement, que nous désignons d'abord par ζ , c'est-à-dire, la grandeur angulaire du rail-circulaire sur lequel, dans cette roue-accomplie, doit se déplacer la petite roue pour qu'un tel mouvement soit possible. — Eh bien, en désignant en outre par e l'excentricité de la roue-accomplie, par A son rayon, par N le poids des roues, par M le poids de la masse entière du char, par p le tirage essentiel des roues ordinaires sur des plans exacts, comme le sont les chemins de fer, par g l'intensité de la gravitation à la surface de la terre, et enfin par ω l'angle de la pente idéale à laquelle le char se trouve constamment élevé par l'élévation réelle de la petite roue à la hauteur de l'arc générateur ζ qui est en question; en fixant ainsi, disons-nous, ces diverses quantités, parmi lesquelles on a les valeurs constantes... (6)

$$g = 9^m,80896 \quad \text{et} \quad p = 0,005 \text{ (environ);}$$

on voit, sous la marque (364) du premier des trois Mémoires soumis à la Commission des ponts et chaussées de France, que les équations qui, prises même dans leur simplicité primitive, déterminent les deux présentes inconnues ζ et ω , forment deux équations transcendantes d'un ordre supérieur, savoir, les deux équations... (7)

$$\sin \zeta = \frac{MAv}{(M-N) \cdot eg} \cdot \frac{p + \sin(\alpha - \omega)}{\cos \alpha},$$

$$\tan \omega = \frac{(M-N) \cdot e \cdot (1 - \cos \zeta)}{MA \zeta}.$$

Nous prions les savants qui déclarent ne pouvoir comprendre nos ouvrages, d'examiner ces équations transcendantes et de voir si, dans l'état actuel de la science, qu'ils connaissent sans doute, il est possible de résoudre ces deux équations, afin d'obtenir, pour toutes les valeurs de la pente α et de la vitesse v , la détermination des deux inconnues ζ et ω . Bien plus, par suite des injures qu'ils disent à l'auteur, sans doute pour se dédommager de ce qu'ils ne peuvent comprendre ses ouvrages, nous sommes peut-être en droit de les prier de nous montrer les moyens par lesquels, en suivant leur précaire et insuffisante science, ils peuvent découvrir les formules qui fixent les présentes quantités inconnues ζ et ω , de manière à ce que, pour toutes les valeurs de la vitesse v , finie ou infinie, ces formules donnent immédiatement les valeurs des quantités ζ et ω en question. — Ces Messieurs, qui ne se contentent pas même encore de pareils problèmes transcendans d'ordre supérieur, n'en donneront

certainement pas la solution que nous leur demandons. Et alors, nous serons en droit de conclure que les injures qu'ils disent à l'auteur, proviennent, pour le moins, de l'impossibilité où ils sont de concevoir de si grands résultats. Eh bien, dans ce même premier Mémoire, d'où nous venons d'extraire les deux présentes équations transcendentes; en y appliquant le problème-universel, cette seconde de nos lois fondamentales, nous donnons complètement la solution de ces équations transcendentes et nous y parvenons ainsi, sous la marque (383), à l'expression générale de l'arc générateur ζ en question, que nous y désignons par x et dont la valeur fait connaître immédiatement, par la seconde de ces équations, la deuxième inconnue u . Bien plus, nous y montrons progressivement, sous les marques (370), (371), etc., et sous les marques (391), (392), etc., toutes les circonstances de cette application du problème-universel à la solution de toutes les équations transcendentes. — Ces Mémoires que nous citons, sont encore entre les mains de la Commission des ponts et chaussées de France, et les savants dont nous parlons, peuvent y constater ce que nous venons de leur dire.

Un second problème, peut-être un peu moins important, mais non moins difficile, qui se présente encore dans la réforme de la locomotion, est celui qui, pour la même roue-accomplie que nous venons de nommer, a pour objet de déterminer la vitesse du mouvement des roulettes sur les rails circulaires, vitesse que nous désignons par u au point où la position des roulettes correspond à l'arc ζ de ces rails-circulaires. — La solution de ce problème fait découvrir que la restitution des forces, par la chute des roulettes le long des rails-circulaires, est sensiblement égale à la perte des forces, causée par l'ascension des roulettes sur ces mêmes rails-circulaires, pour élever le char par-dessus les inégalités verticales de la route. — Or, en conservant aux quantités g , p , e , leur susdite signification, et en désignant par ξ et β deux quantités constantes qui dépendent de la construction de la roue-accomplie, la relation entre les quantités variables ζ et u dont il s'agit, se trouve déterminée; sous la marque (216) du premier des trois Mémoires qui contiennent cette réforme de la locomotion, par l'équation différentielle... (8)

$$u . du = - g e . \sin \zeta . d\zeta + p (\xi - \beta) . \cos \zeta . d\zeta - \beta p . u^2 . d\zeta ;$$

et cette équation différentielle, comme le savent sans doute les sages savants de Paris, ne saurait non plus, dans l'état actuel de la science, être intégrée généralement. Eh bien, en nous servant encore de la seconde loi fondamentale dont il s'agit ici, c'est-à-dire de la solution du problème-universel, nous avons donné, sous la marque (239) du même Mémoire que nous venons de citer, l'intégration générale de cette équation différentielle, qui en outre est transcendante. Et de plus, nous y avons montré de nouveau, sous les marques (221), (222), etc., et (224), (225), etc., toutes les conditions progres-

survra de cette application du problème-universel, de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, à l'intégration générale de toutes les équations différentielles, immanentes et transcendentes. — Or, comme nous l'avons déjà dit, ce premier Mémoire concernant la réforme scientifique de la locomotion, se trouve encore, avec les deux autres Mémoires, entre les mains de la Commission des ponts et chaussées de France, où les savants dont il s'agit, pourront de nouveau constater ce que nous venons de leur apprendre.

Ainsi, l'application du problème-universel à la solution générale des équations ordinaires ou immanentes, des équations transcendentes, et des équations différentielles, quelles que soient ces équations, se trouve constatée positivement. Et il ne nous reste qu'à savoir si cette application peut donner également la solution générale ou l'intégration des équations aux différentielles partielles. — Eh bien, dans les susdits Mémoires concernant la construction mécanique de la terre, qui ont été présentés au Bureau des Longitudes de Londres, nous avons fait, dans le second de ces Mémoires, sous les marques (392), (393), etc., cette application de notre deuxième loi fondamentale à l'intégration de l'équation aux différentielles partielles qui, dans cette véritable théorie de la terre, constitue, à son tour, comme nous l'avons dit plus haut, le problème-universel de sa construction mécanique, c'est-à-dire, à l'équation aux différentielles partielles que nous avons reproduite, sous la marque (LVI), dans les *Prolegomènes du Messianisme*, et dont nous avons, en outre, donné l'intégration distincte par la susdite application immédiate de la méthode suprême elle-même. Bien plus, sous ces mêmes marques (392), (393), etc., du second Mémoire que nous citons, nous avons également indiqué toutes les conditions progressives de cette application du présent problème-universel des mathématiques à l'intégration générale des équations aux différentielles partielles d'un nombre quelconque de variables indépendantes; et nous reproduirons nécessairement ces procédés lorsque, dans le sixième des ouvrages que nous annonçons par ce Programme, dans la *Réforme de la Mécanique terrestre*, nous publierons ces Mémoires si malencontreux pour le Bureau des Longitudes de Londres. Déjà même dans le Supplément de l'ouvrage présent, nous ferons connaître cette intégration de l'équation aux différentielles partielles (LVI) en question.

Nous pouvons donc affirmer, par l'application positive que nous en avons faite à tous les genres d'équations, que la solution générale du présent problème-universel, telle que nous l'avons donnée, déjà en 1812, dans la *Refutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, de ce problème-universel qui constitue la deuxième loi fondamentale des mathématiques, s'applique directement à la solution de toutes les équations algorithmiques, quelle qu'en soit la nature spéciale.

✓ D'ailleurs, dans le cinquième des ouvrages que nous annonçons par ce Programme, et qui aura le titre de *Résolution générale des équations quelconques*,

immanentes ou transcendantes, primitives ou dérivées, aux différences et aux différentielles, etc., nous donnerons, avec tous ses développements, cette application générale du problème-universel, comme garantie de la fécondité absolue de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques. Et c'est ainsi que, dans ce cinquième ouvrage, nous découvrirons la susdite méthode fondamentale par laquelle nous accomplirons notre *Résolution générale des Équations de tous les degrés*, publiée en 1812 et demeurée inabordable, jusqu'à ce jour, par les académiciens de Paris.

3^e CLASSE. — LOI TÉLÉOLOGIQUE.

La forme de cette troisième et dernière loi fondamentale des mathématiques est... (9).

$$x^a \equiv a, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

et comme telle, en la traduisant en langage algorithmique ordinaire, savoir ... (10)

$$\frac{x^a - a}{M} = \text{nombre entier},$$

cette loi, par sa détermination téléologique de la racine x , régit la CONGRUENCE ou la CONCORDANCE entre les trois éléments primitifs de l'algorithmie, nommément, entre la graduation (la puissance x^a), la sommation (le résidu a), et la reproduction (le module M). — Or, les différentes questions qui dépendent de cette congruence ou concordance fondamentale des algorithmes primitifs, constituent une branche spéciale de l'algorithmie, que l'on nomme *Théorie des Nombres*, mais dont malheureusement on n'a pas encore compris la nature essentiellement distincte, puisque tous les géomètres, et plus spécialement l'académicien Legendre, voulaient déduire ces questions téléologiques des lois ordinaires de l'algorithmie qui ne régissent que les questions purement logiques, c'est-à-dire, les questions qui impliquent une nécessité intellectuelle, tandis que les premières n'impliquent qu'une finalité intellectuelle. — Gauss est le premier géomètre qui commença à y entrevoir cette finalité algorithmique sous le nom de *congruence*, pour laquelle il introduisit le susdit signe algorithmique.

C'est seulement dans notre Philosophie des Mathématiques (pag. 62 et suiv.) que fut enfin dévoilée clairement et déduite philosophiquement cette distinctive finalité algorithmique dans la génération des quantités dont les questions spéciales forment ce que l'on nomme le *Théorie des Nombres*. Bien plus, à la page 67 de cet ouvrage, sous la marque (D), nous avons fait connaître le principe premier ou philosophique de cette IDENTITÉ DE FORMATION des nombres qui constitue leur congruence dont il est question; principe que nous découvrirons dans une nouvelle espèce de fonctions algorithmiques, auxquelles nous

donnons le nom de *fonctions alephs*, en prenant ce nom de la lettre hébraïque $\aleph$ par laquelle nous désignons ces fonctions spéciales auxquelles se ramène ainsi toute la théorie des nombres. Et en effet, dans la suite de cette même Philosophie des Mathématiques (pages 140 et suiv.), nous avons déduit, de ce principe philosophique des congruences, la possibilité de la résolution générale des équations de congruence, et par conséquent la possibilité de la résolution générale des équations indéterminées. — Nous disons que nous y avons déduit la possibilité de cette résolution générale des équations de congruence; et nous devons ici, en l'expliquant, rendre attentif à cette limite de seule possibilité à laquelle devait s'arrêter la philosophie des mathématiques, en laissant à la science elle-même, à l'algorithmie, d'espérer l'effectivité de cette résolution. C'est ainsi également que, dans toute notre Philosophie des Mathématiques, il n'existait pour la philosophie, comme telle, d'autre obligation que de découvrir la possibilité de la résolution générale des équations de tous les genres, en déduisant cette possibilité des principes respectifs de la génération des quantités qui forment ces équations distinctes. Et c'est cette obligation que nous y avons remplie réellement, en déduisant ainsi, de leurs principes respectifs, non-seulement la possibilité de la résolution générale des équations de congruence, que nous venons de rappeler, mais de plus la possibilité de la résolution générale de tous les autres genres d'équations, savoir, des équations ordinaires, que nous nommons équations d'équivalence, des équations aux différences et aux différentielles, et des équations aux grades et aux gradules. Comme nous venons de le dire pour les équations de congruence, c'est à la science elle-même, à l'algorithmie, qu'il appartient maintenant de résoudre effectivement toutes ces diverses équations; et c'est pour cela que, dans notre Philosophie de la Technique algorithmique, formant la deuxième partie et la partie purement mathématique de nos travaux, nous avons à opérer la réforme des mathématiques, en y donnant, à cette grande science, ses trois lois fondamentales dont elle était privée jusqu'à ce jour et qui seules pouvaient lui donner les moyens d'accomplir cette résolution générale des équations de tous les genres que nous indiquons aujourd'hui positivement dans le présent Programme. A la vérité, dans cette Philosophie de la Technique, nous n'avons pu, dans ses deux premiers tomes, dévoiler que les deux premières des trois lois fondamentales des mathématiques, nommément la loi suprême et le problème-universel. La troisième de ces lois, c'est-à-dire, la loi téléologique, celle précisément dont il s'agit ici, dans cette troisième classe de problèmes, devait être produite dans le cinquième et dernier tome de la Philosophie de la Technique. Malheureusement, comme nous l'avons dit dans les Prolegomènes du Messianisme, un indigne scandale, provoqué par les dépréciations que manifestaient les savants parmi lesquels nous avions produit nos ouvrages, arrêta tout à coup la suite de leur publication. — Nous allons aujourd'hui,

après trente ans d'intervalle à peu près, compléter cette première partie de la réforme des mathématiques, en produisant ici, à la suite du présent Programme, cette troisième loi fondamentale des mathématiques, cette loi téléologique de la finalité entre les éléments hétérogènes, le fini et l'infini, qui nous manquait jusqu'à ce jour, et dont nous avons maintenant besoin pour pouvoir, avec ces trois lois fondamentales, procéder à la solution de tous les grands problèmes de la science, formant la seconde partie de notre réforme des mathématiques.

Or, pour ce qui concerne la troisième Classe de ces problèmes, ceux que, dans la suite de ces ouvrages, nous résoudrons à l'aide de cette loi téléologique que nous allons enfin faire connaître, ce sont manifestement les principaux problèmes de la *Théorie des Nombres*, notamment, d'une part, la résolution générale des équations de congruence, et par conséquent des équations indéterminées de tous les degrés, et de l'autre part, la détermination générale des facteurs des nombres, quelque grands qu'ils soient; problèmes qui, jusqu'à ce jour, sont demeurés non résolus. — De plus, nous donnerons accessoirement, avec la même troisième loi fondamentale, du moins avec les susdites fonctions alephs qui en sont les éléments essentiels, une nouvelle solution du grand problème de la résolution générale des équations, de ce problème désespéré que, jusqu'à ce jour, malgré d'immenses efforts, la science a été impuissante à résoudre. C'est en effet par le moyen de ces fonctions alephs que, dans le troisième de la suite des ouvrages pour lesquels nous traçons ce Programme, nous donnerons encore, sur la présente voie téléologique, cette solution tant désirée des équations de tous les degrés; et nous la donnerons même d'une manière tout à fait accomplie et indépendante de tout procédé auxiliaire, par une méthode qu'à cause de cette indépendance, nous nommons MÉTHODE SPÉCIALE. — Dans cette *Résolution téléologique des Équations de tous les degrés*, qui sera produite, s'il plaît à Dieu, peu de temps après l'ouvrage présent, nous ferons connaître, dans l'introduction, comme nous l'avons déjà dit plus haut, les caractères distinctifs de cette méthode spéciale, de même que nous y ferons connaître les caractères distinctifs des deux autres méthodes qui, pour la résolution générale des équations de tous les degrés, résultent de l'application des deux premières lois fondamentales des mathématiques.

Ainsi, tous les grands problèmes de la science, ceux notamment qui concernent les mathématiques pures, se trouveront résolus définitivement par l'application des trois lois fondamentales de cette difficile science. — Voyons maintenant quels sont, à leur tour, les problèmes, non moins grands et beaucoup plus graves, que, dans les mathématiques appliquées, notre réforme des mathématiques résoudra également et qu'elle a même résolus déjà, toujours

à l'aide de ces trois lois fondamentales des mathématiques. — Mais, pour ne pas nous étendre inutilement dans ce Programme, et pour ne pas répéter ce que nous avons déjà dit, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, de cette solution des grands problèmes des mathématiques appliquées, dans ces Prolegomènes où nous avons produit les résultats principaux de cette solution, nous supposons que le lecteur a sous les yeux ces Prolegomènes du Messianisme; et nous nous bornerons ici à compléter ces hautes considérations, en indiquant ce qu'il nous reste à faire pour accomplir, sous ce point de vue élevé de l'application des mathématiques, la présente réforme de cette science.

Or, nous avons reconnu, dans les Prolegomènes du Messianisme, que, pour la principale application des mathématiques au monde physique, il existe trois grands problèmes bien distincts, savoir : 1°. la construction mécanique de l'univers par les corps célestes, qui fait l'objet de la mécanique céleste; 2°. la construction mécanique de la terre, et généralement des globes célestes, par la matière, qui fait l'objet de la géologie mathématique ou de la mécanique terrestre; enfin, 3°. la construction mécanique de la matière par ses forces génératrices, qui fait l'objet de la physique mathématique. Et dans ce même ouvrage, nous avons déjà résolu ces trois grands problèmes, en donnant positivement, pour principes du développement accompli de ces solutions, les trois lois fondamentales qui, dans chaque branche de réalités distinctes qui font les objets respectifs de ces problèmes, régissent tous leurs phénomènes, comme nous allons le rappeler ici en peu de mots.

En premier lieu, pour ce qui concerne la construction mécanique de l'univers par les corps célestes, qui fait l'objet de la mécanique céleste, nous avons déjà fait connaître, dans les Prolegomènes du Messianisme, ses trois lois fondamentales, savoir : 1°. la *LOI SUPRÊME*, sous la marque (65), qui détermine d'une manière systématique et absolue, le mouvement angulaire Φ des astres; 2°. la *PARABOLE-UNIVERSELLE*, sous la marque (73), qui détermine, d'une manière également systématique et absolue, pour toute position angulaire Φ des astres, leur distance r de l'astre central, et qui donne ainsi, pour un nombre quelconque des corps célestes formant un système, la solution définitive et rigoureuse du fameux problème des trois corps; enfin, 3°. la *LOI RÉOLOGIQUE*, sous les marques (33) et (58), qui, par le concours final des éléments hétérogènes dans un système de corps célestes, détermine l'unité des mesures et la périodicité des mouvements. Et dans ces mêmes Prolegomènes, partant de la loi suprême (65), sous sa forme théorique et primitive (1), nous en avons déduit, par la simple application de la loi de création, de cette universelle loi créatrice que nous allons enfin connaître mieux dans l'ouvrage présent, nous en avons déduit, disons-nous, la genèse de toutes les autres lois fondamentales de l'astronomie et de la mécanique céleste. — Que nous reste-t-il donc à faire pour accomplir définitivement

la mécanique céleste, cette première et haute branche des mathématiques appliquées? — Il nous reste à opérer 1°. son *accomplissement algorithmique*, en donnant, d'une manière précise, toutes les méthodes nécessaires à la solution définitive des problèmes qu'impliquent les susdites diverses lois fondamentales de la mécanique céleste; 2°. son *accomplissement dynamique*, en complétant ces primitives lois fondamentales par toutes leurs lois secondaires, et en les appliquant ainsi à la solution définitive et rigoureuse des problèmes accessoires, tels que ceux de la précession des équinoxes et de la libration de la lune, qui se trouvent impliqués dans ces primitives lois fondamentales; enfin, 3°. son *accomplissement philosophique*, en donnant la déduction ou la démonstration de la susdite loi suprême de la mécanique céleste, et en dévoilant le système général du monde, dont notre système solaire n'est qu'un cas très-particulier, et dont la science n'a même pas encore conçu le problème. — Or, c'est ce triple accomplissement définitif de la construction mécanique de l'univers, qui fait l'objet de la *Réforme de la Mécanique céleste*, de cette réforme inattendue que nous avons annoncée plus haut, et qui portera en outre le titre de *Système général du Monde*. — Comme nous l'avons déjà dit, cet ouvrage, formant le second de la suite des ouvrages pour lesquels nous traçons ce Programme, paraîtra immédiatement et incessamment après l'ouvrage présent. Et c'est dans l'article concernant l'accomplissement algorithmique de la mécanique céleste que seront développées les susdites méthodes universelles des mathématiques, savoir, la *Méthode Supraïale* et la *Méthode Primordiale*, telles que, d'après ce que nous avons dit plus haut, dans la première Classe de problèmes, elles dérivent immédiatement de la loi suprême des mathématiques, et telles que, il y a trente ans, elles auraient paru dans le troisième tome de la *Philosophie de la Technique algorithmique*, si la production de ces travaux scientifiques n'avait été arrêtée par l'influence des savants dont nous avons parlé plus haut.

En second lieu, pour ce qui concerne la construction mécanique de la terre, et généralement des globes célestes, par la matière, qui fait l'objet de la géologie mathématique ou simplement de la mécanique terrestre, nous avons également fait connaître déjà, dans les *Protégomènes du Messianisme*, ses trois lois fondamentales, savoir, 1°. sa *Loi Supraïale*, sous la marque (LVI), qui détermine la relation générale entre les cinq données géogéniques (LXI) desquelles dépend la structure mécanique, extérieure et intérieure, de notre globe, cette structure intérieure dont la science n'a même pas encore conçu le problème; 2°. son *Problème Universel*, sous la marque (LVI), qui détermine, par les mêmes cinq données géogéniques, la forme extérieure ou la figure de notre globe, figure qui demeure réellement inconnue jusqu'à ce jour; enfin, 3°. sa *Loi Télémologique*, remplacée provisoirement par la loi systématique (LVI) et (LVII) qui en dérive immédiatement et qui déter-

mine, par les conditions géographiques de la surface de la terre, l'intensité de la gravitation primitive à cette surface de notre globe. De plus, dans ces mêmes Prolegomènes, nous avons déjà obtenu les résultats assez importants que voici. — D'abord, par la simple application de la dernière de ces trois lois fondamentales de la vraie science concernant la construction mécanique de la terre, en supposant que ce globe a la forme d'un ellipsoïde, ou du moins une forme peu différente de celle d'un ellipsoïde, nous parvenons, sous la marque (xxvii), à découvrir le théorème général qui dans des corps célestes de cette forme, fixe la relation entre l'aplatissement Θ , la force centrifuge g sous l'équateur, et l'augmentation Γ de la pesanteur sous les pôles; théorème dans lequel entre un élément indéterminé m qui dépend de la distribution des masses dans un tel corps céleste. Et nous en déduisons immédiatement, sous la marque (xxix), la preuve de ce que le fameux théorème de Clairaut, en le prenant dans toute sa généralité, ainsi que le considèrent les savants, est faux. Et comme ce théorème, d'après ce que nous avons reconnu sous les marques (xxii) à (xxv), n'est rien autre qu'une induction générale tirée des théorèmes extrêmes de Newton et de Huyghens, dont le premier suppose l'homogénéité de la masse de la terre et dont le second suppose la concentration de cette masse au centre de ce globe, nous avons été fondé, sans aucune autre considération, ni à priori, ni même à posteriori, à reconnaître que ces trois théorèmes, qui constituent la base actuelle de toute la science sur la forme de la terre, sont faux; et par conséquent que les académiciens de Paris, qui se prévalent du théorème de Clairaut, ne répandent que des erreurs pour tout ce qui concerne la forme de la terre. Bien plus, pour reconnaître la cause de cette erreur universelle, nous sommes remonté aux principes dont on déduisait ces prétendus théorèmes; et nous avons ainsi reconnu que la cause de cette erreur consistait en ce que la théorie mathématique des fluides, dans sa partie dynamique et même dans sa partie statique, telle qu'elle fut surtout confirmée par la science matérialistique de d'Alembert, est complètement fautive, en ce que, au lieu d'être la théorie des fluides, elle n'est proprement que la théorie de la poussière ou d'un amas de corpuscules indéfiniment déliés. — En conséquence, nous avons reproduit, dans les Prolegomènes du Messianisme (pages 311 à 318), les vraies lois, au nombre de sept ou strictement de cinq, de la théorie mathématique des fluides, spécialement pour leur partie statique, sur laquelle on fonde la détermination de la forme de la terre; et nous y avons montré que les prétendus théorèmes de Newton, de Huyghens, et de Clairaut, qui forment la science actuelle concernant la mécanique terrestre, ne répondent nullement à ces véritables lois de l'équilibre des fluides. — Mais, laissons là ces erreurs; et voyons ce que nous avons déjà obtenu de vrai dans les susdits Prolegomènes. — En nous bornant d'abord à ne consi-

dérer la terre que comme un ellipsoïde irrégulier, ou du moins comme un corps analogue à un tel ellipsoïde, pour pouvoir obtenir, en attendant, par le moyen des nombreuses observations que l'on a faites déjà, au moins une première et approximative détermination de la forme de la terre, à la place des erreurs que répandent les académiciens de Paris, il suffisait d'ajouter, au susdit théorème général (xxvii) et à son corollaire (xxviii) et (xxxi), la loi générale que suit la gravitation à la surface d'un tel corps ellipsoïdique; et cette loi, nous l'avons produite sous la marque (xxxvii), en la déduisant uniquement de la susdite loi téléologique ou systématique (xvii) concernant la construction mécanique de la terre. Or, cette loi (xxxvii) ou (xxxix), qui se trouve ainsi déduite uniquement de la loi systématique (xvii); se trouve parfaitement d'accord avec celle qui, en faisant tout à fait abstraction de la construction de la terre, et en ne tenant compte que de la force centrifuge qui est produite par la rotation du globe, s'établit immédiatement sur un corps ayant la forme d'un ellipsoïde; et cette conformité des résultats offre ici une vérification de la loi systématique (xvii). Mais, les académiciens de Paris, qui obtiennent cette facile loi de gravitation (xxxix) uniquement par une telle considération de la force centrifuge exercée sur un ellipsoïde en rotation, confondent cette loi vraie avec le faux théorème de Clairaut, lequel dérive de tout autres principes, et nommément de la susdite fausse théorie des fluides; et, par la vérité de cette facile loi de gravitation, vérité que l'on induit approximativement de quelques observations, ces académiciens veulent prouver la vérité du faux théorème de Clairaut, qui est tout autre chose et qui n'a même aucune connexion quelconque avec cette loi de la gravitation. Il reste à savoir si cette confusion de deux choses tout à fait hétérogènes est faite à dessein ou par ignorance; dans le premier cas, que nous ne saurions admettre, ce serait un mensonge indigne, ayant pour but le triomphe de l'erreur; et dans le second cas, qui est possible, il suffira sans doute d'éclairer ces savants illustres pour les faire renoncer à cette grossière erreur. Hélas! jusqu'à présent, nous l'avons fait en vain dans nos *Prolegomènes*! — Quoi qu'il en soit de ces Messieurs, nous avons montré, dans ces *Prolegomènes*, comment, par la réunion des deux lois (xxxvi) et (xxxix), dérivant l'une et l'autre de la loi téléologique ou systématique (xvii) concernant la construction mécanique de la terre, on peut déjà aujourd'hui, par le moyen des observations sur la longueur du pendule et des mesures géodésiques, telles qu'on les a actuellement, obtenir une première détermination véritable de la forme de la terre, en supposant, ce qui ne peut différer beaucoup de la vérité, que cette forme est analogue à celle d'un ellipsoïde. Et de cette même loi téléologique ou systématique (xvii), en supposant aussi provisoirement que la forme de la terre est analogue à celle d'un ellipsoïde, nous avons déduit en outre, dans ces *Pro-*

légomènes du Messianisme, sous les marques (LXXII) et (LXXVIII), la loi que suit la répartition réelle des masses dans l'intérieur de la terre, non comme une simple hypothèse, plus ou moins probable, mais comme une vérité réelle et infaillible. — Que reste-t-il donc maintenant à faire pour accomplir définitivement cette géologie mathématique, cette mécanique terrestre, formant la seconde, non moins importante, et plus difficile branche des mathématiques appliquées? — Il nous reste également à opérer ici un triple accomplissement de cette mécanique terrestre, savoir : 1°. son *accomplissement algorithmique*, en déduisant, des trois lois fondamentales que nous venons de signaler, telles qu'elles sont produites dans les Prolégomènes, toutes leurs conséquences rigoureuses, soit pour la structure extérieure ou la forme de la terre, soit pour sa structure intérieure, la disposition réelle de ses masses; 2°. son *accomplissement dynamique*, en complétant ces primitives lois fondamentales par toutes leurs lois secondaires, et en les appliquant ainsi à la détermination facile, sur les différents points de notre globe, des susdites cinq données géogéniques (LXII), desquelles dépend, comme de sa manifestation extérieure, la vraie constitution mécanique de la terre; enfin, 3°. son *accomplissement philosophique*, en donnant la déduction ou la démonstration des susdites trois lois fondamentales de la mécanique terrestre, et cela en les déduisant ainsi, non-seulement des vraies lois de l'équilibre des fluides, mais même indépendamment de ces lois, pour ne rien postuler sur la formation primitive de notre globe. — Or, c'est de nouveau ce triple accomplissement définitif de la construction mécanique de la terre ou généralement des corps célestes qui, sous le titre de *Construction générale des Corps célestes ou Réforme de la Mécanique terrestre*, fera l'objet du sixième dans la suite des ouvrages dont celui-ci est le premier, et pour lesquels nous traçons ce Programme. — Tout ce que nous ajouterons ici, par anticipation sur ce sixième ouvrage, c'est que l'accomplissement algorithmique qui en fera la première partie, sera opéré, non-seulement par les susdites méthodes universelles, la méthode suprême et la méthode primordiale, qui seront développées dans le second ouvrage, dans la Réforme de la Mécanique céleste, mais de plus par l'application immédiate du problème-universel des mathématiques, que nous avons caractérisé plus haut, dans la deuxième Classe de problèmes. C'est ainsi, en effet, que, dans ce sixième ouvrage, dans cette Réforme de la Mécanique terrestre, nous donnerons l'intégration rigoureuse de la susdite équation aux différentielles partielles qui, sous la marque (LVI) des Prolégomènes, forme le problème-universel de cette mécanique terrestre. Et nous donnerons ainsi cette intégration rigoureuse de l'équation (LVI) pour les deux cas principaux et essentiellement distincts, savoir, pour le cas de la forme stable de la terre, qui constitue proprement la figure permanente de notre globe, et qui dépend de la gravitation constante qu'exerce, à chaque

point de sa surface, la masse de la terre, et pour le cas de la forme variable de ce globe, qui constitue le phénomène des marées, et qui dépend de cette gravitation primitive, altérée par l'influence de l'action verticale du soleil et de la lune à chaque point de la surface de la terre. On conçoit que, de cette manière, nous obtiendrons, pour chaque instant donné, la véritable forme du sphéroïde aqueux et, par conséquent, la détermination exacte de toutes les circonstances de ce phénomène des marées, où nous aurons occasion de signaler les graves et innombrables erreurs que, d'après la fausse théorie de Laplace, fondée sur la susdite fausse théorie des fluides, le Bureau des Longitudes de Paris produit annuellement dans ses diverses éphémérides, en exposant ainsi à des périls certains la marine française.

En troisième et dernier lieu, pour ce qui concerne la construction mécanique de la matière par ses forces génératrices, qui fait l'objet général de la physique mathématique, nous avons dévoilé, dans les Prolegomènes du Messianisme, les deux éléments qui, dans chacun des états progressifs de l'élaboration de la matière, en sont les forces génératrices, et qui, dans l'état primitif, servant de base à ces développements progressifs de la nature, constituent les deux éléments primordiaux de la matière, savoir : l'un, l'élément planétaire, formant les conditions mécaniques, et servant de base, et l'autre, l'élément byléique, formant les conditions caloriques, et servant ainsi de préparation ou de disposition intime pour la véritable et progressive genèse de la qualité spécifique de la matière. Le premier de ces deux éléments primordiaux, l'élément planétaire, fixe, dans chaque planète et ses satellites, lorsqu'elle en a, l'intensité primitive de la force mécanique dans la matière générale de cette planète ; et le second de ces deux éléments, l'élément byléique, constitue la température absolue ou normale de toute matière spécifique, et forme ainsi la préparation à sa qualité chimique. Il s'ensuit que la science générale de la construction de la matière par ses forces génératrices, science qui forme la physique générale, et spécialement la physique mathématique, lorsqu'il s'agit de formuler numériquement ses diverses lois, se compose de deux parties essentiellement distinctes qui, en se fondant séparément sur chacun des deux éléments primordiaux de la matière, ont, pour domaines respectifs, l'une, les conditions mécaniques de la matière, qui détermine conséquemment les lois de l'action de ses forces motrices, et qui constitue ainsi l'objet général de la Mécanique, et l'autre, les conditions caloriques de la matière, qui détermine conséquemment les lois de l'action de ses forces formatrices, et qui constitue ainsi l'objet général de la Physique strictement dite. — Dans les Prolegomènes du Messianisme, nous avons fixé, non-seulement les différentes branches progressives de ces deux parties constitutives de la science générale de la matière, mais même déjà leurs respectives lois fondamentales. Ainsi, dans ce qui concerne la Mécanique, nous avons déduit, de la loi suprême de

toute la mécanique, la loi fondamentale (LXXXVII) pour la dynamique, et la loi fondamentale (LXXXIII) pour la statique; et dans ce qui concerne la *Physique strictement dite*, nous avons donné, sous les marques (LXVI) et (LXVII), la loi suprême pour toutes les forces formatrices de la matière, depuis la chaleur jusqu'à la fibrine éleuthérique de l'intelligence. Et pour ce qui concerne les différentes branches progressives de chacune de ces deux parties constitutives de la matière, elles formeront, telles que nous les avons indiquées dans les *Prologomènes*, les objets distincts de plusieurs ouvrages qui, dans la suite des ouvrages que nous annonçons par ce Programme, seront, d'abord, le quatrième, le septième, et le neuvième, sous le titre général de *Philosophie de la Mécanique*, et ensuite, le dixième et le douzième, sous le titre général de *Philosophie de la Physique*, en embrassant ici, par le mot physique, tout ce qui, dans la construction de la matière, dépasse ses simples conditions mécaniques. Ainsi, dans cette *Philosophie de la Mécanique*, en considérant que les lois du mouvement et de l'équilibre des corps solides, c'est-à-dire, de leur *MOUVEMENT INERTE* et *ÉLÉMENTAIRE*, sont déjà connues suffisamment, nous traiterons d'abord séparément, dans le quatrième des ouvrages présents, la *Mécanique des Fluides*, c'est-à-dire, les lois de leur mouvement inerte et *SYSTÉMATIQUE*, nommément l'*Hydrostatique* et l'*Hydrodynamique*, que nous donnerons de cette manière, avant la Réforme de la Mécanique terrestre, où ces lois mécaniques des fluides, d'après ce que nous avons vu plus haut, constituent, en partie, les principes fondamentaux. Et nous y traiterons ensuite, parmi les lois des mouvements élémentaires, la théorie et la technique du *MOUVEMENT SPONTANÉ* des corps, de ce mouvement dont les savants ne se sont pas encore aperçus jusqu'à ce jour. C'est proprement cette mécanique nouvelle du mouvement spontané des corps, d'après l'idée que nous en avons déjà donnée dans quelques brochures, principalement dans l'opuscule intitulé : *Urgente réforme des chemins de fer et de toute la locomotion terrestre, présentée au Ministre des travaux publics de France*, c'est, disons-nous, cette nouvelle mécanique qui formera l'objet du septième ouvrage, sous le titre de *Réforme scientifique de la locomotion*, tel que cet ouvrage, composé de trois Mémoires, se trouve maintenant sous les yeux du Conseil général des Ponts et Chaussées de France. Enfin, pour accomplir cette première partie constitutive de la science de la matière, qui a pour objet général ses *FORCES MOTRICES*, nous donnerons, dans le neuvième ouvrage, la *Philosophie générale de la Mécanique*, pour la mouvement inerte et pour le mouvement spontané des corps, c'est-à-dire, pour leurs mouvements élémentaires, où nous fixerons, d'après des principes absolus, les véritables principes de cette partie de la mécanique, dans sa statique et dans sa dynamique, en observant que, pour ce qui concerne ces principes premiers, il règne encore aujourd'hui une véritable confusion philosophique, surtout parmi les savants dont nous avons

parlé plus haut. — Quant à notre *Philosophie de la Physique*, cette deuxième partie constituante de la science de la matière, qui a pour objet général ses forces formatrices, nous donnerons, dans le dixième ouvrage, les conditions élémentaires de ces forces, c'est-à-dire, la *Modification mécanique de la matière par l'influence de ses conditions caloriques*, et la *Théorie mathématique de la Chimie*, telles que nous les avons, non-seulement signalées, mais déterminées déjà suffisamment dans les *Prolegomènes du Messianisme*, en y faisant connaître les lois des trois modes distincts de la construction de la matière, savoir, de ses états de gazéité, de liquidité et de solidité, et les lois fondamentales de la chaleur et de l'affinité de ce que l'on nomme les atomes chimiques, et en y montrant que ces atomes ne sont point des corpuscules solides comme on le croit encore généralement, et qu'il existe, entre ces atomes, non-seulement une affinité chimique, mais de plus une affinité mécanique, de laquelle dépend le phénomène d'isomorphie, jusqu'à présent inexplicable par les chimistes. Dans ce dixième ouvrage, nous donnerons, en forme d'appendice, un aperçu de la *Philosophie générale de l'Optique et de l'Acoustique*, en considérant que, d'après la loi de création, la lumière et le son forment, dans la genèse de la nature, les éléments corrélatifs de la matière et de la chaleur sur lesquelles se fondent les conditions élémentaires des forces formatrices, ces conditions inférieures qui font l'objet de cette première partie de notre Physique générale. Et dans le douzième ouvrage, nous traiterons, avant que l'on peut déjà les saisir généralement, les conditions systématiques des forces formatrices, ces conditions supérieures qui font l'objet de la seconde partie de notre Physique générale, nommément les conditions systématiques telles qu'elles se développent progressivement dans les *Théories mathématiques de l'Organologie ou Anatomie comparée*, de la *Biologie ou Physiologie*, et enfin de l'*Éléuthérologie intellectuelle ou Psychologie*. De plus, d'après ce que nous avons déjà fait remarquer, nous suivrons partout, dans ces trois branches systématiques de notre Philosophie de la Physique, comme dans ses deux précédentes branches élémentaires, la susdite loi suprême que nous avons donnée, sous les marques (LXVI) et (LXVI)', dans les *Prolegomènes du Messianisme*.

Et pour compléter les trois grands problèmes du monde physique, il nous reste, d'une part, à déterminer la dépendance entre les objets respectifs des deux premiers de ces problèmes, c'est-à-dire, entre un système du monde et la construction des corps célestes qui forment ce système spécial, et de l'autre part, il nous reste à déterminer l'indépendance qui existe entre les différentes branches hétérogènes des forces génératrices de la matière. — Or, pour ce qui concerne, en premier lieu, cette dépendance entre un système du monde et les corps célestes qui forment ce système spécial, elle consiste manifestement dans les relations provenant de l'action réciproque qu'exercent ces corps,

les uns sur les autres, par leurs qualités cosmogoniques distinctes; et ce sont ces relations qui constituent les *phénomènes météorologiques* et qui se manifestent principalement dans l'atmosphère qui environne les corps célestes. Nous traiterons donc, dans notre onzième ouvrage, ces phénomènes météorologiques sous le titre de *Constitution et Variation de l'Atmosphère*, en y joignant la *Théorie générale des Refractions atmosphériques, astronomiques et terrestres*. — Et pour ce qui concerne, en second lieu, l'indépendance qui existe entre les différents ordres progressifs et hétérogènes des forces génératrices de la matière, on conçoit facilement que c'est dans le concours indéterminé de ces forces hétérogènes que se trouve le phénomène physique que l'on nomme HAZARD, dont les conditions très-variées, dépendant des modes distincts suivant lesquels s'exerce ce concours indéterminé de forces hétérogènes, forment l'objet de ce que l'on nomme PROBABILITÉ des événements. Nous traiterons donc, dans le treizième et dernier des ouvrages présents, cette *Théorie générale des Probabilités*. Mais, en considérant cette indétermination absolue qui, dans le concours des forces hétérogènes, est le principe du hasard, nous avons fait reconnaître, dans les Prolegomènes du Mesianisme (pages 43a à 435), la nécessité d'une loi qui le régitte universellement, afin d'éviter les plus grands désordres possibles, en retenant les écarts dans des limites fixes et invariables. — Et par l'introduction de cette loi téléologique du hasard, la science des probabilités présente maintenant deux parties distinctes, savoir : l'une, qui fait abstraction de cette loi, et qui ne fixe ainsi que le MÉCANISME DU HASARD, dont les écarts peuvent devenir indéfinis; et l'autre, qui reconnaît cette loi téléologique, et qui détermine ainsi la FINALITÉ DU HASARD, en faisant entrer en compte l'étendue des écarts. Jusqu'à ce jour, la science des probabilités était réduite à sa première partie, au mécanisme du hasard. Dans l'ouvrage que nous annonçons et qui aura proprement le titre : *Accomplissement de la Théorie générale des Probabilités, par la découverte de la loi téléologique du Hasard, qui en limite les écarts*, dans ce treizième ouvrage, disons-nous, en considérant que les lois du mécanisme du hasard sont déjà connues suffisamment, nous traiterons plus spécialement la seconde partie de cette science, nommément la finalité du hasard, sans toutefois y négliger la première de ces deux parties.

Il est sans doute superflu de prévenir ici que le troisième, le cinquième et le huitième parmi les ouvrages que nous venons d'énumérer, c'est-à-dire, ceux qui ont été omis dans cette énumération, sont destinés à traiter la solution des grands problèmes des mathématiques pures, tels que nous les avons fixés plus haut dans les susdites trois Classes distinctes de problèmes, dépendant respectivement de nos trois lois fondamentales des mathématiques. — Ainsi,

dans le troisième ouvrage, formant le premier de ces ouvrages omis, nous aurions eu à traiter les deux grandes méthodes universelles, savoir, la méthode suprême et la méthode primordiale, telles qu'elles dérivent immédiatement de la loi suprême, de cette première loi fondamentale des mathématiques. Mais, afin de produire sur-le-champ la solution de l'un des plus grands problèmes de la science, et peut-être le plus grand ou du moins le plus important de tous, la Réforme de la Mécanique céleste, nous y donnons, comme nous l'avons dit plus haut, dans l'article concernant l'accomplissement algorithmique de cette mécanique céleste, ces deux méthodes universelles, la méthode suprême et la méthode primordiale, dont nous y avons besoin pour la solution rigoureuse de tous les problèmes de cette haute mécanique. Et alors, nous destinons le troisième ouvrage dont il s'agit, à la Résolution générale des Équations de tous les degrés, telle qu'elle est opérée par la susdite méthode spéciale qu'offrent ici nos nouvelles fonctions alephs, ces éléments essentiels de la loi téléologique, c'est-à-dire, de la troisième loi fondamentale des mathématiques. — Toutefois, pour ne pas perdre entièrement de vue la loi suprême, cette première loi fondamentale, sous laquelle devrait se ranger le troisième ouvrage, nous y ajouterons, en forme d'appendice, l'application de la méthode névristique, telle que nous aurons fait connaître cette application à la résolution des équations dans le second ouvrage, nommément, dans le susdit article concernant l'accomplissement algorithmique de la mécanique céleste. — Quant au cinquième ouvrage, formant le second des trois ouvrages omis dans l'énumération précédente, nous y donnerons effectivement la solution de tous les problèmes des mathématiques pures dont la solution dépend de la solution générale du problème-universel des mathématiques, de cette deuxième de leurs lois fondamentales, c'est-à-dire, la solution de ces problèmes que nous avons signalés plus haut, dans la seconde Classe de problèmes. Et comme tel, ce cinquième ouvrage aura pour titre : *Résolution générale des Équations quelconques, immanentes ou transcendentes, primitives ou dérivées, aux différences et aux différentielles, totales et partielles.* — Enfin, dans le huitième ouvrage, formant le troisième et dernier des ouvrages omis dans l'énumération précédente, nous donnerons de même effectivement la solution des problèmes des mathématiques pures qui, d'après ce que nous avons vu plus haut, forment la troisième Classe de problèmes, dépendant de la troisième et dernière loi fondamentale des mathématiques. Et comme tel, ce huitième ouvrage aura le titre : *Théorie des Nombres, fondée sur la loi téléologique, formant la troisième loi fondamentale des Mathématiques.*

En résumant ici, avec leurs titres respectifs, ces treize ouvrages que nous

nous proposons de publier pour opérer l'accomplissement final de la réforme des mathématiques, par la solution de tous leurs grands problèmes, nous aurons le catalogue suivant :

- 1^{er} *Ouvrage*. — Réforme des Mathématiques, comme prototype de la réforme générale des sciences et de la philosophie, rendue urgente par les graves erreurs scientifiques, politiques, religieuses, et philosophiques, qui causent le périlleux désordre actuel du monde civilisé.
- 2^o *Ouvrage*. — Système universel du Monde, solaire et sidéral, ou Réforme de la Mécanique céleste, fondée sur les trois lois fondamentales et encore inconnues de ce Système universel du Monde.
- 3^o *Ouvrage*. — Résolution téléologique des Équations de tous les degrés, appliquée positivement, en forme d'exemples, jusqu'aux équations du septième degré.
- 4^e *Ouvrage*. — Philosophie de la Mécanique; première section; mouvement inerte, et spécialement mouvement systématique des corps. — Nouveaux principes d'Hydrostatique et d'Hydrodynamique, ou Vraies lois fondamentales de la Mécanique des Fluides, servant à dévoiler la fausse science actuelle concernant la Forme ou la Figure de la Terre, et à fonder la vraie science de cette construction de notre globe.
- 5^o *Ouvrage*. — Résolution générale des Équations quelconques, immanentes ou transcendantes, primitives ou dérivées, aux différences et aux différentielles, totales et partielles, par l'application du Problème-universel des Mathématiques.
- 6^o *Ouvrage*. — Construction générale des Corps célestes, ou Réforme de la Mécanique terrestre, impliquant la structure permanente, extérieure et intérieure, de notre globe, et sa forme ou figure variable, opérée par le phénomène des Marées.
- 7^e *Ouvrage*. — Philosophie de la Mécanique; deuxième section; mouvement élémentaire, et spécialement mouvement spontané des corps. — Réforme scientifique de la locomotion, dans sa théorie, donnant les lois fondamentales de ce mouvement spécial, et dans sa technique, donnant les procédés de son application pratique.
- 8^o *Ouvrage*. — Théorie des Nombres, fondée sur la loi téléologique, formant la troisième loi fondamentale des Mathématiques.
- 9^e *Ouvrage*. — Philosophie générale de la Mécanique; troisième section; mouvements généraux des corps. — Principes philosophiques des mouvements inertes et des mouvements spontanés des corps.
- 10^e *Ouvrage*. — Philosophie de la Physique; première section; conditions élémentaires des forces formatrices de la matière. — Modification mécanique de la matière par l'influence de ses conditions caloriques, et Théorie ma-

thématique de la Chimie, avec un appendice donnant un aperçu de la Philosophie générale de l'Optique et de l'Acoustique.

11° *Ouvrage*. — Constitution et Variation de l'Atmosphère, avec un appendice donnant la Théorie générale des Réfractions atmosphériques, terrestres et astronomiques.

12° *Ouvrage*. — Philosophie de la Physique; seconde section; conditions systématiques des forces formatrices de la matière. — Théories mathématiques de l'Organologie ou Anatomie comparée, de la Biologie ou Physiologie, et enfin de l'Éleuthérologie intellectuelle ou Psychologie.

13° *Ouvrage*. — Accomplissement de la Théorie générale des Probabilités, par la découverte de la loi téléologique du Hasard, qui en règle les écarts.

A ces treize ouvrages systématiques, qui sont fixés évidemment, d'une part, par les trois lois fondamentales des mathématiques, et de l'autre, par les trois grands problèmes du monde physique, à ces ouvrages systématiques, disons-nous, qui serviront ainsi à opérer l'accomplissement de la réforme des mathématiques par la solution de tous leurs grands problèmes, sera joint un ouvrage supplémentaire, qui aura le titre : *Miscellanées mathématiques*, et qui contiendra de nombreuses méthodes nouvelles pour toutes ces branches de mathématiques, telles que de nouvelles méthodes pour calculer les orbites des comètes et l'occultation des étoiles, une nouvelle théorie et technique micrométrique, dans son application aux instruments géodésiques, nautiques et astronomiques, de nouveaux calculs pour l'aberration des astres mobiles, etc., etc. — Et quant à l'ordre que nous venons d'indiquer pour la production de ces ouvrages, il est fondé sur la méthode d'aller du connu à l'inconnu dans cet accomplissement de la réforme des mathématiques.

Mais, aurons-nous encore assez de temps pour produire tous ces ouvrages? — C'est ce que Dieu seul peut savoir. — Dans le cas où, à l'âge de l'auteur et sans protection nationale, il lui serait impossible de le faire, la grave responsabilité en resterait aux hommes qui, en 1816, sont parvenus à l'empêcher de continuer ses publications, et qui, durant les trente années qui viennent de s'écouler, après avoir causé la destruction de ses ouvrages en France, l'ont réduit au silence qu'il a été forcé de garder jusqu'à ce jour!

Nous ne parlerons pas des ouvrages philosophiques de l'auteur, notamment de ses ouvrages concernant la Philosophie absolue, le Messianisme, parce que l'Accomplissement de la Réforme des Mathématiques dont il s'agit maintenant, doit précisément servir de garantie scientifique et préalable à cette philosophie absolue, dont les résultats dépassent tellement la sphère des vérités concev-

bles que, sans une garantie aussi positive qu'inattendue, ou ose à peine les annoncer. — Toutefois, pour l'intelligence complète de la présente réforme des mathématiques, les géomètres doivent approfondir les principes mathématiques qui, dans le dernier de ces ouvrages philosophiques, dans les *Prologomènes du Messianisme*, que nous avons été forcé de citer si souvent, se trouvent exposés et déduits rigoureusement de la loi de création elle-même. D'ailleurs, ils pourront, en même temps, y entrevoir les vérités absolues auxquelles l'homme, comme être raisonnable, qui doit opérer sa propre création, se trouve enfin appelé aujourd'hui. Pour le moins, les géomètres sauront y apercevoir les principes d'après lesquels, si l'auteur ne pouvait le faire lui-même, ils pourront un jour accomplir ces nouvelles vérités mathématiques. Aussi, dans ces *Prologomènes du Messianisme*, l'auteur dit-il expressément :

- Dans le cas où il plairait à Dieu de nous retirer de ce monde, avant que nous puissions accomplir ces tâches difficiles, pour lesquelles, jusqu'à présent,
- nous n'avons trouvé aucun appui de nos contemporains, les principes que nous venons de fixer, suffiront à ceux qui, après nous, continueront à développer les présentes vérités messianiques, pour pouvoir, en suivant ces principes, établir toutes ces hautes philosophies scientifiques. »

Quoi qu'il en arrive de cet accomplissement futur des hautes philosophies scientifiques que nous venons de signaler, les savants auxquels nous recommandons d'approfondir les *Prologomènes du Messianisme*, pour se former une idée exacte de cette réforme universelle des sciences mathématiques, surtout ceux des savants parmi lesquels nous avons publié tous nos travaux, ne manqueront pas au moins, comme nous devons l'espérer, de s'apercevoir que, dans ces *Prologomènes*, l'auteur, en faisant abstraction du triste accueil que ses travaux ont trouvé dans ce pays, a payé la dette de la longue hospitalité qu'à tous autres égards il a reçue en France. En effet, dans ces *Prologomènes du Messianisme*, il a dévoilé le grand et glorieux destin de la France, qui, jusqu'à ce jour, demeure inconnu universellement. Et il l'y a dévoilé comme une de ces VÉRITÉS ABSOLUES auxquelles l'humanité est appelée aujourd'hui pour accomplir ses destinées sur la terre. Ainsi, quand même tous ses autres travaux scientifiques périraient en France, à l'instar de ses ouvrages mathématiques qui y ont été détruits, et quand même il ne pourrait ainsi léguer rien à la France pour payer la dette de sa généreuse hospitalité, il lui restera infailliblement, pour pouvoir le faire, la découverte du DESTIN SUPRÊME DE CETTE GRANDE NATION, ce destin qui, malgré tous les écarts concevables, ne pourra périr et se réalisera nécessairement un jour, parce qu'il est l'ŒUVRE INDESTRUCTIBLE DU CRÉATEUR.

FIN DU PROGRAMME.

DEUXIÈME PARTIE.

RÉFORME DES MATHÉMATIQUES,

COMME PROTOTYPE

DE LA RÉFORME GÉNÉRALE

DES SCIENCES ET DE LA PHILOSOPHIE.

On conçoit facilement que l'exécution de cette réforme générale des sciences exige préalablement la découverte des principes absolus du savoir humain, c'est-à-dire, l'établissement péremptoire de la PHILOSOPHIE ABSOLUE. Ce n'est en effet que dans ce final savoir-suprême de l'homme que peuvent être dévoilées, d'une part, les conditions didactiques de l'existence de la vérité, soit scientifique, soit philosophique, soit enfin religieuse, et de l'autre part, les conditions historiques de son développement, c'est-à-dire, sa production progressive et son établissement final dans les différentes périodes historiques de l'humanité.

Or, dans nos ouvrages messianiques, ayant pour objet cette philosophie absolue, surtout dans le dernier de ces ouvrages, formant les *Prolegomènes du Messianisme*, toutes ces conditions, didactiques et historiques, de la création de la vérité se trouvent déjà fixées suffisamment pour que, par leur moyen, nous puissions maintenant déduire et expliquer ici la réforme que, d'après ces conditions absolues, nous avons déjà opérée effectivement dans les mathématiques, dans cette plus grande des sciences, comme prototype de la réforme générale de tout le savoir humain. Ainsi, dans ce dernier de nos ouvrages messianiques, dans les *Prolegomènes*, que nous venons d'indiquer, et notamment dans la doctrine de cette philosophie absolue (pages 42 à 546), et surtout dans sa fondation finale (pages 546 à 556), formant déjà en grande partie, pour l'accomplissement de l'Apodictique messianique, de ce définitif système du savoir-suprême, la fondation péremptoire de la vérité sur la terre,

nous trouverons effectivement toutes les susdites conditions, didactiques et historiques, qui sont nécessaires pour l'actuel établissement de la finale réforme des sciences et de la philosophie. Nous pourrions même, avec ces conditions supérieures de la fondation de la vérité, obtenir déjà une anticipation sur la déduction a priori de la loi de création qui, présidant à la génération absolue de toutes les réalités, devient la règle normale de la réforme des sciences dont il s'agit; une anticipation, disons-nous, sur cette haute déduction créatrice qui, d'après ce que nous avons vu dans les *Prolegomènes*, ne pourra être accomplie finalement qu'en remontant jusqu'à l'essence même de l'absolu. Et nous pourrions également, avec ces conditions supérieures de la création de la vérité, en y suivant le tableau génétique de la philosophie absolue de l'histoire (pages 134 à 161), et en y joignant le complément de notre critique période actuelle (page 203), déterminer l'époque précise, qui se trouve être la nôtre, où doit enfin s'opérer cette réforme générale des sciences et de la philosophie. En effet, l'un des résultats principaux de l'établissement de la réalité de l'absolu, à laquelle doit nous préparer notre critique période présente, sera manifestement la fixation péremptoire des sciences, en les ramenant, par une réforme urgente, à leurs philosophies respectives qu'il faut créer (*).

Jusqu'à ce jour, on ne fait, pour ainsi dire, qu'accumuler des matériaux dans presque toutes les sciences. Leur véritable esprit, leur philosophie, paraît être méconnu des savants, même des plus distingués. D'ailleurs, la tendance scientifique qui a dominé dans la quatrième ou dernière période du développement de l'humanité, et qui domine encore dans notre présente période historique, ne pouvait porter les savants au delà de la simple généralisation des résultats particuliers qu'ils ont obtenus par leurs travaux; généralisation qui, dans leur impulsion vers la certitude purement relative aux conditions physiques des réalités créées, devait leur sembler le degré suprême du savoir de l'homme. Aussi, les premiers savants de nos jours qualifient-ils pompeusement du titre de *philosophie* cette généralisation contingente de leurs connaissances respectives; et, s'arrêtant ainsi aux bornes de cette première généralisation, leurs vœux ne manifestent chez eux aucun besoin d'un savoir supérieur.

Il n'en sera pas de même dans la sixième ou nouvelle période pour laquelle nous opérons maintenant la transition, dans notre cinquième et critique période présente. — La réalité de l'absolu se trouvant alors établie, toutes les

(*) Tout ce qui suit ici concernant cette réforme générale des sciences, a été écrit déjà en 1845, et faisait partie du troisième tome de l'ouvrage intitulé : *Création de l'humanité*, qui fut si scandalusement amoindrie en 1846. — Il en est de même de presque tous les ouvrages qui sont annoncés dans le Programme précédent, et que nous devons publier actuellement, après trente années de silence, auquel l'auteur a été réduit par la défective influence des savants par brevet.

recherches scientifiques devront être attachées à cette réalité suprême. Il faudra, pour satisfaire à ces nouvelles vues de l'humanité, poser les sciences sur des bases inébranlables, assurer l'infaillibilité de leurs résultats en élevant leur certitude au plus haut degré, fixer positivement leur véritable signification et ramener ainsi leurs lois respectives à une loi universelle qui, vu l'unité de l'absolu, doit nécessairement régir seule la création entière; en un mot, pour satisfaire à ces vues sublimes, il faudra attacher les sciences à leurs principes premiers ayant le caractère de nécessité, qui, comme nous l'avons reconnu dans les *Prolégomènes*, est la critérium de la vérité sous les conditions du temps, sous lesquelles précisément ont lieu toutes les sciences en général. Or, pour chaque science, c'est proprement le système de ses principes nécessaires qui constitue la véritable philosophie de cette science; car, suivant ce que nous venons de dire, c'est précisément dans ce système de principes nécessaires que se trouve la véritable signification de la science, son *signification absolue* qui, pour tout ordre intellectuel, est généralement l'objet de la philosophie de ce spécial ordre intellectuel. Il faudra donc, avant tout, aborder l'établissement de cette véritable philosophie des sciences, de celle dont nous venons de fixer le caractère et par conséquent le sens précis. Ensuite, pour réaliser la science elle-même, il faudra, avec les principes nécessaires que donnera ainsi la philosophie de chaque science, déduire ses lois spéciales, en procédant dans cette recherche, soit par le raisonnement, comme dans les sciences rationnelles, soit par l'expérience, comme dans les sciences expérimentales.

De cette manière, suivant une méthode dirigée par des principes nécessaires, les lois spéculatives ou pratiques, constituant les diverses sciences qu'on aura reconnues, auront, comme leurs principes philosophiques, la caractéristique de nécessité et formeront ainsi de véritables lois, telles que, dans l'idéal des sciences, l'homme désire les connaître; tandis que, jusqu'à ce jour, suivant une simple induction fondée sur une généralisation contingente des faits, ces lois, spéculatives ou pratiques, qu'on a pu obtenir, ne forment encore que des lois présomptives qui ne peuvent nullement satisfaire la tendance infinie de notre raison.

Mais, doit-on espérer raisonnablement qu'une si grande réforme de notre savoir scientifique puisse être effectuée? Nous répondrons ici par l'adage populaire : *Qui peut plus, peut moins*. En effet, la réalité de l'absolu lui-même se trouve déjà établie, et la découverte de son essence intime est possible, comme nous l'avons reconnu dans les *Prolégomènes*; ainsi, à plus forte raison, l'établissement de la nouvelle et véritable philosophie des sciences, qui doit être dérivée de la seule réalité de l'absolu, est possible. Bien plus, pour donner d'avance une idée de l'importance du traité du savoir-suprême, formant notre Apodictique messianique, telle que nous la déduirons de cette

même réalité de l'absolu, nous avons, par anticipation, effectué déjà cette grande réforme scientifique dont il est question, en l'exécutant sur la première et la plus grande des sciences, les mathématiques, par le moyen de la philosophie nouvelle que nous lui avons donnée. Il suffit actuellement de dégager cette philosophie effective de tout ce qui concerne spécialement les mathématiques, et l'on obtiendra sur-le-champ le prototype de la philosophie de toutes les sciences en général. Nous allons le faire, en suivant, pour ainsi dire, littéralement notre Philosophie des Mathématiques.

• Devant fournir le système des principes nécessaires, la philosophie de chaque science a pour but l'application des lois pures du savoir, transcendentes et logiques, à l'objet spécial de la science dont il s'agit; et elle doit ainsi, suivant cette idée, déduire, sur une telle voie subjective, en ne se dirigeant que par les lois propres de notre savoir, les LOIS RAISONNABLES de cette science, ou ses PRINCIPES PHILOSOPHIQUES. — Les sciences respectives elles-mêmes partent de ces principes et en déduisent, sur une voie purement objective, sans remonter jusqu'aux lois intellectuelles, les propositions ou lois secondaires dont l'ensemble fait l'objet de ces sciences. •

• Pour mieux approfondir la nature de la philosophie des sciences, il faut savoir qu'il existe, pour les fonctions intellectuelles de l'homme, des lois déterminées. Ces lois, transcendentes et logiques, c'est-à-dire, concernant le contenu et la forme de notre savoir, caractérisent l'intelligence humaine, ou plutôt constituent la nature même du savoir de l'homme. Or, en appliquant ces lois, prises dans leur pureté subjective, à l'objet spécial d'une science, il en résulte, dans le domaine de notre savoir, un système de lois particulières, qui régissent les fonctions intellectuelles spéciales, portant sur l'objet de cette application. — Ce sont ces lois particulières qui constituent les principes philosophiques des sciences, principes qui, étant déduits des lois primordiales de notre intelligence, jouissent, comme ces dernières, du caractère de nécessité, de ce caractère qui forme, sous les conditions du temps, le critérium de la vérité. — Il faut encore remarquer que, suivant cette génération de la philosophie des sciences, cette philosophie donne, en même temps, l'explication des phénomènes intellectuels que présentent les sciences respectives. En effet, l'ensemble d'une science forme un certain ordre de fonctions intellectuelles, et ces fonctions, enfilées sous les conditions du temps, sont de véritables phénomènes; de manière que les lois de ces fonctions, qui sont en même temps les lois de ces phénomènes, contiennent les conditions de la possibilité de ces derniers, et donnent par là leur explication philosophique. •

• Or, dès l'abord de la philosophie d'une science, deux points de vue se présentent : l'un subjectif, portant sur le savoir; l'autre objectif, portant sur la science elle-même. Sous le premier de ces points de vue, il s'agit des

• lois que suit le savoir de l'homme, appliqué à l'objet spécial d'une science ;
 • sous le second, il s'agit des lois que suit cet objet scientifique dans l'application du savoir de l'homme. Les premières de ces lois, les lois *subjectives*, sont, pour ainsi dire, les lois que reçoit notre cognition par l'objet d'une science ; et les secondes, les lois *objectives*, sont les lois que reçoit l'objet de la science par la cognition de l'homme. »

• Les lois subjectives que nous venons de signaler, embrassent le contenu et la forme de notre savoir scientifique. — Le contenu cognitif présente les différentes parties essentielles, les différents objets particuliers, distincts et nécessaires, dans la science dont il s'agit : il constitue l'*Architectonique* de la science. La forme cognitive présente les différentes manières d'envisager ces objets particuliers, les différents modes intellectuels de leur connaissance : elle constitue la *Méthodologie* de la science. — Quant aux lois objectives que nous venons également de signaler, et qui sont proprement les lois de l'objet même dont la connaissance scientifique est en question, elles constituent la *Métaphysique* de la science. »

Ainsi, la philosophie de toute science se compose manifestement de l'architectonique, de la méthodologie et de la métaphysique de cette science ; et, suivant la déduction que nous venons de donner de ces trois parties constitutantes, on connaît complètement la nature des fonctions de toute philosophie scientifique. — L'architectonique a pour but de déduire, des lois mêmes du savoir, et nommément de sa loi fondamentale, que nous allons signaler, les divers objets distincts et nécessaires, les différentes branches de la science. La méthodologie a pour but la détermination des diverses méthodes qu'on doit suivre, et qu'on suit nécessairement dans ces diverses branches scientifiques. Enfin, la métaphysique a pour but de déduire les lois fondamentales qui régissent l'objet même de la science, lois qui sont proprement les principes premiers ou philosophiques de cette science.

Mais, jusque là, nous n'avons encore, pour ainsi dire, que les trois organes ou les trois dispositions intellectuelles qui doivent et peuvent engendrer la philosophie de toute science. Leurs produits spéculatifs ou les résultats que, pour chaque science respectivement, on obtient par l'usage ou l'application de ces dispositions intellectuelles, ne paraissent pouvoir être connus que par suite de cette application elle-même, lorsque, avant tout, les objets respectifs des sciences sont donnés. Cependant, en réfléchissant sur l'extrême nécessaire de l'absolu, et par conséquent sur l'unité correspondante de l'univers, on conçoit que la génération des divers systèmes d'être ou de connexions de savoir composant l'univers, doit suivre une seule et même loi, formant en quelque sorte la loi ou création. Alors, en observant que ce sont précisément ces divers systèmes d'être ou de faits de savoir composant l'univers, qui constituent respectivement les objets des diverses sciences, on conçoit de plus qu'a-

vant même de connaître positivement ces objets respectifs des sciences, on pourrait, si la loi de création était connue, déduire à priori la nature générale de tous ces divers systèmes scientifiques; de sorte qu'on obtiendrait ainsi l'architectonique générale de toutes les sciences, formant l'une des trois parties constitutives de leur philosophie, et ayant précisément pour but la détermination des objets particuliers et distincts qui entrent dans la construction des systèmes scientifiques. Nous concevons donc la possibilité d'établir à priori cette branche principale, l'architectonique, dans la philosophie des sciences, c'est-à-dire, avant même que les objets respectifs de ces dernières soient donnés positivement; et, pour effectuer cette œuvre, il ne manque que de connaître la loi de création, laquelle doit pouvoir être déduite de la réalité même de l'absolu.

Déjà, dans l'exécution de notre Philosophie des Mathématiques que nous avons signalée plus haut, cette loi de création doit transpirer dans l'architectonique de cette philosophie spéciale; et en effet, on l'y voit assez clairement pour pouvoir en quelque sorte la dégager de ce système philosophique particulier. Mais, nous allons ici, par anticipation sur sa susdite déduction absolue, l'établir en quelque sorte tout à fait à priori, en la déduisant, autant que possible, de la seule réalité de l'absolu, où transpire et doit se manifester nécessairement l'origine de cette grande loi.

D'abord, pour en venir à l'établissement des êtres ou des faits de savoir qui soient DISTINCTS, ce qui est la condition de tout système de réalités, il faut nécessairement que la réalité absolue y introduise l'INDIVIDUALITÉ en opposition à l'UNIVERSALITÉ qui, en soutenant l'unité de l'absolu, rend possible cet établissement de l'individualité; c'est-à-dire, il faut, dans chaque système, concevoir, d'une part, des modes distincts et indépendants pour la génération individuelle des êtres ou des faits de savoir, et, de l'autre part, des modes universels de cette génération pour soutenir ou retrouver l'unité primordiale entre ces êtres ou leurs connexions de savoir. — Cette double considération nécessaire introduit ainsi, dans chaque système scientifique, deux parties fondamentales très-distinctes : l'une, contenant les MODS en quelque sorte INDIVIDUELS de la production des objets de ce système; l'autre, contenant les MODS UNIVERSELS de leur production.

Pour peu qu'on examine les caractères respectifs de l'individualité et de l'universalité, desquelles proviennent les deux parties fondamentales de tout système, telles que nous venons de les déduire de la seule réalité de l'absolu, on reconnaît que l'individualité se manifeste immédiatement dans l'existence effective des objets de ce système, tandis que leur universalité n'est qu'un postulat nécessaire de la possibilité même de cette existence. De là vient que la première, l'individualité, forme un objet immédiat de notre cognition, et que la dernière, l'universalité, ne peut devenir un objet de notre cognition

que médiatement, moyennant qu'elle devienne d'avance un but ou une fin de la spéculation, c'est-à-dire, un objet de notre volonté. — C'est sous ce dernier aspect que nous avons d'abord présenté ces deux parties fondamentales dans notre Philosophie des Mathématiques, en assignant, pour leurs objets respectifs, à la première, la cognition immédiate de *ce qui est*, comme autothésie ou établissement propre, c'est-à-dire, la nature ou la construction des quantités, et à la dernière, la cognition médiate de *ce qu'il faut faire*, comme autogénie ou génération propre, pour arriver à la mesure ou à l'évaluation, et même à la construction des quantités. Dans le premier tome de la Philosophie de la Technie, nous nous sommes ensuite élevés au premier point de vue, sous lequel on découvre la véritable origine de ces deux parties fondamentales de tout système scientifique, consistant dans l'individualité et dans l'universalité de la génération des objets de ce système. Aussi, suivant le premier aspect, celui de la cognition immédiate de l'individualité par l'entendement (*αἰσθησις*), et de la cognition médiate de l'universalité par l'entendement de la volonté (*προαιρεσις*), avons-nous désigné, dans notre Philosophie des Mathématiques, ces deux parties fondamentales de tout système philosophique, la première, par le nom de *THÉORIE*, et la seconde, par celui de *TECHNIQUE*. Et, ayant égard à la circonstance de ce que, sous l'aspect auquel correspond cette dénomination, se trouve la considération de la spontanéité de notre savoir, donnant lieu à l'existence de fins ou de buts, nous conserverons cette même dénomination de *Théorie* et de *Technie* pour les deux parties fondamentales de tous les systèmes scientifiques, afin d'accuser cette spontanéité productrice de notre propre savoir. Mais, il ne faut pas ici perdre de vue la véritable origine de ces deux parties fondamentales, consistant dans l'individualité et dans l'universalité des objets respectifs des divers systèmes scientifiques; d'autant plus que c'est précisément dans cette distinction primordiale, en ramenant tout à l'universalité de la génération de ces objets, que se trouve le principe de la grande réforme des sciences qu'il s'agit d'opérer, comme nous le verrons mieux ci-après.

Ainsi, dans tout système scientifique, nous aurons nécessairement deux parties fondamentales, la *THÉORIE* et la *TECHNIQUE*, ayant en vue, la première, l'individualité des objets de ce système, et la seconde, l'universalité de ces objets, et provenant, l'une et l'autre, de la réalité même de l'absolu. — Procédons maintenant à leur développement ultérieur.

Par l'établissement de l'individualité dans la réalité de l'absolu, chaque objet individuel ne reçoit qu'une partie déterminée de la totalité de cette réalité absolue; et c'est cette partie de réalité qui constitue proprement l'essence ou le contenu de cet objet individuel. Tout le reste de la réalité universelle demeure nécessairement étranger à ce même objet individuel, et ne peut servir précisément qu'à la détermination de son individualité; de sorte que cette

détermination de l'individualité d'un objet, de la partie de réalité universelle qui en constitue l'essence, détermination qui provient de tout le reste de la réalité universelle, constitue, à son tour, dans le même objet individuel, le MANIÈRE d'être ou la FORME de cet objet. — Ainsi, dans tout système d'objets individuels, il se présente naturellement la considération de l'essence ou du contenu de ces objets, et la considération de leur manière d'être ou de leur forme. Même dans l'universalité de ce système, cette double considération du contenu et de la forme doit avoir lieu nécessairement, parce que l'unité fondamentale de la réalité de l'absolu ne peut se soutenir complètement, dans un système quelconque de réalités, que précisément par cette double universalité, dans le contenu et dans la forme, de ce même système. — De là vient la nécessité de distinguer, dans chacune des deux parties fondamentales de tout système scientifique, dans la Théorie et dans la Technique, deux nouvelles parties ayant pour objet respectivement, l'une, l'essence ou le contenu des objets de ce système, qui constitue proprement la GÉNÉRATION de ces objets, et l'autre, la manière d'être ou la forme de ces mêmes objets, qui donne lieu à leur RELATION réciproque. — Dans la Philosophie des Mathématiques, nous avons désigné ces deux nouvelles parties, la première, par le nom de *Constitution* scientifique, et la seconde, par celui de *Comparaison* scientifique. Et, observant que l'objet des mathématiques (pures) consiste uniquement dans un certain emploi de nos fonctions intellectuelles, dont l'essence ou le contenu est régi par des lois transcendantes, et la forme par des lois logiques, nous avons de plus étanché à la distinction des deux parties dont il s'agit, de la constitution et de la comparaison scientifiques, la considération du point de vue *transcendantal* et du point de vue *logique*. Mais, cette considération supplémentaire ne doit pas être appliquée aux autres sciences, dont les objets sont différents de nos fonctions intellectuelles : il eût alors de s'en tenir à la distinction primitive du contenu ou de la génération, et de la forme ou de la relation des objets appartenant à ces autres systèmes scientifiques.

Poursuivons ces déductions. — La *différence* des objets qui composent un système quelconque de réalités, dépend originairement de la diversité fondamentale qui se trouve dans la réalité même de l'absolu; et, quelle que soit cette différence, le *coexistence* ou le *étension* de ces objets dans un même système dépend de nouveau de l'identité fondamentale qui, dans la réalité de l'absolu, lie la diversité originaire, laquelle y est impliquée. — Ainsi, dans chacune des quatre parties distinctes que nous venons de déduire pour tout système de réalités, il se présente en outre la considération précise de la différence originaire des objets composant ce système, et la considération également précise de la réunion ou de la liaison réciproque de ces objets différents dans la formation de leur système. La première de ces deux nouvelles considérations conduit naturellement à l'établissement des *véritables* sta-

MENTS du système dont il s'agit; et la seconde conduit de même à la RÉUNION SYSTÉMATIQUE de ces éléments. — Par cette raison, comme dans notre Philosophie des Mathématiques, nous nommerons, dans chacune des quatre parties susdites d'un système scientifique, la première des deux dernières considérations, *Partie élémentaire*, et la seconde, *Partie systématique*.

Voyons maintenant quels sont les différents éléments nécessaires dans tout système de réalités, et quelle doit être leur liaison ou leur réunion systématique également nécessaire. — Nous connaissons ainsi l'ensemble universel de tout système d'êtres ou de faits de savoir; et nous aurons par là même la loi de création dont il s'agit.

Nous venons de remarquer que la différence des objets composant un système de réalités, dépend originairement de la diversité fondamentale qui se trouve dans la réalité même de l'absolu. Or, suivant ce que nous avons appris dans les Prolégomènes du Messianisme, en y déduisant les conditions fondamentales de cette réalité primordiale de l'absolu, nous savons que la ORIGINARITÉ originaire dont il s'agit, consiste dans l'établissement opposé du savoir et de l'être. C'est donc l'attribution propre de ces deux éléments de la réalité absolue du monde qui doit transpirer dans les éléments de chaque système spécial de réalités.

Ainsi, dans tout système d'objets quelconques, il doit exister nécessairement DEUX ÉLÉMENTS PRIMORDIAUX dont se compose le système entier, et dont les caractères respectifs doivent, plus ou moins, participer aux attributions opposées des deux éléments originaires, du savoir et de l'être, tels qu'ils sont donnés dans la réalité même de l'absolu. Nous les nommerons pour cela, dans tout système en général, l'un, *Élément-Savoir*, et l'autre, *Élément-Être*; en observant que ce sont là, pour ainsi dire, les deux pôles auxquels se rapporte le système correspondant.

Mais, dans la réalité originaire de l'absolu dont nous dérivons ici tous les systèmes possibles de réalités, il existe nécessairement une NEUTRALISATION distincte de ses deux éléments opposés, du savoir et de l'être; parce que, sans cette neutralisation, la réalité de l'absolu formerait deux réalités hétérogènes, ce qui est contraire à l'idée de l'absolu. Bien plus, cette neutralisation du savoir avec l'être, cette IDENTITÉ PRIMITIVE ENTRE LE SAVOIR ET L'ÊTRE, forme le véritable caractère de la réalité de l'absolu, comme nous l'avons déjà reconnu dans les Prolégomènes, en y examinant les différentes écoles philosophiques modernes qui ont été engendrées par le criticisme de Kant. — Ainsi, dans tout système de réalités, une neutralisation correspondante doit avoir lieu entre ses deux éléments primordiaux, et doit conséquemment former un troisième élément primitif, c'est-à-dire, l'élément fondamental, que nous nommerons *Élément-Neutre*. Et, d'après ce que nous venons de remarquer du caractère de la réalité absolue, cet élément-neutre cons-

titue visiblement le caractère propre du système spécial de réalités où il a lieu.

Il existe donc, dans tout système de réalités, trois ÉLÉMENTS PRIMITIFS, l'élément-savoir, l'élément-être, et l'élément-neutre. Leur origine se trouve dans les trois dispositions correspondantes qui sont impliquées dans la réalité même de l'absolu; de sorte que les attributions respectives de ces trois dispositions absolues doivent transpirer dans les trois éléments primitifs de chaque système. — Et comme, dans la réalité de l'absolu ou de l'univers, toute diversité ultérieure provient nécessairement de cette triple disposition originaire, il est clair que de même, dans chaque système spécial de réalités, toute diversité ultérieure doit être née de ses trois éléments primitifs.

• Or, parmi les objets divers qui, dans un système de réalités, dérivent des trois éléments primitifs de ce système, il en existe dont la dérivation est nécessaire, c'est-à-dire, donnée comme conséquence ou corollaire dans la nature même de ces trois éléments primitifs, et d'autres dont la dérivation est purement contingente. Les premiers, à cause de leur nécessité, qui en fixe le nombre, constituent encore de véritables éléments de ce système, et font ainsi partie des principes mêmes de la science ayant pour objet ce système spécial de réalités. Les derniers, dont le nombre est indéfini, ne sont que des mélanges ou des modifications de véritables éléments, et se trouvent ainsi subordonnés aux principes de la science correspondant à ce système de réalités. — Nous n'avons donc à déduire ici que les objets ultérieurement nécessaires dans chaque système de réalités, lesquels, à cause de leur nécessité, constituent les ÉLÉMENTS DÉRIVÉS dans ce même système.

• Considérés en général, les trois éléments primitifs paraissent admettre quatre dérivations nécessaires, correspondantes aux quatre manières différentes dont ils peuvent être combinés entre eux, en les prenant, d'abord deux à deux, et ensuite tous les trois. Mais, en considérant en particulier la nature de ces éléments primitifs, on verra que la combinaison de l'élément-être avec l'élément-savoir se trouve déjà dans l'origine de l'élément-neutre; de sorte qu'il ne reste de combinaisons réellement différentes que celles de l'élément-neutre avec chacun des deux éléments primordiaux, c'est-à-dire, respectivement avec l'élément-être et avec l'élément-savoir. •

Les deux éléments dérivés qui résultent ainsi IMMÉDIATEMENT de ces deux dernières combinaisons possibles entre les trois éléments primitifs, ont des ATTRIBUTIONS DOMINANTES dans tout le système auquel appartiennent ces éléments, parce que, d'une part, ces éléments-dérivés immédiats sont engendrés principalement avec l'élément-neutre dont le caractère est proprement celui du système entier, et parce que, d'autre part surtout, par les liens qui s'y trouvent établis entre l'élément-neutre et chacun des deux éléments primordiaux et opposés, les deux éléments-dérivés immédiats dont il est question, REVIENT POSSIBLE l'universalité dans l'individualité de chaque système de réalités. Cette dernière propriété,

celle d'introduire l'universalité dans un système d'objets individuels, donne à ces deux éléments dérivés les fonctions principales de tout le système, en les rendant INSTRUMENTS D'UNIVERSALITÉ dans ce même système. Aussi, par cette raison, appellerons-nous ces deux éléments-dérivés immédiats, l'un, *Universel-Être*, celui qui provient de la combinaison de l'élément-neutre avec l'élément-être, et l'autre, *Universel-Savoir*, celui qui provient de la combinaison de l'élément-neutre avec l'élément-savoir.

« Ici finirait la déduction des éléments dérivés, s'il ne se trouvait, dans la nature des deux derniers, de l'universel-être et de l'universel-savoir, le principe d'une génération élémentaire, ultérieure et également nécessaire. Ce principe consiste en ce que l'élément-neutre, qui est commun à ces deux éléments-dérivés immédiats, établit entre eux une liaison, une espèce d'unité; d'où résulte, comme production nécessaire, la transition, toujours possible, de l'universel-être à l'universel-savoir, et réciproquement, de l'universel-savoir à l'universel-être. Les éléments dérivés qui proviennent ainsi MÉDIATEMENT des deux éléments-dérivés immédiats, ont visiblement, dans chaque système, les caractères distincts suivants : l'un, qui opère la transition de l'être au savoir, a la propriété de former une fonction avec l'être, telle qu'elle équivaut au savoir; et réciproquement l'autre, qui opère la transition du savoir à l'être, a la propriété de former une fonction avec le savoir, telle qu'elle équivaut à l'être. — Nous nommerons ces deux derniers éléments, le premier, *Transitif-Être*, et le second, *Transitif-Savoir*; en observant d'ailleurs qu'ils sont les deux éléments-dérivés médiats, qui, avec les deux précédents, les éléments-dérivés immédiats, complètent l'ensemble possible et effectif des éléments dérivés dans tout système de réalités.

Il existe donc, dans un système quelconque, sept véritables éléments, trois primitifs et quatre dérivés, dont les derniers sont deux immédiats et deux médiats. — Ce sont là les parties intégrantes nécessaires de tout système de réalités : elles proviennent, comme nous venons de les déduire, de la réalité même de l'absolu, et elles en reçoivent ainsi leur véritable signification que nous venons de déterminer. — Voyons maintenant quelle est la situation SYSTÉMATIQUE de ces éléments, qu'il nous reste encore à connaître pour fixer définitivement la loi de création que nous nous sommes proposé de découvrir.

« En reportant nos regards sur les principes dont nous avons déduit tous les divers éléments de chaque système, nous verrons facilement que la possibilité de ces différents éléments consiste dans la dualité ou dans l'opposition des deux éléments primordiaux; c'est-à-dire, en remontant plus haut, que cette possibilité consiste dans la dualité origininaire qui a lieu, entre le savoir et l'être, dans la réalité même de l'absolu. Mais, cette espèce de polarité primordiale, qui provient de l'application de la réalité de l'absolu à la réalité des objets formant un système, doit nécessairement se rencontrer dans tous

« ces objets ; car, le principe de cette application est le même pour tous ces objets en général. Il en résulte, dans ces objets considérés en eux-mêmes, non-seulement une simple neutralisation ou combinaison, mais de plus une véritable réunion systématique des deux fonctions qui sont propres aux deux éléments primordiaux de chaque système.

« Cette réunion systématique des deux fonctions propres aux éléments primordiaux, peut généralement être envisagée ou comme *universelle* systématique, ou comme *individuelle* systématique. Dans le premier cas, ces deux fonctions sont considérées comme distinctes, l'une de l'autre, dans la production d'un objet appartenant au système dont il s'agit ; dans le second cas, ces fonctions sont considérées comme indistinctes, l'une de l'autre, dans la production d'un tel objet. — Or, les deux éléments primordiaux, l'élément-*être* et l'élément-*savoir*, étant considérés par rapport à la génération des objets de leur système, sont entièrement opposés dans leurs caractères respectifs, et ne sauraient, par cette raison, concourir indistinctement à la génération de ces objets ; ils ne peuvent donc, dans leur réunion, donner lieu qu'à une diversité systématique. Mais, les éléments dérivés immédiats, l'universel-*être* et l'universel-*savoir*, qui touchent à la neutralisation des deux éléments primordiaux et opposés, et qui sont même liés par cette neutralisation, par l'élément-neutre qui leur est commun, peuvent concourir indistinctement, du moins par l'unité de leur liaison, à la génération des objets du système ; ces deux éléments dérivés doivent donc présenter, dans leur réunion, une véritable identité systématique.

« Pour ce qui concerne, en premier lieu, la diversité systématique qui, dans la nature ou dans le caractère des objets formant un système de réalités, résulte de la réunion des deux éléments primordiaux et opposés, de l'élément-*être* et de l'élément-*savoir*, il est clair, à priori, qu'elle ne peut exister que de trois manières, savoir : 1° par l'influence systématique de l'élément-*être* dans la génération des objets où domine l'élément-*savoir* ; 2° par l'influence systématique de l'élément-*savoir* dans la génération des objets où domine l'élément-*être* ; et 3° par l'influence systématique et réciproque de l'élément-*être* et de l'élément-*savoir* dans la génération des objets où dominent l'un et l'autre de ces deux éléments. — Cette triple diversité systématique existe donc nécessairement dans tout système de réalités, où elle produit trois classes distinctes d'objets ou de considérations systématiques. » Nous nommerons ces trois classes, la première, *Être-en-Savoir*, la seconde, *Savoir-en-Être*, et la troisième, *Concours-Final* ; et, pour légitimer la dernière dénomination, nous remarquerons que le caractère distinctif de cette troisième classe est une véritable finalité qui, de cette manière, a lieu nécessairement dans tout système de réalités. En effet, cette influence ou ce concours réciproque du *savoir* et de l'*être*, ou spécialement de l'élément-*savoir* et de l'élément-*être*, ne

peut être déterminé dans ce même système, parce que, dans cette troisième classe systématique, on n'admet aucune unité entre les deux éléments hétérogènes dont le concours y a lieu, et par conséquent aucun principe de la détermination de ce concours; cet accord ou concours téléologique des deux éléments hétérogènes dans cette classe de considérations systématiques ne peut donc avoir lieu, dans ce même système, autrement que par leur pure *FINALITÉ* (*szovekmassigkelt*), dont la détermination doit se trouver dans un autre système de réalités, supérieur à celui dont il s'agit et dans lequel arrive cette finalité. Il n'en est pas de même des deux premières de ces trois classes systématiques que nous venons de déduire; elles ont leurs principes respectifs de détermination dans l'universalité elle-même qui rend possible la coexistence des objets individuels formant le système; et, de cette manière, ces deux premières classes systématiques se trouvent complètement déterminées dans leur propre système de réalités, et elles n'impliquent ainsi aucune finalité, aucune détermination étrangère.

Pour ce qui concerne, en second lieu, l'identité systématique qui, dans la nature ou dans le caractère des objets formant un système, résulte de la réunion des deux éléments-dérivés immédiats, de l'universel-être et de l'universel-savoir, et qui, comme nous l'avons reconnu, provient de l'unité ou de la liaison de ces deux éléments dérivés par l'élément-neutre qui leur est commun, il est clair, également à priori, que cette identité systématique forme la clôture du système, en le ramenant, par une espèce de cercle, vers son origine qui, comme nous l'avons vu plus haut, consiste dans l'élément-neutre dont le caractère est celui du système entier, et duquel proprement se dégagent les deux éléments primordiaux qui commencent ce même système. Quant au caractère propre de cette classe d'objets qui, dans le système, correspond à l'identité systématique dont il s'agit, et que, pour cela, nous nommerons *Parité-Coronale*, ce caractère présente d'abord une apparence téléologique ou de finalité, lorsqu'on n'envisage que l'accord qui, dans cette identité systématique, se rencontre entre les fonctions respectives des deux éléments primordiaux et opposés; mais, en considérant le principe de cette identité, lequel, comme cela est manifeste, consiste dans l'unité des deux fonctions opposées, telle qu'elle est établie dans l'élément-neutre qui, comme nous venons de le remarquer, opère cette identité systématique, on reconnaît que cette identité est complètement déterminée dans son propre système, et qu'elle ne présente, pour ainsi dire, qu'une reproduction systématique de l'élément-neutre; d'où il résulte, comme nous l'avons entrevu à priori, que cette identité systématique forme la clôture du système entier, en reproduisant, d'une manière élaborée, l'origine même de ce système.

Il existe donc, dans tout système de réalités, quatre classes d'objets ou de considérations systématiques, dont les trois premières portent sur la diversité

dans les fonctions élémentaires, et la dernière sur l'identité de ces fonctions. Et ce qu'il importe ici essentiellement de remarquer, l'une des trois premières classes, celle qui présente le concours-final ou l'accord entre les fonctions élémentaires opposées, ne peut recevoir sa détermination dans son propre système, et présente ainsi, dans ce système isolé, une véritable finalité, une harmonie dans son concours téléologique.

En résumant ensemble les éléments et les classes systématiques que nous venons de reconnaître dans la création de tout système de réalités, nous aurons le tableau génétique suivant.

CONSTITUTION THÉORIQUE.

- a2) Partie *élémentaire*.
 - a3) Éléments *primitifs*.
 - a4) Élément *fondamental*. = ÉLÉMENT-NEUTRE.
 - b4) Éléments *primordiaux* :
 - a5) ÉLÉMENT-SAVOIR.
 - b5) ÉLÉMENT-ÊTRE.
 - b3) Éléments *dérivés* :
 - a4) *Immédiats* ou *distincts* :
 - a5) UNIVERSEL-SAVOIR.
 - b5) UNIVERSEL-ÊTRE.
 - b4) *Médiats* ou *transitifs* :
 - a5) TRANSITIF-SAVOIR.
 - b5) TRANSITIF-ÊTRE.
- b2) Partie *systématique*.
 - a3) *Diversité* systématique.
 - a4) Influence *partielle* :
 - a5) SAVOIR-EN-ÊTRE.
 - b5) ÊTRE-EN-SAVOIR.
 - b4) Influence *réciproque*. = CONCRET-FINAL.
 - b3) *Identité* systématique. = PARITÉ-CORREL.

Il faut remarquer que ces éléments et ces classes systématiques, tels qu'ils sont résumés dans le tableau précédent, constituent proprement le *CONTENU* INDIVIDUEL d'un système de réalités; et c'est pourquoi nous avons donné à ce tableau le titre de *Constitution théorique*, qui, suivant les dénominations fixées plus haut, appartient précisément à cette partie principale de tout système de réalités. — Nous disons que cette partie est *PRINCIPALE*; car, comme on le conçoit à priori, les trois autres parties d'un même système, savoir, la *Comparaison théorique*, ayant pour objet la forme individuelle, la *Constitution*

technique, ayant pour objet l'universalité de l'essence ou du contenu, et enfin la *Comparaison technique*, ayant pour objet l'universalité de la forme, doivent naturellement se régler d'après la première partie, d'après la *Constitution théorique*, qui a pour objet l'essence ou le contenu individuel. Aussi, en ayant simplement égard à leurs objets respectifs, allons-nous déduire facilement, de cette première partie, les trois autres parties constitutives d'un système de réalités.

D'abord, pour ce qui concerne la Comparaison théorique, qui a pour objet la forme individuelle, il est clair qu'ayant établi, par la déduction précédente, tous les éléments et toutes les classes systématiques qui ont lieu dans un système de réalités, on peut en particulier fixer séparément la forme de chacun de ces éléments et de chacune de ces classes systématiques, comme nous l'avons fait dans le tableau génétique de la Psychologie, qui, engendré ainsi par la loi de création, se trouve à la fin de nos *Prolegomènes du Messianisme*. — Toutefois, en s'en tenant à des généralités, sans entrer dans tous les cas particuliers, il suffit, pour fixer les circonstances concernant la forme des objets individuels d'un système de réalités, d'établir séparément les relations entre la forme de leurs éléments, et les relations entre la forme de leurs classes systématiques. Il faut observer, en effet, que, dans la forme des objets individuels d'un système, il ne saurait exister aucune autre différence caractéristique que celle précisément qu'introduit la différence essentielle qui a lieu entre les éléments et leurs réunions systématiques. De plus, ayant égard à ce que les éléments dérivés, immédiats et médiats, ont le principe de leur détermination dans les trois éléments primitifs, il semble, autant qu'on peut ici le prévoir a priori, que les circonstances concernant la forme des éléments, doivent se réduire à celles des trois éléments primitifs. Nous aurons ainsi, dans cette généralité, le tableau génétique suivant.

COMPARAISON THÉORIQUE.

a) Partie élémentaire. = Relations dans la forme des éléments.

$$\begin{array}{l} \alpha) \text{ Relations positives } \\ \beta) \text{ Relations négatives } \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ Pour l'Élément-Neutre.} \\ 2^{\circ} \text{ Pour l'Élément-Savoir.} \\ 3^{\circ} \text{ Pour l'Élément-Être.} \end{array} \right.$$

b) Partie systématique. = Relations dans la forme des classes systématiques.

$$\begin{array}{l} \alpha) \text{ Relations positives } \\ \beta) \text{ Relations négatives } \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ Pour le Savoir-en-Être.} \\ 2^{\circ} \text{ Pour l'Être-en-Savoir.} \\ 3^{\circ} \text{ Pour le Concours-Final.} \\ 4^{\circ} \text{ Pour la Partie-Coronale.} \end{array} \right.$$

Ensuite, pour ce qui concerne la Constitution technique, qui a pour objet l'universalité dans l'essence ou le contenu d'un système de réalités, il est d'abord clair que les fonctions élémentaires de cette universalité doivent être contenues dans les deux éléments dérivés immédiats, l'universel-être et l'universel-savoir, que nous avons reconnu être les conditions pour la possibilité même de l'universalité dont il est question. Seulement, pour devenir véritables instruments d'universalité, ces fonctions élémentaires doivent prendre un caractère indéfini, afin de perdre toute individualité. Et, à l'instar des deux éléments théoriques transitifs, qui proviennent des deux précédents, il doit également s'établir ici, entre les deux principaux instruments d'universalité, une transition réciproque, moyennant deux autres instruments pareils, servant à compléter l'universalité du système par l'espèce de continuité qui se trouve ainsi introduite dans ces divers instruments d'universalité. Mais, il ne faut pas ici considérer ces deux derniers instruments secondaires d'universalité, les instruments transitifs, comme étant purement dérivés des deux précédents et principaux; car, à cause de leur fonction complétive, ces deux instruments secondaires doivent, ainsi que les deux principaux, être considérés comme instruments *primitifs* d'universalité.

En général, pour se former une idée exacte et précise de la technique dans tout système de réalités, on doit, dans un tel système, distinguer son *autothésis*, ce qu'il a de donné ou de créé, et son *autocénisme*, ce qu'il faut y faire ou créer; et l'on ne doit attribuer à la *technie* de ce système rien autre que ses conditions ou générations autogéniques, c'est-à-dire, l'accomplissement de ses réalités par la raison de l'homme ou généralement par la raison universelle, en attribuant d'abord spécialement à la *théorie* de ce même système de réalités toutes ses conditions ou générations autothétiques, c'est-à-dire, l'existence actuelle et propre de ces réalités. Or, cette existence, actuelle et propre, des réalités est ce qui constitue leur individualité; et par conséquent, c'est cette individualité, c'est-à-dire, ce sont les conditions ou générations individuelles dans un système de réalités qui forment ainsi l'objet de la *théorie* de ce système. On conçoit en même temps que l'accomplissement de cette individualité ne saurait avoir lieu autrement que par l'introduction de l'universalité dans les conditions ou générations individuelles des réalités d'un système, c'est-à-dire, par la création rationnelle de conditions ou de générations universelles pour ces réalités individuelles dans un système donné. Et par conséquent, c'est cet accomplissement, cette création rationnelle de conditions ou de générations universelles pour les réalités individuelles d'un système donné, qui forme l'objet de la *technie* de ce système de réalités.

Mais, cette universalité ne saurait, à son tour, être introduite dans un système de réalités distinctes qu'autant que ces réalités impliquent, comme

condition fondamentale, une *invariance* primitive et universelle. Et c'est cette identité que leur donne l'élément fondamental de chaque système, cet élément que nous avons nommé *élément-neutre* et duquel, comme nous venons de le reconnaître, dérive le système tout entier. Aussi, n'est-ce proprement que dans celles des réalités qui impliquent ouvertement cet élément fondamental, que peut s'établir l'universalité dont il s'agit. C'est pourquoi les trois éléments primitifs du système ne donnent lieu à aucune universalité à leur propre égard, d'abord, parce que les deux éléments primordiaux, l'*élément-être* et l'*élément-savoir*, se détachent entièrement, dans leur hétérogénéité, de l'élément-fondamental en question, de ce principe de l'universalité, et ensuite, parce que cet élément fondamental, comme *élément-neutre*, concentre en lui-même, dans son individualité, son principe d'universalité. Ce n'est que dans les quatre éléments dérivés, nommément dans les deux éléments immédiats ou distincts, et dans les deux éléments médiats ou transitifs, qu'il y a lieu à l'introduction de l'universalité dans tout système de réalités, et cela parce que ces éléments dérivés impliquent, en outre des deux éléments primordiaux et hétérogènes, l'élément fondamental qui, par leur neutralisation primitive, introduit l'identité dans leur diversité et forme ainsi une condition à l'universalité de la génération de toutes les réalités individuelles dans un système donné. Aussi, par cette raison, attachons-nous généralement, dans leur accomplissement universel, l'attribut d'*instruments* à ces quatre éléments dérivés, en les nommant, dans la partie élémentaire de la Constitution technique de tout système, les deux premiers, *Instrument-Universel-Savoir* et *Instrument-Universel-Être*, et les deux derniers, *Instrument-Transitif-Savoir* et *Instrument-Transitif-Être*.

Quant à la partie systématique de cette Constitution technique de tout système de réalités, nous pouvons maintenant la déduire facilement du principe d'universalité que nous venons de reconnaître. — Ainsi, nous verrons d'abord immédiatement que, comme pour les trois éléments primitifs, il n'existe pas non plus d'universalité dans les deux premières classes systématiques, dans celles que nous nommons *savoir-en-être* et *être-en-savoir*, parce qu'elles ne contiennent que les deux éléments primordiaux et hétérogènes et qu'elles n'impliquent ainsi en rien l'élément fondamental, ce principe d'universalité dans tout système de réalités. — Ensuite, pour la troisième classe systématique, pour celle que nous nommons *concours-final*, il paraîtrait également, au premier aspect, qu'elle ne contient non plus que les deux éléments primordiaux et hétérogènes; mais, en examinant l'union qui s'y établit entre ces deux éléments hétérogènes, nous concevons que cette union doit avoir sa condition, sinon immédiatement dans l'élément fondamental qui n'y apparaît pas ostensiblement, du moins dans quelque identité primitive et supérieure de laquelle doit dériver l'homogénéité elle-même de cet élément fondamental qui n'apparaît pas ici ostensiblement. Comme telle, cette condition supérieure de l'union

qui, par une véritable finalité, s'établit dans la troisième classe systématique dont il s'agit, constitue évidemment une *HARMONIE PRÉÉTABLIE* dans les deux éléments primordiaux et hétérogènes de tout système de réalités. Et par conséquent, cette condition supérieure d'union, cette harmonie préétablie entre les deux éléments primordiaux, remplace ici le susdit principe d'universalité que présente, dans chaque système de réalités, son élément fondamental. Quant à la nature spéciale de l'universalité qui, dans la troisième classe systématique dont il s'agit, résulte ainsi de cette harmonie préétablie entre les deux éléments primordiaux et hétérogènes, elle se distingue en ce que cette universalité est ici purement *CONTINGENTE*, tandis que, dans toutes les autres branches de la technique d'un système de réalités, où elle provient ostensiblement de l'influence immédiate de l'élément fondamental, l'universalité est toujours *NÉCESSAIRE*. Aussi, pour distinguer cette contingente universalité que présente ainsi la troisième classe systématique, nommerons-nous *Raisons-Suffisantes* la génération universelle qui en résulte pour des réalités systématiques, en offrant par là même la déduction génétique du principe que Leibnitz a conçu sous ce nom, de ce principe qui n'est manifestement rien autre que cette génération universelle de réalités, fondée sur l'harmonie préétablie de leurs éléments hétérogènes. Et comme telles, ces raisons-suffisantes, en les appliquant aux données spéciales d'un système de réalités, nous mettent à même d'employer les susdits instruments d'universalité pour faire valoir ces données dans le sens de l'universalité de ce système; et elles forment par là, en quelque sorte, des instruments *dérivés* d'universalité, ainsi que nous les avons nommés d'abord dans notre Philosophie des Mathématiques et dans le premier tome de la Philosophie de la Technique, en les considérant provisoirement comme algorithmes techniques élémentaires, pour n'avoir pas besoin d'entrer, dès alors, dans les profondes déductions présentes de la loi de création, de cette loi toute puissante qu'il fallait alors cacher encore aux yeux du public. — Enfin, pour la quatrième et dernière classe systématique de tout système de réalités, pour celle que nous nommons *partit-corporale*, il est évident que, puisque, par le moyen de l'élément-fondamental, il s'y trouve accomplie l'*IDENTITÉ FINALE* du système, ainsi que nous l'avons reconnu plus haut, cette identité finale, comme provenant de l'élément fondamental, c'est-à-dire, de son homogénéité ou de sa neutralisation des deux éléments primordiaux et hétérogènes, doit avoir sa condition dans une *IDENTITÉ PRIMITIVE*, dans le principe absolu du système, duquel provient, non-seulement cette harmonie préétablie des deux éléments hétérogènes que nous venons de reconnaître dans la troisième classe systématique, mais de plus cette neutralisation elle-même des deux éléments primordiaux et hétérogènes qui se trouve dans l'élément fondamental du système entier. Ainsi, l'accomplissement de la quatrième classe systématique dont il s'agit, doit consister dans l'ascension à cette identité primitive, à ce principe absolu de tout

système donné de réalités, duquel provient immédiatement la neutralisation des deux éléments primordiaux qui est dans l'élément fondamental, et duquel, par conséquent, provient médiatement, d'abord, toute la génération individuelle des réalités de ce système, telle que, dans sa théorie, elle dérive de cet élément fondamental, et ensuite, toute la génération universelle de ces mêmes réalités, telle que, dans la technic de ce système, elle dérive de ce même élément fondamental, en le considérant, par les susdits motifs d'identité, comme principe d'universalité dans le système de réalités dont il s'agit. Et comme tel, cet accomplissement de la quatrième et dernière classe systématique, ce principe absolu de tout le système, duquel dérive la génération individuelle, la théorie, et la génération universelle, la technic, de toutes les réalités de ce système, est manifestement sa **LOI SUPRÊME**.

En résumant ces diverses parties qui forment la constitution technique d'un système de réalités, nous obtiendrons, pour cette constitution spéciale, le tableau génétique suivant.

CONSTITUTION TECHNIQUE.

- a2) *Partie Élémentaire.* == INSTRUMENTS PRIMITIFS D'UNIVERSALITÉ.
 - a3) Accomplissement génétique des éléments dérivés immédiats ou distincts.
 - a4) INSTRUMENT-UNIVERSEL-SAVOIR.
 - b4) INSTRUMENT-UNIVERSEL-ÊTRE.
 - b3) Accomplissement génétique des éléments dérivés médiateurs ou transitifs.
 - a4) INSTRUMENT-TRANSITIF-SAVOIR.
 - b4) INSTRUMENT-TRANSITIF-ÊTRE.
- b2) *Partie systématique.* == CLASSES ESSENTIELLES D'UNIVERSALITÉ.
 - a3) Accomplissement génétique du *Concours-Final* par le postulat de la *préformation primitive* ou de l'*harmonie préétablie* dans les éléments hétérogènes. == RAISONS-SUFFISANTES (qui forment aussi les *Instruments dérivés d'universalité*).
 - b3) Accomplissement génétique de la *Partie-Coronale* par l'ascension à l'*Indéfinie primitive*, c'est-à-dire, au principe absolu du système. == LOI SUPRÊME.

Faîn, pour ce qui concerne la Comparaison technique, qui a pour objet l'universalité dans la forme ou manière d'être d'un système de réalités, il est clair que, puisqu'il n'existe, dans la forme des objets d'un système, d'autre différence caractéristique que celle provenant de la différence essentielle qui a lieu entre les éléments et leurs classes systématiques, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, l'universalité dans la forme d'un système de réalités ne saurait présenter d'autres aspects distincts que ceux concernant les relations élémentaires et les relations systématiques dans ce même système.

De plus, en nous rappelant ce que nous avons reconnu plus haut, dans la déduction des deux parties fondamentales, de la théorie et de la technique, ayant respectivement pour objets l'individualité et l'universalité dans tout système de réalités, savoir, que l'individualité forme toujours un objet immédiat de notre cognition, et que l'universalité ne peut devenir un objet de notre cognition que médiatement, moyennant qu'elle devienne d'avance un but ou une fin de la spéculation, c'est-à-dire, un objet de notre volonté, nous concluons ici que, dans chaque système de réalités, l'universalité est toujours, pour l'homme, l'objet d'une recherche proprement dite, c'est-à-dire, d'une recherche qui implique un but ou une fin (पर्याप्तुम्), tandis que l'individualité n'est proprement, pour l'homme, qu'un simple objet de spéculation (सामयिकम्); et réciproquement, que toute recherche proprement dite, faite par l'homme dans un système quelconque de réalités, se dirige toujours exclusivement vers l'universalité de ce système. De là vient que, si l'on désigne par le nom de *problèmes* (*) ces recherches proprement dites qui impliquent des buts ou des fins, les problèmes, dans un système quelconque de réalités, n'auront généralement en vue que l'universalité de ce système, et, en observant que l'universalité, dans le contenu ou l'essence d'un système, se trouve achevée dans sa partie systématique par la loi *sarāṇa* de ce système, on verra que c'est dans l'objet de cette loi suprême que se trouve définitivement le but général de tous les problèmes qu'on peut former dans ce même système de réalités. Mais, toute recherche pareille concernant l'universalité dans un système d'objets, doit s'appuyer d'abord sur des relations quelconques de ces objets, c'est-à-dire, sur leur forme ou manière d'être, parce que, comme nous l'avons reconnu plus haut, cette forme ou manière d'être provient précisément de la détermination réciproque de toutes les réalités composant le système dont il s'agit, et elle devient ainsi l'expression extérieure, le signal, de l'universalité en question, ou plutôt la voie qui conduit vers cette universalité. Ainsi, tout problème, tel que nous le considérons ici, doit s'appuyer ou être fondé sur quelques relations, sur la forme, des objets composant le système dans lequel il a lieu. Et, de cette manière, l'universalité élémentaire dans la forme d'un système, qui est l'une des deux parties de la Comparaison technique, sera proprement une règle universelle de la déduction des problèmes, consistant dans l'uniformité de la génération des réalités de ce système; et l'univer-

(*) « En qualifiant généralement du nom de problèmes les propositions techniques, on doit cependant distinguer : celles de ces propositions dont les objets sont purement possibles, de celles dont les objets sont nécessaires; c'est-à-dire, on doit distinguer les propositions dont l'assertion (la solution) n'aurait qu'une certitude problématique (l'objet étant possible ou impossible), de celles dont l'assertion (la solution) a une certitude apodictique (l'objet étant nécessaire); les premières de ces propositions seront des problèmes strictement dits, et les dernières seront proprement des *parièmes*. » (Voyez l'introd. à la *Philos. des Mathém.*, page xxx). — Il est sans doute superflu de faire remarquer que les propositions théoriques sont également généralement du nom de *sāraṇas*.

salité systématique dans la forme du même système, qui est l'autre des deux parties de la Comparaison technique, sera elle-même le *PROBLÈME UNIVERSEL* dans ce système de réalités, parce que, d'ailleurs, elle se trouve liée intimement avec l'universalité systématique dans le contenu de ce système, laquelle dernière, comme nous venons de le reconnaître, constitue, dans la *LOI SURAIMA*, le but général de tous les problèmes. — Nous nommerons *Canon Génétique* cette règle universelle de la génération uniforme des réalités, et nous conserverons le nom de *Problème-Universel* à ce problème final qui a pour objet le but général de tous les problèmes. Et nous aurons ainsi, pour la Comparaison technique, le tableau géométrique suivant, très précis, mais plein de signification.

COMPARAISON TECHNIQUE.

- a) *Partie élémentaire; règle universelle de la déduction des problèmes; génération uniforme des réalités. = CANON GÉNÉTIQUE.*
- b) *Partie systématique; problème ayant pour objet le but général de tous les problèmes. = PROBLÈME-UNIVERSEL.*

Nous terminons ainsi la déduction génétique des parties constitutives de tout système de réalités; et nous obtenons, de cette manière, c'est-à-dire, par ce procédé génétique, la déduction à priori de la *LOI DE CRÉATION*, telle qu'on peut déjà, avec une certitude suffisante, avec une certitude *assertorique*, la déduire de la réalité de l'absolu, sans avoir besoin de remonter à l'essence intime de l'archi-absolu, où se trouve sa véritable origine, et par conséquent la source de la certitude *apodictique*, absolue, de sa domination universelle dans la production de toute réalité, même de la réalité suprême qui, comme principe de toute autre réalité dans l'univers, est inhérente à la *DIVINITÉ* elle-même. Et cette loi de création que nous venons ainsi de déduire à priori de la réalité de l'absolu, se trouve conforme à celle que, dans les *Prolegomènes* du *Messianisme*, nous avons induite à *posteriori* de plusieurs systèmes de réalités, formant les objets distincts de plusieurs branches du savoir humain, scientifiques et philosophiques. Aussi, pour ne pas répéter ici inutilement tout ce que nous y avons déjà dit, concernant cette absolue loi de création, devons-nous renvoyer le lecteur à l'ouvrage que nous venons de nommer, pour lui indiquer ultérieurement les qualités et les conséquences qui sont impliquées dans cette grande loi. Nous nous bornerons donc ici à reproduire le tableau entier de cette loi créatrice avec les noms que nous venons d'assigner à ses différentes parties constitutives, avec ces noms dont nous nous servirons désormais généralement pour éviter la répétition des conditions qui, d'après ce que nous venons de voir, servent de base à ces parties constitutives.

LOI DE CRÉATION

DE TOUT SYSTÈME DE RÉALITÉS^(*).

A) *Théorie ou Autothésie*; ce qu'il y a de *donné* ou d'*individuel* dans un système de réalités; objet *immédiat* de la cognition.

a) *Contenu*; *génération individuelle* des réalités; point de vue *transcendantal*. = CONSTITUTION THÉORIQUE.

a₁) *Partie élémentaire*. = LES SEPT ÉLÉMENTS.

a₁) Éléments *primitifs*.

a₁) Éléments *fondamentaux*. = ÉLÉMENT-NEUTRE..... (I)

b₁) Éléments *primordiaux*:

a₁) ÉLÉMENT-ÊTRE..... (II)

b₁) ÉLÉMENT-SAVOIR..... (III)

b₁) Éléments *dérivés*.

a₁) *Immédiats ou distincts*:

a₁) UNIVERSSEL-ÊTRE..... (IV)

b₁) UNIVERSSEL-SAVOIR..... (V)

b₁) *Médiats ou transitifs*:

a₁) TRANSMITIF-ÊTRE..... (VI)

b₁) TRANSMITIF-SAVOIR..... (VII)

b₁) *Partie systématique*. = LES QUATRE CLASSES SYSTÉMATIQUES.

a₁) *Diversité systématique*, dans la réunion des éléments *primitifs*.

a₁) *Influence partielle* des éléments *primordiaux*.

a₁) ÊTRE-EN-SAVOIR..... (I')

b₁) SAVOIR-EN-ÊTRE..... (II')

b₁) *Influence réciproque* des éléments *primordiaux*. = CONCOURS-FINAL... (III')

b₁) *Identité finale* ou *systématique*, dans la réunion des éléments *dérivés*.

= PARITÉ-CORONAIRE..... (IV')

b) *Forme*; *relation individuelle* des réalités; point de vue *logique*. = COMPARAISON THÉORIQUE.

a₂) *Partie élémentaire*. = Relations dans la FORME DES ÉLÉMENTS.

a₂) Relations *positives* } = { 1°) Pour l'Élément-Neutre.

b₂) Relations *negatives* } = { 2°) Pour l'Élément-Être.

3°) Pour l'Élément-Savoir.

b₂) *Partie systématique*. = Relations dans la FORME DES CLASSES SYSTÉMATIQUES.

a₂) Relations *positives* } = { 1°) Pour l'Être-en-Savoir.

b₂) Relations *negatives* } = { 2°) Pour le Savoir-en-Être.

3°) Pour le Concourse-Final

4°) Pour la Parité-Coronaire.

(*) Pour la lecture de ces tableaux génériques, voyez la note au bas de la page 75 des Postulats du Mécanisme, et l'ensemble de tableaux génériques de la réforme de la philosophie en Allemagne.

B) *Technie ou Autogénie* ; ce qu'il faut faire pour l'accomplissement d'un système de réalités, pour l'introduction de l'universalité ; objet médiant de la cognition par l'en-tremise de fins ou buts.

a) *Contena* ; *génération universelle des réalités* ; point de vue *transcendantal*. = CONSTITUTION TECHNIQUE.

a2) *Partie élémentaire*. = INSTRUMENTS PRIMITIFS D'UNIVERSALITÉ.

a3) Accomplissement génétique des éléments dérivés immédiats ou directs.

a4) INSTRUMENT-UNIVERSEL-ÊTRE.

b4) INSTRUMENT-UNIVERSEL-SAVOIR.

b3) Accomplissement génétique des éléments dérivés médiateurs ou transitifs :

a4) INSTRUMENT-TRANSITIF-ÊTRE.

b4) INSTRUMENT-TRANSITIF-SAVOIR.

ba) *Partie systématique*. = CLASSES ESSENTIELLES D'UNIVERSALITÉ.

a3) Accomplissement génétique du *Concours-Final* par le postulat de la *pré-formation primitive* ou de l'*harmonie préétablie* dans les éléments hétérogènes. = RAISONS-SUFFISANTES (qui forment aussi les *Instruments dérivés d'universalité*).

b3) Accomplissement génétique de la *Parité-Coronale* par l'ascession à l'*identité primitive*, c'est-à-dire, au principe absolu du système. = LOI SUPRÊME.

b) *Forme* ; *relation universelle des réalités* ; point de vue *logique*. = COMPARAISON TECHNIQUE.

a2) *Partie élémentaire* ; *régle universelle de la déduction des problèmes* ; *génération uniforme des réalités*. = CANON GÉNÉRIQUE.

ba) *Partie systématique* ; *problème ayant pour objet le but général de tous les problèmes*. = PROBLÈME-UNIVERSEL.

Or, c'est manifestement d'après cette loi de création que sont développés successivement les divers systèmes de réalités qui composent l'univers, en partant du système originaire impliqué dans la réalité de l'archi-absolu lui-même, jusqu'aux derniers systèmes que présentent les êtres raisonnables, destinés à reproduire l'absolu et à recommencer ainsi le cercle perpétuel de réalités. — Quant aux divers systèmes isolés qui, de cette manière, concourent uniformément à la construction de l'univers, on conçoit maintenant, avec facilité, qu'ils doivent être subordonnés les uns aux autres, et qu'ils doivent former ainsi, dans leur subordination, des SYSTÈMES NA SYSTÈMES, toujours en suivant la même et unique loi de création. Ces systèmes de systèmes constituent en effet des réalités de différents ordres ; et ce n'est que de cette manière qu'il est possible de concevoir l'ENSEMBLE SYSTÉMATIQUE de l'univers.

Il ne reste plus qu'à connaître l'essence même et intime de l'archi-absolu, pour reconnaître à priori le PRINCIPLE de ce sublime ENSEMBLE systématique, et pour reproduire ainsi, en quelque sorte, la création elle-même de l'univers. C'est là proprement le premier des deux derniers et absolus buts de l'humanité,

et notamment le but suprême de la sixième période, c'est-à-dire, de la première période de l'ère des buts absolus, qui aura pour objet cette découverte de l'essence intime de l'archi-absolu, et pour laquelle, dans notre critique période présente, nous devons, par anticipation, préparer les voies par le développement de la RAISON ABSOLUE, en réalisant la LOI DU PROGRÈS et en établissant déjà la LOI DE CRÉATION, comme nous venons de le faire (Voyez, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, pages 134 et 263, le tableau génétique de la philosophie absolue de l'histoire.) — Mais, déjà même dans cette cinquième et critique période présente, dont nous opérons ici l'accomplissement final, nous pouvons, au défaut de la connaissance de l'essence intime de l'archi-absolu, qui nous donnerait à priori la connaissance de tous les systèmes de réalités, nous pouvons, disons-nous, suivant la loi de création, que nous venons de reconnaître, fixer péremptoirement au moins ceux de ces systèmes de réalités qui nous sont donnés comme coexistants avec nous, et que, de cette manière, nous connaissons principalement à postériori.

Or, ces divers systèmes de réalités qui nous sont ainsi donnés comme coexistants avec nous, sont précisément ceux qui forment les objets respectifs des DIVERSES SCIENCES dont les hommes se sont occupés jusqu'à ce jour. Nous pouvons donc et nous devons même, dès à présent, réformer toutes les sciences existantes, en les réglant toutes d'après la loi de création que nous venons de découvrir. Nous parviendrons ainsi à reconnaître, au moins par anticipation, les VÉRITABLES SYSTÈMES de réalités qui forment les objets respectifs de ces sciences; et nous découvrirons alors la SIGNIFICATION propre et en quelque sorte absolue de ces diverses réalités; de sorte qu'en nous plaçant ainsi dans la VÉRITABLE VOIE, nous pourrons déjà faire des progrès rapides vers le terme idéal de perfection de chacune de ces diverses sciences, auquel la raison humaine doit parvenir dans la sixième première période de l'ère des buts absolus.

C'est de cette nouvelle et vraie philosophie des sciences que nous présentons un essai dans notre *Apodictique messianique*, formant le traité du Savoir-suprême, comme nous l'avons déjà dit plus haut en signalant cette grande doctrine (*). — Mais, une pareille production ou réforme des sciences était tellement inattendue de nos jours, qu'il aurait été téméraire de l'annoncer, avant de l'exécuter en détail et avec succès, au moins sur une des diverses sciences

(*) Nous avons déjà prouvé plus haut que la présente exposition de la Réforme des Mathématiques a été écrite en 1818. — Depuis ce temps, et notamment depuis 1833, nous avons commencé à publier nos ouvrages philosophiques, c'est-à-dire, le *Messianisme*, contenant la *Revue-critique apodictique*, où, par anticipation sur l'*Apodictique messianique* que nous exposons ici, nous avons déjà, par l'organe tout-puissant de la LOI DE CRÉATION, posé les principes de ces hautes et délicates philosophies des sciences, comme nous le verrons fort en détail dans la suite de l'ouvrage présent. — Nous prions le lecteur de ne pas perdre de vue, dans toute l'étendue de la présente exposition de la Réforme des Mathématiques, ce que nous venons de lui annoncer concernant les développements qui seront donnés dans la suite de cet ouvrage.

existantes. C'est pourquoi, avant d'aborder la publication de nos travaux philosophiques, nous avons cru devoir s'inspirer ainsi, en suivant uniquement la loi de création que l'on vient de reconnaître, la réforme de la première et de la plus grande des sciences, la réforme des mathématiques, en lui donnant cette philosophie absolue et infaillible qui résulte de la loi de création, c'est-à-dire, de la réalité elle-même de l'absolu. Cette philosophie des mathématiques et la réforme qui en est la conséquence inévitable, se trouvent, pour ainsi dire, achevées déjà dans nos ouvrages mathématiques; et il ne nous reste plus qu'à fixer quelques points accessoires, pour lesquels nous destinons les ouvrages présents. — Nous pensons donc que les philosophes accorderont aujourd'hui quelque confiance à nos travaux; et, pour les rendre juges de cette inattendue révolution scientifique, surtout dans les sciences mathématiques, nous allons ici, en peu de mots, en supposant d'ailleurs que l'on a sous les yeux nos ouvrages, exposer les résultats principaux auxquels nous sommes parvenus sur cette voie nouvelle.

Avant tout, il faut savoir que toutes les sciences mathématiques se réduisent, en principe, à la science pure des quantités, c'est-à-dire, à l'Algorithmie. Or, voici quel est son système absolu, tel que nous l'a donné, en grand détail, la loi de création dont il s'agit.

SYSTÈME ARCHITECTONIQUE DE L'ALGORITHMIE,

D'APRÈS LA LOI DE CRÉATION.

- A) *Théorie on Autothésie*; ce qu'il y a de donné dans le savoir de l'homme pour établir l'Algorithmie.
- a) *Contenu ou Constitution algorithmique.*
- 20) *Partie élémentaire.* == ALGORITHMES ÉLÉMENTAIRES (20 nombre de sept).
- a3) *Éléments primitifs.* == ALGORITHMES PRIMITIFS.
- a4) *Élément fondamental*; génération neutre des nombres. == REPRODUCTION. (I)
- a) *Progressive.* == MULTIPLICATION.
- β) *Régressive.* == DIVISION.
- b4) *Éléments primordiaux:*
- a5) *Génération discontinue des nombres, en n'impliquant que l'idée du fini.* == SOMMATION..... (II)
- a) *Progressive.* == ADDITION.
- β) *Régressive.* == SOUSTRACTION.
- b5) *Génération continue des nombres, en impliquant l'idée de l'infini.* == GRADUATION..... (III)
- a) *Progressive.* == POURSUITE.
- β) *Régressive.* == RACINES.
- b3) *Éléments dérivés.* == ALGORITHMES ORGANIQUES.
- a4) *Éléments dérivés immédiats ou distincts.* == ALGORITHMES INHERENTS.

RÉFORME DES

- a5) La Sommation combinée avec la Reproduction. = NUMÉRATION.... (IV)
Note. — Le cas particulier forme les NUMÉRALES.
- b5) La Graduation combinée avec la Reproduction. = FACULTÉS..... (V)
Note. — Le cas particulier forme les FACTORIELLES.
- b4) Éléments dérivés *médiate* ou *transitifs*. = ALGÈBRES TRANSCENDANTES.
- a5) Transition de la Numération aux Facultés; la Sommation faisant fonction de Graduation. = LOGARITHMES..... (VI)
- b5) Transition des Facultés à la Numération; la Graduation faisant fonction de Sommation. = SINUS ET COSINUS..... (VII)
- b2) Partie *systématique*. = ALGÈBRES SYSTÉMATIQUES (au nombre de quatre).
- a3) *Diversité* dans la réunion systématique des éléments primordiaux.
- a4) Influence *partielle*:
- a5) Influence de la Sommation sur la Graduation dans leur réunion systématique. = CALCUL DES DIFFÉRENCES ET DES DIFFÉRENTIELLES... (I)
- b5) Influence de la Graduation sur la Sommation dans leur réunion systématique. = CALCUL DES GRADES ET DES GRADUES..... (II)
Note. — Voyez l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques* pour saisir le sens de ce nouveau Calcul algorithmique, découvert par la présente application de la loi de création, ainsi que plusieurs autres algorithmes suivants, dont on ne se doutait pas auparavant.
- b4) Influence *réci-proque* de ces éléments primordiaux; *harmonie systématique* entre la Sommation et la Graduation par leur *concours stéochogique* à la génération des nombres. = CALCUL DES COMBINAISONS.... (III)
Note. — Le type de cette stéochologie algorithmique est :
- $$x^n \equiv a; \quad (\text{Module} = M).$$
- C'est Gauss qui le premier en a conçu le problème; mais cet illustre géomètre n'a pu le résoudre que pour le cas simple des *résidus quadratiques*, et cela même dans des bornes très resserrées.
- b3) *Identité finale* dans la réunion systématique des éléments dérivés distincts ou des algorithmes immanents de la Numération et des Facultés, par le moyen de l'élément-neutre ou de l'algorithme de la Reproduction, qui leur est commun. = CALCUL DES ÉQUIVALENCES..... (IV)
Note. — C'est là ce que l'on nomme la *Théorie des équations algébriques de différents degrés*.
- b2) *Forme ou Comparaison algorithmique.*
- a2) Dans la partie *élémentaire*. = RAPPORTS.
- a) Rapport dépendant de l'algorithme *neutre* de la Reproduction. = RAPPORT (dit) *géométrique*.
- 3) Rapport dépendant des algorithmes *primordiaux*:
- a2) De la Sommation. = RAPPORT ARITHMÉTIQUE.
- 3a) De la Graduation. = RAPPORT DE SALTATION.
- b2) Dans la partie *systématique*. = ÉQUATIONS.
- a) Équations dépendant de la susdite *diversité systématique*:

- a2) De la diversité *partielle*;
 a3) Équations aux Différences et aux Différentielles.
 p3) Équations aux Grades et aux Gradules.
 p2) De la diversité *réiproque*. = ÉQUATIONS DE CONVERGENCES (Équations indéterminées en général).
 b) Équations dépendant de la *soudite identité* systématique. = ÉQUATIONS D'ÉQUIVALENCE.
- B) *Technie ou Autogénie*; ce qu'il faut faire pour l'accomplissement de l'Algorithme.
- a) Dans le *contenu* ou dans la *Constitution* algorithmique.
- a2) Dans la partie *élémentaire* de cette Constitution.
- a3) Pour la *mesure* des quantités par les éléments *immédiats* ou *distincts*; accomplissement des algorithmes *immanents*. = ALGORITHMES TECHNIQUES DU 1^{er} Degré.
- a4) Accomplissement de la *Numeration*.
 a5) Avec prépondérance de la *Somme*; instrument technique *primordial*. = SÉRIES.
 b5) Avec prépondérance de la *Reproduction*; instrument technique *secondaire*. = FRACTIONS CONTINUES.
- b4) Accomplissement des *Facultés*.
 a5) Avec prépondérance de la *Graduation*; instrument technique *primordial*. = FACULTÉS EXPONENTIELLES.
 b5) Avec prépondérance de la *Reproduction*; instrument technique *secondaire*. = PÉRIODES CONTINUES.
- b3) Pour la *détermination* des quantités par les éléments *médiats* ou *transitifs*; accomplissement des algorithmes *transcendants*. = ALGORITHMES TECHNIQUES DU 2^e Degré.
- a4) Accomplissement des *Logarithmes*. = ORDRES SUPÉRIEURS DE LOGARITHMES.
Nota. — Ce sont là les logarithmes des *quantités idéales* (faussement dites *imaginaires*), comme l'est, par exemple, le logarithme par lequel Jean Bernoulli est parvenu à déterminer, d'une manière finie, le célèbre rapport π de la circonférence au rayon du cercle; rapport qui, au reste, peut en définitive être déterminé ainsi par les seuls *algorithmes primitifs*, comme nous l'avons fait dans l'expression finie que voici:
- $$\pi = \frac{4.00}{\sqrt{-1}} \cdot \left[(1 + \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} - (1 - \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} \right];$$
- expression qui donne euoséquemment la solution finale du fameux problème de la quadrature du cercle.
- b4) Accomplissement des *Sinus* et *Cosinus*. = ORDRES SUPÉRIEURS DE SINUS ET COSINUS.
Nota. — Pour se former une idée de ces ordres supérieurs de Sinus et Cosinus, constituant de nouvelles fonctions périodiques, qui sont demeurées inconnues aux géomètres, voyez l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, aux marques (53) à (59), et la Note de la page 523 dans le second volume de la *Philosophie de la Technie algorithmique*.

ba) Dans la partie *systématique* de cette Constitution.

a3) Pour l'accomplissement de l'*harmonie préétablie* ou de la *préformation primitive* dans les deux éléments primordiaux; *raison suffisante* pour la détermination des quantités par leurs conditions systématiques, c'est-à-dire, par les valeurs de leurs Différences ou Différentielles, et par celles de leurs Grades ou Gradules. = *INTERPOLATION*.

b1) Pour l'accomplissement de l'*identité primitive* des deux éléments primordiaux; *universalité absolue* dans la génération des quantités. = *LOI SUPRÊME ou L'ALGORITHME*.

Nota. — Le type de cette loi suprême est :

$$Fx = A_0.\Omega_0 + A_1.\Omega_1 + A_2.\Omega_2 + A_3.\Omega_3 + \text{etc., etc.}$$

Le célèbre théorème de Taylor, qui en est le cas le plus particulier, a été le premier essai de cette génération universelle des quantités.

b) Dans la forme ou dans la *Comparaison* algorithmique.

a2) Dans la partie *élémentaire* de cette Comparaison; accomplissement des *rapports* algorithmiques, en vue de l'*uniformité* de la génération des quantités; *régle* de cette génération uniforme. = *CASES ALGORITHMIQUES*.

Nota. — La Théorie des *fonctions génératrices* de Laplace en présente un particulier.

ba) Dans la partie *systématique* de cette Comparaison; accomplissement des *équations* algorithmiques, en vue de l'*identité finale* ou de la génération universelle des quantités. = *PROBLÈME-UNIVERSAL DE L'ALGORITHME*.

Nota. — Le type de ce Problème-universel est :

$$0 = fx + x.f_1x + x.f_2x + x.f_3x + \text{etc., etc.}$$

Le célèbre théorème de Lagrange, qui en est le cas le plus particulier, a été le premier essai de la solution de ce Problème-universel des Mathématiques.

Tel est donc le système de réalités que présente, dans l'univers, l'existence des quantités. — Or, il faut savoir que, dans nos ouvrages mathématiques, et spécialement dans l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques* et dans la *Philosophie de la Technique algorithmique*, toutes les parties de ce système absolu de l'Algorithmie ont été déduites, dans leur plus grand détail, uniquement suivant le sens de la loi de création, que nous avons reconnu devoir présider ainsi à la réforme de toutes les sciences (*). De cette manière,

(*) Le tableau présent de ce système de l'Algorithmie diffère, par son accomplissement dans la *Comparaison technique*, de celui qui se trouve à la fin de notre *Introduction à la Philosophie des Mathématiques*. Mais, cet accomplissement concernant la Comparaison technique, a déjà été introduit, avec beaucoup de détails, dans le premier tome de la *Philosophie de la Technique algorithmique*, pages 146 à 153, et spécialement dans le tableau de cette Technique qui se trouve à la dernière des pages que nous venons de citer.

C'est ici le lieu de prévenir également que le système architectonique de la Géométrie, tel qu'il est

toutes ces parties constituantes du système de l'Algorithmie, de cette partie fondamentale des Mathématiques, ont reçu leur véritable signification, telle que la loi de création la donne universellement aux parties constituantes de tous les systèmes de réalités en général. Et, par cette haute signification introduite dans la partie fondamentale des mathématiques, ces sciences, en recevant, pour ainsi dire, une vie, une âme, ou proprement une réalité absolue dont elles étaient privées jusqu'alors, présentent déjà une très grande anticipation sur la réforme définitive que, suivant la même loi de création, toutes les sciences, en leur donnant ainsi leur véritable signification, leur réalité absolue, doivent subir dans la première période de l'ère des buts absolus, que nous avons signalée plus haut.

Mais, comme nous venons de le dire, cette classification systématique, qui doit introduire la véritable signification dans nos connaissances scientifiques, et qui, en considérant les trois parties que nous avons reconnues dans la philosophie des sciences, forme visiblement l'objet de leurs Architectoniques respectives, cette classification, disons-nous, n'est encore qu'une préparation à leur réforme, telle qu'elle doit être opérée définitivement en vertu même de cette loi de création. En effet, ayant ainsi fixé les diverses parties absolues d'une science, il faudra maintenant établir, d'une manière nécessaire, la réalité spéciale de chacune de ces parties constituantes, surtout en les rattachant toutes à la réalité universelle du système entier qui est l'objet de la science. Cette double tâche, qui doit achever la régénération des sciences, est proprement le but de leurs Métaphysiques respectives, formant la seconde partie de leur philosophie. Nous allons exposer les points principaux de cette dernière considération.

Avant tout, il faut remarquer que, puisque les objets des sciences ne sont pas encore donnés, ou du moins puisqu'ils doivent ici être considérés comme n'étant pas donnés, les parties constituantes de leurs systèmes respectifs, telles qu'elles proviennent universellement de la loi de création, ne peuvent encore recevoir d'autre détermination que celle précisément que leur donne cette loi de création. Ainsi, il semble de nouveau impossible de fixer ultérieurement quelque chose sur la réalité spéciale de ces parties constituantes des systèmes scientifiques, avant que les objets respectifs des sciences soient donnés. Ce-

donné dans le tableau à la fin de notre Introduction à la Philosophie des Mathématiques, n'est qu'une ébauche du système absolu de la Géométrie qui, par l'application complète de la loi de création, se trouve produit dans les Préliminaires du Mécanisme (pages 276 à 279), à la suite du système absolu de l'Algorithmie que nous venons de reproduire. — On voit déjà que, n'ayant pas encore parlé de Mécanisme ou de notre philosophie absolue, nous avons produit la Philosophie des Mathématiques en prêtant la fondation uniquement sur la nouvelle et haute réforme philosophique de l'Algorithme, et en excluant notre principe fondamental, la loi de création, que nous y développons aujourd'hui.

pendant, en observant, d'une part, que la réalité en question de ces parties intégrantes dans les systèmes scientifiques, comme toute réalité en général, est produite nécessairement par une identification du savoir avec l'être, dont le dernier présente les matériaux ou en quelque sorte le corps de cette réalité spéciale, et le premier la liaison réciproque de ces matériaux ou en quelque sorte l'âme de cette même réalité, et en observant, d'autre part, que le savoir objectif, dont il s'agit ici, nous est donné généralement par la seule réalité de l'absolu, comme nous l'avons vu plus haut, nous concevrons la possibilité de statuer à priori les points principaux concernant ces réalités spéciales dont se composent les divers systèmes des sciences, parce que précisément, dans ce savoir intégrant ou générateur de toute réalité, se trouve la considération scientifique principale de cette réalité. — Nous allons ainsi statuer effectivement ces points principaux.

A cause de l'unité de l'absolu, le savoir objectif, celui qui n'est point le nôtre, et qui se trouve impliqué dans la réalité de tout système étranger à nous-mêmes, et spécialement dans la réalité des parties constituantes de ce système, est nécessairement conforme à notre propre savoir, lequel nous est manifesté par la conscience où il s'établit, comme tout savoir en général, précisément en vertu même de la réalité de l'absolu. « Ainsi, puisque les caractères, essentiels et formels (concernant le contenu et la forme), des objets d'un système proviennent entièrement, quant au principe, du caractère même du savoir qui est impliqué dans ce système de réalités, et spécialement, puisque le caractère essentiel (de génération ou de constitution) provient du contenu dans le savoir, et que le caractère formel (de relation ou de comparaison) provient de la forme dans le savoir, il faut généralement, pour déterminer ces caractères des objets d'un système, appliquer à ces objets la diversité caractéristique qui se trouve dans notre propre savoir, en le considérant respectivement par rapport à son contenu, et par rapport à sa forme. Or, cette diversité intellectuelle consiste notoirement dans la diversité des facultés du savoir, fondée sur la TRICHOTOMIE DE L'ABSOLU, à laquelle correspond la triple manifestation de la réalité de l'absolu, telle que nous l'avons signalée plus haut pour pouvoir établir les trois éléments primitifs de tout système de réalités; c'est-à-dire, que cette diversité intellectuelle est fondée sur l'opposition du caractère *VIS* de l'être et du caractère *INFINI* du savoir, et sur leur neutralisation réciproque dans le caractère *INDEFINI* de la réalité. C'est en effet, sur l'opposition du fini et de l'infini que sont fondées, les deux facultés opposées de l'Entendement et de la Raison, et sur leur neutralisation dans l'indéfini, la faculté intermédiaire du Jugement; et c'est dans la diversité des lois de ces facultés intellectuelles primordiales que consiste la diversité caractéristique qui a lieu dans la nature du savoir. Donc, pour déterminer les caractères respectifs, essentiels et formels, des objets composant

• un système, il suffit d'appliquer, à ces objets, la diversité des lois des facultés intellectuelles que nous venons de nommer, ou les considérant séparément par rapport au contenu, et par rapport à la forme de notre savoir.

• — Or, sans entrer ici dans aucune déduction, nous remarquerons que les caractères distinctifs des lois de l'Entendement, du Jugement et de la Raison, sont respectivement la *signification*, la *détermination* et la *fondation*, en les considérant par rapport au contenu du savoir; et la *spécification*, la *corrélation* et la *subordination* (*), en les considérant par rapport à la forme du savoir. Ainsi, les caractères ESSENTIELS des objets composant un système de réalités, portent nécessairement sur la signification de ces objets, sur leur détermination et sur leur fondation; et les caractères FORMELS de ces mêmes objets portent nécessairement aussi sur leur spécification, sur leur corrélation et sur leur subordination.

Il faut donc, pour établir la réalité spéciale de chacune des diverses parties composant le système d'une science, ce qui est la première tâche de sa Métaphysique, fixer ceux des six points précédents, desquels dépendent les caractères propres de cette réalité. On aura ainsi, pour chacune de ces parties architectoniques d'une science, trois considérations distinctes et nécessaires; et spécialement, on aura, d'une part, pour celles de ces parties qui concernent le contenu (la génération ou la constitution), les trois considérations distinctes suivantes : 1° la *conception de leur objet* (signification); 2° leur *loi fondamentale* (fondation); et 3° les *circonstances immédiates* (détermination); et l'on aura, de l'autre part, pour celles de ces parties qui concernent la forme (la relation ou la comparaison), les trois considérations également distinctes que voici : 1° la *classification* de leurs objets respectifs (spécification); 2° leur *comparaison* (corrélation); et 3° leur *solution problématique* (subordination).

C'est de cette manière que devra être établie universellement, dans chaque système scientifique, la réalité spéciale de chacune des diverses parties constitutives de ce système; et c'est là, comme nous l'avons déjà remarqué, la première tâche de la Métaphysique des sciences, considérée sous l'aspect présent de la réalité de l'absolu. Ce n'est aussi que de cette manière que l'on peut, non-seulement faire des progrès rapides, mais surtout atteindre les résultats *véraments* dans toutes les sciences en général; au point que tous les autres travaux scientifiques, qui n'ont pas encore cette direction absolue, ne peuvent être considérés que comme *provisotaires*, et ils doivent, pour recevoir leur perfection nécessaire, être ramenés à cette même direction universelle, dans laquelle seule la raison de l'homme peut découvrir la réalité

(*) Les mots *signification*, *détermination*, *fondation*, répondent ici aux mots allemands *bedeutung*, *bestimmung*, *grundlegung*; et le mot *subordination* est pris dans son acception dialectique.

absolue de l'univers. — Encore ici, avant de proposer cette réforme métaphysique nécessaire pour toutes les sciences, nous l'avons exécutée complètement pour les sciences mathématiques, en effectuant cet établissement absolu de la réalité, sous les trois aspects respectifs, dans chacune des diverses branches de l'Algorithmie, telles qu'elles sont déterminées plus haut dans le système architectonique de cette partie fondamentale des Mathématiques. Pour s'en convaincre, il suffit de jeter les yeux sur la table méthodique des matières qui précède notre Introduction à la Philosophie des Mathématiques. — Mais, pour se former une idée claire et en quelque sorte sensible de toute cette réforme des sciences dont nous traitons, telle qu'elle résulte de la loi de création, il faut étudier la Philosophie des Mathématiques que nous présentons aujourd'hui pour exemple de cette nécessaire réforme, et il faut l'étudier dans tous nos ouvrages qui ont déjà paru, afin de connaître les différents aspects sous lesquels, dans ces ouvrages, nous considérons cette nouvelle philosophie. Cette étude est même indispensable pour quiconque veut approfondir la réforme générale dont il s'agit : en effet, sans les secours supérieurs que peut fournir la connaissance de la philosophie absolue elle-même, il est presque impossible d'approfondir cette réforme dans la généralité dans laquelle nous la traitons ici, si l'on n'appuie ces arguments sur les résultats correspondants que nous avons obtenus pour la philosophie des mathématiques. Par cette application, on reconnaîtra ainsi, d'abord *in concreto*, le véritable sens de ces arguments; et l'on pourra ensuite, *in abstracto*, remonter de plus en plus jusqu'à leur sens général (*).

Il nous reste à signaler la seconde et dernière tâche de la Métaphysique des sciences, laquelle, d'après ce qui a déjà été dit plus haut, consiste à rattacher cette réalité spéciale qui, sous les six aspects que nous venons de fixer, doit être établie dans les parties architectoniques d'une science, à la rattacher, disons-nous, à la réalité universelle du système entier de cette science. — Or, pour peu que l'on reporte l'attention sur ce que nous avons reconnu plus haut à l'égard de l'universalité dans chaque système de réalités, on se rappellera que les principes de cette universalité se trouvent respectivement, pour le contenu ou l'essence de cette réalité, dans l'unité fondamentale de toute génération, qui est l'objet de ce que nous avons nommé *l'UN SEPARÉ* du système, et, pour la forme ou la manière d'être de cette même réalité, dans l'unité

(*) Nous avons déjà dit plus haut que cette dernière partie de l'ouvrage présente à elle seule il y a trente ans, et que depuis ce temps nous avons réalisé, dans nos ouvrages antérieurs, la réforme en question de plusieurs autres sciences, comme nous le dirons dans la Conclusion, où l'on verra que, sans avoir besoin de recourir à nos ouvrages mathématiques, on peut maintenant se former déjà, par ces autres sciences, morales et philosophiques, une idée exacte de l'actuelle et urgente réforme générale des sciences dont il s'agit.

fondamentale de toute relation, qui est l'objet de ce que nous avons nommé **PROBLÈME-UNIVERSEL** dans le même système. Ainsi, pour rattacher à la réalité universelle d'un système scientifique, les réalités spéciales et individuelles des diverses parties constituantes de ce système, il faut ramener ces réalités spéciales ou individuelles des diverses parties architectoniques, respectivement, à la Loi suprême de ce système, lorsque ces parties concernent le contenu ou l'essence de la réalité dont il s'agit, et au **Problème-universel** du même système, lorsque ces parties concernent la forme ou la manière d'être de cette réalité. Il faut donc, d'une part, déduire, de la **LOI SUPRÊME** d'un système scientifique, toutes les **LOIS FONDAMENTALES** des diverses parties de ce système qui concernent la génération ou la constitution de la réalité; et, de l'autre part, il faut déduire, de la solution générale du **PROBLÈME-UNIVERSEL** de ce même système, toutes les **SOLUTIONS PROBLÉMATIQUES** générales dans les diverses parties qui concernent la relation ou la comparaison de la réalité dont il est question dans ce système scientifique. — Et c'est là proprement la seconde et dernière tâche de la Métaphysique des sciences.

Mais, parmi les diverses parties qui, suivant leur déduction architectonique que nous avons donnée plus haut, composent un système de réalités formant l'objet d'une science, il s'en trouve toujours une, très-importante, qui, pour ainsi dire, échappe aux lois de l'universalité dominante dans le système, c'est-à-dire, qui, tout en se conformant à cette universalité, paraît néanmoins suivre des lois singulières. C'est celle que, dans le système général de réalités, nous avons nommée *Concours-final*, c'est-à-dire, celle qui provient de l'influence systématique-réciproque des deux éléments primordiaux et opposés dans la génération de la réalité. En effet, donnant plus haut la déduction de cette partie-systématique singulière, nous avons déjà remarqué que cet accord des deux éléments hétérogènes, qui y a lieu, ne peut être déterminé dans ce même système, et par conséquent que cet accord ne peut y être que le résultat d'une pure finalité, dont la détermination se trouve dans quelque système supérieur de réalités. On ne saurait donc, dans le système dont il s'agit, fixer, d'une manière nécessaire et didactique, cet accord ou concours-final des éléments hétérogènes; on ne peut que le reconnaître, comme un fait contingent et téléologique. Néanmoins, puisque ce concours-final doit demeurer conforme à l'universalité qui règne dans le système, parce que, sans cela, il cesserait d'appartenir à ce système, il doit exister, au moins pour la possibilité de ce concours téléologique, une loi fondamentale dérivant, comme celles des autres branches architectoniques, de la loi suprême qui régit ce même système de réalités. Mais, de la possibilité de cet accord ou concours-final dont il est question, laquelle le rend conforme à l'universalité du système, on ne saurait déduire l'effectivité même de ce concours téléologique, parce que, comme résultat d'une pure finalité, cette effectivité n'a point de prin-

cipes nécessaires dans ce même système. Cependant, la conformité nécessaire de ce concours avec l'universalité du système, introduit une espèce de coexistence correspondante ou plutôt une généralité et une subordination dans les divers faits qui présentent le concours-final dont il s'agit; de sorte que la connaissance de ces faits téléologiques implique une détermination scientifique, fondée sur un principe spécial que l'on doit pouvoir établir, du moins d'une manière contingente, dans le même système de réalités. Nous nommerons *téléologie* cette détermination ou déduction scientifique des faits concernant l'accord ou le concours-final (*teleiotes*) dont il est question (*); et nous observerons que cette téléologie devient une partie complémentaire indispensable dans chaque système scientifique. Par suite de cette dénomination, nous nommerons *Principe téléologique* ce principe spécial duquel dérive l'effectivité même des faits qui présentent l'accord ou le concours dont il s'agit; principe qui, ne pouvant être déduit de la loi suprême elle-même du système, de laquelle il reçoit néanmoins sa possibilité, ne peut s'établir que d'une manière contingente dans ce même système. Il faut, en effet, ne pas perdre de vue qu'il cause de la pure finalité qui est l'objet de la téléologie dont il s'agit; il n'y a que la possibilité des faits relatifs à cette finalité, et par conséquent la possibilité de leur principe téléologique, qui puisse être déduite de la loi suprême, et qui puisse ainsi être établie d'une manière nécessaire. Aussi, à l'instar des autres parties du système, celle dont il est question, a-t-elle sa loi fondamentale pour la possibilité des faits qui la composent; mais, pour l'effectivité de ces faits, elle ne peut avoir qu'un principe contingent, qui est le principe téléologique que nous venons de signaler.

Ainsi, dans tout système de réalités faisant l'objet d'une science, pour établir complètement les bases de ces réalités, il faut découvrir et fixer 1° sa loi suprême, 2° son principe-universel, et 3° son principe téléologique. La première régit l'universalité dans le contenu ou l'essence de ce système; le second embrasse l'universalité dans la forme ou la manière d'être de la même réalité; enfin, le troisième détermine la contingence finale qui a lieu dans chaque système de réalités. Ce n'est donc qu'après avoir posé ces trois bases dans un système scientifique, qu'on peut établir l'édifice de la science; et c'est là proprement la tâche principale de la Métaphysique dans la philosophie de chaque science.

On doit s'attendre qu'ayant voulu, avant tout, réaliser, dans les sciences

(*) Il ne faut pas confondre, comme nous en avons déjà prévenu plus haut, cette finalité caractéristique (*teleiotes*) dans le monde, avec la finalité purement subjective (*subjectivité*) dans les fonctions intellectuelles au sein de notre volonté. C'est la première qui est proprement l'objet de cette partie systématique dont il s'agit ici, et que nous nommons *Concours-final*; la seconde est le caractère général de la *Finalité*, comme nous l'avons vu plus haut.

mathématiques, ces hautes spéculations concernant la réforme définitive des sciences, nous avons dû poser ces trois bases pour l'Algorithmie qui, comme nous l'avons déjà remarqué, est la partie fondamentale des Mathématiques. En effet, les deux premières de ces bases, la Loi suprême et le Problème-universel, sont déjà établies dans nos ouvrages; et la dernière, le Principe téléologique, est également découverte et va être établie dans l'ouvrage présent, pour compléter ce grand exemple que, par la réforme des mathématiques, nous donnons pour la réforme urgente de toutes les sciences. — La Loi suprême de l'Algorithmie a déjà été signalée à la fin de l'Introduction à la Philosophie des Mathématiques; mais, c'est proprement dans le premier tome de la Philosophie de la Technique, que nous l'avons établie et déduite rigoureusement. Le Problème-universel de l'Algorithmie a été également établi dans ce premier tome de la Philosophie de la Technique (pages 153 à 171); mais, déjà auparavant, dans la Réfutation de Lagrange (à la fin du premier Mémoire, pages 30 et suiv.), nous avions donné, par anticipation, la solution générale et rigoureuse de ce Problème-universel. Quant au Principe téléologique de l'Algorithmie, qui, d'après le système architectonique susdit de cette branche fondamentale des Mathématiques, doit présider à la construction de ce qu'on appelle THÉORIE DES NOMBRES, et spécialement à la construction des CONGRUENCES qui constituent la considération principale de cette Théorie, nous n'avons pas voulu le faire connaître avant d'avoir déduit et développé philosophiquement cet état de finalité ou cette contingence téléologique qui a lieu dans tout système de réalités; déduction et développement que nous venons de donner dans l'exposé présent de la Réforme des Sciences. Il est vrai que nous avons déjà signalé, dans le second tome de la Philosophie de la Technique (pages 79 à 81), cet état téléologique de la Théorie des Nombres; mais le caractère propre de cette finalité ou contingence téléologique ne pouvait être fixé que par les considérations philosophiques supérieures auxquelles nous venons de nous élever par l'établissement de la loi de création. Il faut cependant remarquer que, dans l'Introduction à la Philosophie des Mathématiques, nous avons déjà donné (pages 67 et suiv.) la loi fondamentale de la Théorie des Nombres, en observant ici, d'après ce que nous venons de reconnaître universellement sur la finalité dans tout système de réalités, que cette loi fondamentale ne peut établir que la POSSIBILITÉ de la Théorie des Nombres; et en effet, par la construction idéotique des fonctions alephs qui entrent dans cette loi fondamentale (voyez page 69 de cette Introd. à la Philos. des Mathém.), se trouve établie rigoureusement la possibilité générale des congruences, qui, comme nous l'avons déjà dit, constituent la considération principale de la Théorie en question. Il reste donc à établir l'ATTRACTIVITÉ même de cette Théorie toute singulière, en posant son PRINCIPAL TÉLÉOLOGIQUE; et c'est ce que nous allons faire, pour compléter l'exemple que, par la nouvelle philosophie

des mathématiques, nous présentons ici pour la réforme générale des sciences.

Sans répéter nos déductions, nous rappellerons ici que l'objet général de la Théorie des Nombres est donné par le schéma... (1)

$$P + Q = M \times N,$$

ainsi que nous l'avons reconnu dans les ouvrages mathématiques que nous venons d'alléguer. Et nous observerons que ce schéma présente généralement la conformité ou l'accord entre les deux algorithmes primitifs opposés, la sommation et la graduation. Or, cette sommation simple ($P + Q$), étant élevée à l'algorithme de la numération, reçoit la forme composée... (2)

$$A + B.x + C.x^2 + D.x^3 \dots + R.x^r,$$

qui, suivant ce que nous avons appris sur la nature de cet algorithme, est la forme universelle de la génération de toute quantité, moyennant l'influence prédominante de l'algorithme primitif de la sommation. Ainsi, l'accord ou la conformité dans l'influence réciproque des deux algorithmes primitifs opposés, de la sommation et de la graduation, dans la génération des quantités, doit, en Algorithmie, avoir la forme générale... (3)

$$A + B.x + C.x^2 + D.x^3 \dots + R.x^r = M \times N;$$

forme qui, en considérant le nombre N comme indéterminé, présente la congruence générale... (4)

$$A + B.x + C.x^2 \dots + R.x^r \equiv 0, \quad (\text{mod. } = M).$$

C'est donc là, en y joignant la considération de la possibilité de cette congruence, telle que nous l'avons déduite, par le moyen des fonctions alephs, dans notre Philosophie des Mathématiques (page 69), c'est là, disons-nous, l'expression générale du fait téléologique qui est l'objet de la Théorie des Nombres. C'est donc également dans les principes de cette congruence (4) que doit se trouver le principe téléologique que nous avons à fixer.

Or, les principes algorithmiques de l'équivalence composée (3) qui donne lieu à la congruence (4), consistent notoirement dans l'équivalence simple... (5)

$$x^n = a.$$

C'est donc également dans la congruence simple... (6)

$$x^n \equiv a, \quad (\text{mod. } = M),$$

que doit se trouver le Principe téléologique dont il est question. Ainsi, pour établir ce principe, il faut fixer les lois que suivent, dans leur détermination réciproque, les quantités a , m , M et x qui entrent dans la constitution de cette congruence simple mais générale (6). Et c'est ce que nous allons faire.

Avant tout, il faut nous rappeler ici ce que, dans l'Introduction à la Philosophie des Mathématiques (pages 152 et suiv.), nous avons dit, sous les marques (ds), (dt), etc., sur la construction de certaines fonctions, analogue à celle des fonctions alephs, et donnant les termes consécutifs des séries récur-

rentes à échelles variables. Ces fonctions, que nous y avons désignées provisoirement par le nom de *médiaieurs*, sont proprement nos fonctions alephs, considérées dans leur généralité, comme nous le montrerons en donnant l'intégration générale des équations aux différences de tous les ordres et à coefficients variables, que nous avons déjà prouvé dans le second tome de la Philosophie de la Technie (page 550). Or, par la propriété dont jouissent les fonctions alephs de servir de principes à la possibilité de la Théorie des Nombres, comme cela est manifeste par la loi fondamentale de cette Théorie, alléguée plus haut et déduite dans la Philosophie des Mathématiques (pages 65 et suiv.), on conçoit d'avance que, si l'Algorithmie doit fournir de ses fonctions à la construction des lois téléologiques de la Théorie des Nombres, ce ne peuvent être que précisément ces fonctions alephs, prises dans la généralité dans laquelle nous venons de les signaler. Seulement il faut remarquer que, pour perdre leur caractère d'universalité, dont jouissent toutes les fonctions algorithmiques en général, les fonctions alephs, en se prêtant à la Théorie des Nombres, demeureront sans doute attachées à quelques circonstances singulières qui leur donneront ici un caractère d'individualité absolue, formant proprement le caractère téléologique.

N'ayant pas encore déclaré, pour ces fonctions dénommées médiaieurs dans notre Philosophie des Mathématiques, leur propriété originaire de former des fonctions alephs générales, nous leur avons laissé provisoirement ce nom de *médiaieurs*, que les géomètres venaient d'employer pour un de leurs cas particuliers. Dorénavant, nous les désignerons par leur nom générique de *fonctions alephs*, et nous conserverons pour elles la notation et la construction générale suivante. — Soient ... (7)

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \text{etc.}, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & \text{etc.}, \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & \text{etc.}, \\ \text{etc., etc.}, \end{array}$$

plusieurs systèmes de quantités déterminées par des lois ou du moins par des générations spéciales, quantités que nous continuerons à nommer *bases*; le système de fonctions alephs correspondantes ... (8)

$$N^{(a)}, N^{(b)}, N^{(c)}, N^{(d)}, N^{(e)}, \text{etc.}$$

sera construit médiaitement de la manière suivante ... (9)

$$\begin{array}{l} N^{(a)} = 1, \\ N^{(b)} = a_1 \cdot N^{(a)}, \\ N^{(c)} = a_2 \cdot N^{(b)} + b_1 \cdot N^{(a)}, \\ N^{(d)} = a_3 \cdot N^{(c)} + b_2 \cdot N^{(b)} + c_1 \cdot N^{(a)}, \\ N^{(e)} = a_4 \cdot N^{(d)} + b_3 \cdot N^{(c)} + c_2 \cdot N^{(b)} + d_1 \cdot N^{(a)}, \\ \text{etc., etc.} \end{array}$$

Quant à leur construction immédiate, ces fonctions alephs sont engendrées notoirement par leurs éléments que, dans nos ouvrages, nous désignons communément par $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$; éléments qui, dans tous les cas, dépendent des bases $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$; $b_1, b_2, b_3, \text{etc.}$; etc. Cette construction immédiate est proprement l'objet de l'intégration générale des équations, dont nous venons de parler. Nous ne nous en occuperons pas ici, parce qu'elle est inutile pour notre but présent.

Or, lorsque les diverses bases (7) suivent des lois déterminées, c'est-à-dire, lorsqu'on peut exprimer généralement leurs termes respectifs, les fonctions alephs (8) peuvent recevoir une expression générale ou algébrique, donnée précisément par l'intégration des équations correspondantes (9), de laquelle nous venons de parler. C'est cette expression générale des fonctions alephs qui présente leur construction immédiate avec leurs éléments susdits $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$ Mais, lorsque les diverses bases (7) ne suivent pas des lois explicites, ou ne peuvent pas être exprimées généralement, les fonctions alephs correspondantes (8) ne sauraient recevoir une expression générale ou algébrique (immanente ni transcendante), et elles ne peuvent être engendrées ou calculées autrement que par leur expression médiate consécutive (9). Ces fonctions alephs, dans ce dernier cas, ne présentent donc que des expressions particulières ou arithmétiques, et elles ne forment ainsi que des résultats purement numériques. Cependant, lorsque les bases (7), sans pouvoir être exprimées généralement par des fonctions algébriques, sont néanmoins engendrées suivant un mode général déterminé, ces bases $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$, $b_1, b_2, b_3, \text{etc.}$, etc., participent en quelque sorte à la généralité impliquée dans le premier des deux cas que nous venons de considérer, et elles ont et soutiennent absolument le caractère de PARTICULARITÉ qui est impliqué dans le second de ces deux cas. C'est cette singularité qui est proprement le caractère TÉLÉOLOGIQUE des fonctions alephs dont il s'agit. En effet, dans ce troisième cas, ces fonctions alephs, par le mode général que suit la détermination de leurs bases, participent ou du moins se conforment à l'universalité qui règne dans l'Algorithmie; mais, par l'isolement absolu que présentent ces bases résultantes, vu qu'elles ne peuvent être exprimées généralement, ces mêmes fonctions alephs soutiennent alors un caractère d'individualité propre ou indépendante de l'universalité de l'Algorithmie. Et c'est pourquoi, dans ce troisième cas tout singulier, les fonctions alephs en question ne sont ni algébriques (universelles ou générales absolument), ni arithmétiques (particulières ou individuelles absolument): elles sont alors des fonctions téléologiques (occasionnelles ou finales absolument). C'est aussi précisément ce caractère singulier qui, dans ce cas extraordinaire, rend ces fonctions alephs éminemment propres à l'établissement effectif de la Théorie des Nombres dont l'objet, suivant ce que nous avons vu plus haut, consiste dans la finalité algorithmique, laquelle, comme telle, doit demeurer en quelque

sorte indépendante de l'Algorithmie. Et pour cela, le Principe téléologique qui doit fonder cet établissement de la Théorie des Nombres, sera nécessairement construit au moyen de pareilles fonctions alephs téléologiques, comme nous allons le voir.

Observons d'abord que, d'après leur construction médiate (9), les fonctions alephs (8), considérées en général, présentent autant d'ordres différents qu'il y a de suites différentes données $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$, $b_1, b_2, b_3, \text{etc.}$, $c_1, c_2, c_3, \text{etc.}$, etc., pour former les bases (7) qui entrent dans cette construction médiate (9). Lorsqu'il n'existe qu'une seule suite $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$, les fonctions alephs correspondantes sont du premier ordre; lorsqu'il existe deux suites données $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$, et $b_1, b_2, b_3, \text{etc.}$, les fonctions alephs correspondantes sont du second ordre; et ainsi successivement des autres. — Pour notre objet présent, c'est-à-dire, pour l'établissement du Principe téléologique, nous n'aurons besoin que des fonctions alephs du second ordre; encore même, pour ce but, la seconde suite $b_1, b_2, b_3, \text{etc.}$, des bases forme-t-elle une suite d'unités, savoir :

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 1, \quad \text{etc.}$$

Nous n'avons donc besoin de considérer ici que les fonctions alephs simples ... (10)

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= 1, \\ N^{(2)} &= a_1 \cdot N^{(1)}, \\ N^{(3)} &= a_2 \cdot N^{(2)} + N^{(1)}, \\ N^{(4)} &= a_3 \cdot N^{(3)} + N^{(2)}, \\ &\text{etc., etc.} \end{aligned}$$

Or, pour ce qui concerne le mode général que, dans le Principe téléologique en question, doit suivre la détermination consécutive des bases singulières $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$, qui entrent dans cette construction médiate (10) de nos fonctions alephs présentes, voici tout simplement la génération numérique qui le constitue. Soient R et S deux nombres entiers, sur lesquels on opère les divisions suivantes complètes ... (11)

$$\begin{aligned} \frac{S}{R} &= a_1 + \frac{R_1}{R}, \\ \frac{R}{R_1} &= a_2 + \frac{R_2}{R_1}, \\ \frac{R_1}{R_2} &= a_3 + \frac{R_3}{R_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{R_{w-1}}{R_{w-2}} &= a_{w-1} + \frac{R_{w-1}}{R_{w-2}}, \\ \frac{R_{w-2}}{R_{w-3}} &= a_w + \frac{R_w}{R_{w-3}}; \end{aligned}$$

en supposant que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m$ sont les quotients, $R_1, R_2, R_3, \dots, R_{m-1}, R_m$ les restes, jusqu'au reste $R_m = 0$, et en indiquant ainsi par ϖ le nombre de ces divisions successives qui donnent ces quotients et ces restes. Or, ce sont ces quotients ... (12)

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m,$$

qui forment les bases pour la construction médiate générale (10) des fonctions alephs téléologiques dont il s'agit.

Observons en effet que, de cette manière, ces bases se trouveront déterminées par un mode général que présente la génération des quotients a_1, a_2, a_3 , etc., dans les divisions consécutives générales (11); mais qu'à cause de l'individualité impliquée dans les nombres donnés S et R , les restes R_1, R_2, R_3 , etc., et par conséquent les quotients consécutifs en question a_1, a_2, a_3 , etc., doivent impliquer cette même individualité, et ne sauraient être exprimés généralement ou algébriquement. C'est là précisément, dans cette participation à la généralité ou à l'universalité algorithmique, à côté d'une particularité ou d'une individualité absolue, que consiste le caractère téléologique que nous avons reconnu devoir être propre aux fonctions servant à l'établissement de la Théorie des Nombres; et tel sera effectivement le caractère des fonctions alephs (11) construites avec les bases singulières (12) dont il est question.

Pour distinguer et désigner généralement ces fonctions alephs téléologiques, nous nous servirons des deux nombres R et S dont les divisions consécutives (11), au nombre de ϖ , donnent les bases (12) de ces fonctions; et nous adopterons ainsi la notation suivante ... (13)

$$N\left[\frac{S}{R}, \varpi\right]^{(n)},$$

savoir ... (13')

$$\begin{aligned} N\left[\frac{S}{R}, \varpi\right]^{(1)} &= 1, \\ N\left[\frac{S}{R}, \varpi\right]^{(2)} &= a_1 \cdot N\left[\frac{S}{R}, \varpi\right]^{(1)}, \\ N\left[\frac{S}{R}, \varpi\right]^{(3)} &= a_2 \cdot N\left[\frac{S}{R}, \varpi\right]^{(2)} + N\left[\frac{S}{R}, \varpi\right]^{(1)}, \\ N\left[\frac{S}{R}, \varpi\right]^{(4)} &= a_3 \cdot N\left[\frac{S}{R}, \varpi\right]^{(3)} + N\left[\frac{S}{R}, \varpi\right]^{(2)}, \\ &\text{etc., etc.} \end{aligned}$$

Il faut remarquer que, dans cette notation, le nombre ϖ des divisions consécutives (11) est en quelque sorte superflu, parce qu'il résulte nécessairement des deux nombres donnés R et S ; mais ce nombre ϖ devant servir hors de ces fonctions, il convient de le signaler ainsi dans leur notation. — Il est sans doute superflu de faire aussi remarquer que, lorsque les deux nombres R et S

qui donnent les bases (11), sont tels que le nombre R servant de premier diviseur est plus grand que le nombre S servant de premier dividende, le premier quotient ou base a , est zéro, et le premier reste R , est le nombre S .

Nous avons actuellement, dans les fonctions alephs singulières (13) ou (13)', tout ce qu'il nous faut ici pour l'établissement du Principe téléologique de la Théorie des Nombres, auquel nous allons procéder.

Nous avons reconnu plus haut que ce principe doit se trouver dans la congruence simple mais générale (6), c'est-à-dire, dans ... (14)

$$x^m \equiv a, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

et que, pour établir ce principe, il faut fixer les lois que suivent, dans leur détermination réciproque, les quantités a , m , x et M qui entrent dans la construction de cette congruence. — Voici donc ces lois.

Suivant l'usage, nommons x la *racine* de la congruence, a le *résidu*, M le *module*, et m l'*exposant* de la congruence ou l'*indice* du résidu. Et, observant que, pour un exposant donné m , et pour un même module M , il peut y avoir différentes racines x et différents résidus a non équivalents, c'est-à-dire, non congruents entre eux par rapport à ce module donné M , concevons deux nombres arbitraires k et h desquels, dans tous les cas, dépend cette diversité ou multiplicité de résidus et de racines; et, pour établir par là une classification absolue entre ces divers résidus et ces diverses racines, nommons k l'*indice* du *genre*, et h l'*indice* de l'*espèce* de chaque résidu déterminé et de sa racine correspondante. — Nous aurons ainsi, à l'aide des fonctions alephs singulières (13) ou (13)', pour les lois que suit la détermination réciproque des quatre quantités a , x , m et M , qui entrent dans la construction de la congruence générale en question (14), les trois expressions suivantes ... (15)

I. Génération téléologique du résidu :

$$a = (-1)^{m+h} \cdot \left\{ A_{\cdot} (1^{h_1})^k + (-1)^{k+h} \right\} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{h_1})^{m+h}}, \pi \right]^{(m-1)} + Mi;$$

II. Génération téléologique de la racine :

$$x = A + (-1)^{k+h} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{h_1})^k}, \pi \right]^{(m-1)} + Nj;$$

III. Génération téléologique du module :

$$M = \text{fact.} \left[a_{\cdot} (1^{h_1})^{m+h} - \left\{ A_{\cdot} (1^{h_1})^k + (-1)^{k+h} \right\} \right];$$

en désignant respectivement par i et j deux nombres entiers arbitraires, positifs, négatifs, ou zéro, et par l'abréviation *fact.* les facteurs numériques ou

entiers de la quantité à laquelle, dans la dernière de ces expressions, s'applique cette abréviation caractéristique.

C'est donc là, dans ces trois générations (15), que consiste le *Principe téléologique* de la Théorie des Nombres, c'est-à-dire, la loi téléologique de l'Algorithme, constituant la troisième et dernière loi fondamentale des Mathématiques, que nous nous sommes proposé d'établir ici, pour compléter l'établissement de la réforme des Mathématiques. — Nous donnerons la déduction et la démonstration algorithmique de ces générations téléologiques (15), dans notre Philosophie de la Théorie des Nombres, où nous présenterons également l'application de ces nouvelles lois à la résolution des congruences composées (4) de tous les degrés, et par là même à l'ensemble de cette Théorie. Dans cette Philosophie spéciale, nous remonterons même jusqu'au fait téléologique *raisonné* de la Théorie des Nombres, dont le principe présent (15) n'est qu'une modification déterminée, ou plutôt la manifestation dans la construction des congruences, formant la considération principale dans cette Théorie en question. — Ici, nous nous bornerons à quelques observations, pour mieux caractériser ces générations téléologiques (15), et pour laisser au moins entrevoir la réforme qui doit être introduite dans la Théorie des Nombres, ou plutôt l'établissement définitif de cette Théorie, établissement qui n'existe pas encore, et qu'on doit et peut opérer actuellement.

D'abord, pour fixer des limites finies aux considérations indéfinies qui, dans les lois (15) dont il s'agit, résultent de l'indétermination des nombres arbitraires k et A qui y désignent, le premier le genre, et le second l'espèce, des divers résidus a et de leurs racines correspondantes x , il faut savoir qu'il suffit de considérer ces nombres k et A dans leurs limites respectives suivantes. Le nombre k , servant d'indice au genre, est originairement tout nombre positif et entier, compris entre zéro et la moitié du module diminué de l'unité, lorsque ce module est un nombre premier, ou bien généralement entre zéro et la moitié pareille du plus petit nombre premier parmi les facteurs de ce module; de sorte qu'il existe autant de genres distincts pour les résidus a et les racines x de toute congruence (14). Et le nombre A , servant d'indice à l'espèce, est originairement tout nombre entier, positif ou négatif, y compris zéro, plus petit que le module M ; de sorte qu'en observant que, parmi ces derniers nombres, il en existe toujours, pour chaque négatif, un positif congruent avec lui par rapport au même module, on verra que les nombres A dont il s'agit, se réduisent originairement aux seuls nombres positifs entiers, y compris zéro, plus petits que le module M , et par conséquent que, dans chacun des divers genres que nous venons de fixer, il existe de plus autant d'espèces distinctes pour les résidus a et pour les racines x de toute congruence (14). — C'est là la classification-téléologique absolue de ces résidus et de leurs racines correspondantes; et c'est à ces classes qu'il faut d'abord ramener ces résidus et ces racines, pour

pouvoir traiter scientifiquement la Théorie des Nombres. — Pour cela, nous désignerons généralement par $A(k, h)$ les résidus, et par $X(k, h)$ les racines correspondantes dans la congruence (14), afin d'indiquer que ces quantités sont fonctions des indices k et h , de leurs genres et de leurs espèces; et nous considérerons toujours la congruence générale (14) dans sa signification originelle de son genre et de son espèce, savoir, dans la signification expressée ... (16) $X(k, h)^m \equiv A(k, h), \quad (\text{mod. } = M).$

On conçoit que, suivant cette classification, un même résidu et sa racine correspondante appartiendront à plusieurs genres et à plusieurs espèces; et par conséquent, qu'il doit exister des relations entre les indices k et h , concernant cette identité ou généralement concernant des rapports quelconques entre ces résidus et leurs racines correspondantes. Ces relations se trouvent fixées précisément par les générations téléologiques (15) que nous venons de poser et que nous allons examiner.

La première de ces générations (15), qui, suivant la notation classique (16), est ... (17)

$$A(k, h) = (-1)^{m+1} \cdot \{h \cdot (1^{11})^* + (-1)^{1+1}\}^m \cdot N\left[\frac{M}{(1^{11})^m}, \omega\right]^{(m-1)} + M;$$

donne immédiatement, pour tout module M et pour tout exposant m de la congruence, les résidus $A(k, h)$ correspondant aux divers genres k et aux diverses espèces h . Ainsi, considérant successivement tous les nombres entiers qui se trouvent entre les limites que, plus haut, nous avons assignées aux genres k et aux espèces h , on aura par là tous les différents aspects possibles sous lesquels, dans leurs diverses classes, peuvent être considérés les résidus $A(k, h)$ dont il est question. Et, pour ce qui concerne les relations entre les indices k et h , concernant l'identité ou la diversité de ces résidus dans leurs différentes classes, il suffit de comparer les seconds membres des égalités que présente cette première loi (17), dans le cas de deux résidus $A(r, p)$ et $A(s, q)$, correspondant respectivement aux genres r et s , et aux espèces p et q . Ainsi, par exemple, lorsque ces résidus seront égaux, on aura, pour cette relation d'identité, la congruence ... (18)

$$0 \equiv \{p \cdot (1^{11})^* + (-1)^{1+1}\}^m \cdot N\left[\frac{M}{(1^{11})^m}, p\right]^{(m-1)} + \\ + (-1)^{m+1} \cdot \{q \cdot (1^{11})^* + (-1)^{1+1}\}^m \cdot N\left[\frac{M}{(1^{11})^m}, q\right]^{(m-1)}; \\ (\text{mod. } = M).$$

Il faut ici observer que, lorsque, dans cette première loi (17), on a $h = 0$, cette loi se réduit à ... (19)

$$A(k, 0) = (-1)^{m(1+1)+m+1} \cdot N\left[\frac{M}{(1^{11})^m}, \omega\right]^{(m-1)} + M;$$

et telle est l'expression simple de l'espèce $\hat{h} \equiv 0$ des résidus dans tous les genres k . Ayant donc calculé cette espèce de résidus pour tous les genres k , on aura, pour toutes les autres espèces, l'expression également simple ... (20)

$$A(k, \hat{h}) = (-1)^{s(k+\hat{h})} \cdot A(k, 0) \cdot \left\{ \hat{h} \cdot (1^{\hat{h}})^s + (-1)^{s+\hat{h}} \right\}^n + Mj.$$

Il faut encore remarquer ici que, lorsque l'indice $\hat{h}$ de l'espèce est tel que l'on a ... (21)

$$\hat{h} \cdot (1^{\hat{h}})^s + (-1)^{s+\hat{h}} \equiv 0, \quad (\text{mod. } \equiv M),$$

les résidus de cette espèce sont zéro.

La seconde parmi les générations téléologiques (15), qui, suivant la notation classique (16), est ... (22)

$$X(k, \hat{h}) = k + (-1)^{s+\hat{h}} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{\hat{h}})^s}, \alpha \right]^{s-1} + Mj,$$

donne de même immédiatement, pour tout module M , les racines de la congruence proposée (16), pour tous les genres k et pour toutes les espèces $\hat{h}$. — Il faut ici observer que, puisque cette expression est indépendante de l'exposant m de la congruence, les racines qu'elle donne, servent généralement, dans leurs genres et dans leurs espèces respectifs, pour les congruences de tous les degrés; circonstance qui est très-remarquable. — Au reste, tout ce que nous venons de dire sur la classification des résidus, et sur la relation de leurs indices k et $\hat{h}$, s'applique ici à la classification des racines et à la relation de leurs indices correspondants k et $\hat{h}$. Ainsi, par exemple, dans le cas de deux racines égales $X(r, p)$ et $X(s, q)$, correspondantes respectivement aux genres r et s , et aux espèces p et q , la seconde loi (22) donnera, pour cette relation d'identité, la nouvelle congruence ... (23)

$$q - p \equiv \left\{ (-1)^{s+\hat{p}} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{\hat{p}})^s}, \alpha \right]^{s-1} - (-1)^{s+\hat{q}} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{\hat{q}})^s}, \beta \right]^{s-1} \right\},$$

(mod. $\equiv M$).

Enfin, la dernière parmi les trois générations téléologiques (15), qui, suivant la notation classique (16), est ... (24)

$$M = \text{fact.} \left[A(k, \hat{h}) \cdot (1^{\hat{h}})^{sn} - \left\{ \hat{h} \cdot (1^{\hat{h}})^s + (-1)^{s+\hat{h}} \right\}^n \right],$$

donne encore immédiatement, pour tout nombre $A(k, \hat{h})$, le module M par rapport auquel ce nombre peut former le résidu dans une congruence d'un degré quelconque m , en établissant d'ailleurs le genre k et l'espèce $\hat{h}$ dans lesquels on veut que soit classé le résidu proposé $A(k, \hat{h})$. — Il faut ici observer que, quoique cette dernière formule (24) présente, pour M , une fonction des indices k et $\hat{h}$, du genre et de l'espèce, le module M n'admet cependant aucune classification correspondante à ces genres et à ces espèces; parce que l'influence du résidu $A(k, \hat{h})$ dans la même formule (24), détruit, dans cette formule, l'influence spéciale de ces genres k et de ces es-

pièces A , par la supposition précisément que ce nombre $A(k, k)$ doit être résidu de telles classes déterminées, ce qui ne peut avoir lieu que pour les seuls modules donnés par la formule (24) dont il s'agit. — Il en est de même de l'exposant m de la congruence; il n'admet non plus aucune classification, et cela également par les raisons que nous venons d'alléguer pour le module M .

Avant de faire usage de ces lois téléologiques, il faut fixer la condition qui sert de lien à ces lois : la voici. — En substituant, dans la troisième des relations (15) en question, la valeur du résidu a que donne la première de ces relations d'égalité, cette troisième relation ou génération téléologique aura, pour condition, la congruence ... (25)

$$(-1)^w \cdot (1^{k_1})^m \cdot N \left[\frac{M}{(1^{k_1})^m}, \psi \right]^{(w-1)} + 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

laquelle déjà peut servir pour la vérification des fonctions alepha qui entrent dans nos lois téléologiques présentes. Or, si l'on observe que, dans la quantité $(1^{k_1})^m$, les nombres k et m ont ici des valeurs quelconques, pourvu que le nombre résultant $(1^{k_1})^m$ soit premier par rapport à M , on conçoit, du moins problématiquement, que, dans cette congruence (25), on doit pouvoir prendre, à la place du nombre $(1^{k_1})^m$, tout nombre entier N , premier par rapport à M , et que l'on aurait ainsi la congruence générale...

$$\dots (26) \quad (-1)^w \cdot N \cdot N \left[\frac{M}{N}, \psi \right]^{(w-1)} + 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M),$$

qui serait manifestement la CONDITION FONDAMENTALE des générations téléologiques (15). Cette condition résulte effectivement, d'une manière immédiate, de la nature même des fonctions alepha singulières (13) ou (13') qui entrent dans les lois dont il s'agit, ainsi que nous l'avons déduite rigoureusement dans l'Addition annexée à notre Introduction à la Philosophie des Mathématiques, où l'on voit que cette condition forme, pour ainsi dire, la transition de la possibilité à l'effectivité de la Théorie des Nombres. — Il faut ici observer que cette condition fondamentale (26) présente la solution de la congruence ÉLÉMENTAIRE ou de premier degré. En effet, multipliant la congruence de condition (26) par un nombre O , et faisant ... (27)

$$\xi = (-1)^w \cdot O \cdot N \left[\frac{M}{N}, \psi \right]^{(w-1)} + Mi;$$

cette congruence (26) prend la forme élémentaire ... (28)

$$N \cdot \xi + O \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

et l'expression précédente (27) de ξ , où i est un nombre arbitraire, donne la solution de cette congruence du premier degré (28). — Cette solution élémentaire de la congruence du premier degré, formant la condition des géné-

ractions téléologiques (15), est tout ce que, jusqu'à ce jour, les géomètres ont connu concernant immédiatement les principes téléologiques que nous établissons ici pour la Théorie des Nombres.

Pour montrer l'usage de ces principes, et pour laisser ainsi entrevoir la marche nouvelle qu'ils établissent dans la Théorie spéciale dont il s'agit, nous nous bornerons ici à présenter, à l'aide de ces principes téléologiques, la solution rigoureuse du principal problème de la Théorie des Nombres, savoir, la détermination exacte de la racine x dans la congruence générale (14) ou (16), de laquelle dépend d'ailleurs la solution du fameux problème de la décomposition des nombres en leurs facteurs. — Ayant donc la congruence générale... (29)

$$x^m \equiv a, \quad (\text{mod. } M),$$

dans laquelle le résidu a , l'exposant m , et le module M sont censés donnés, il s'agit de déterminer, d'une manière directe, les racines x de cette congruence. Faisons... (30)

$$N = \mathfrak{N} \left[\frac{M}{(1^{1/1})^m}, \pi \right]^{(m-1)},$$

$$\mathfrak{Z} = \left\{ A \cdot (1^{1/1})^m + (-1)^{m+1} \right\};$$

et la première des générations téléologiques (15) prendra la forme de la congruence élémentaire (28), savoir... (31)

$$(-1)^m \cdot a + N \cdot \mathfrak{Z} \equiv 0, \quad (\text{mod. } M).$$

Ainsi, en vertu de l'expression (27), on aura... (32)

$$\mathfrak{Z} = (-1)^{m+1} \cdot a \cdot \mathfrak{N} \left[\frac{M}{N}, \pi \right]^{(m-1)} + Mj;$$

et cette quantité pourra être calculée moyennant un genre quelconque k . Or, si l'on trouve, pour cette quantité $\mathfrak{Z}$, une puissance exacte du degré m , savoir... (33)

$$\mathfrak{Z} = R^m + Mj,$$

la seconde des expressions (30) présentera la congruence... (34)

$$R \equiv \left\{ A \cdot (1^{1/1})^m + (-1)^{m+1} \right\}, \quad (\text{mod. } M);$$

et, en vertu de (27) et de (28), on aura de nouveau... (35)

$$A = (-1)^{m+1} \cdot (R + (-1)^m) \cdot \mathfrak{N} \left[\frac{M}{(1^{1/1})^m}, \pi \right]^{(m-1)} + Mj;$$

valeur de l'indice k de l'espèce correspondante au genre adopté k . Substituant donc cette valeur dans la seconde des générations téléologiques (15), on aura définitivement... (36)

$$x = (-1)^{m+1} \cdot R \cdot \mathfrak{N} \left[\frac{M}{(1^{1/1})^m}, \pi \right]^{(m-1)} + Mj;$$

qui est la racine demandée.

Mais, si la formule (3a), en réduisant sa valeur, à l'aide du nombre arbitraire l , à un nombre plus petit que le module M , ne donnait pas, pour Ξ , la puissance exacte (33), la quantité trouvée Ξ serait, en vertu de la seconde des expressions (3o), un résidu exact d'une puissance du degré m par rapport au module M . Et l'expression (33), qui forme la congruence... (37)

$$R^m \equiv \Xi, \quad (\text{mod. } M),$$

présenterait de nouveau, pour la détermination de la racine R , le problème primitif proposé. Ainsi, en substituant, dans la formule (3a), le nouveau résidu Ξ à la place du résidu donné a , on procéderait de la même manière à la détermination de la racine auxiliaire R , laquelle, par la formule (36), doit donner la racine demandée x .

Pour fixer la marche régulière de ces opérations consécutives, désignons la suite de ces résidus a, Ξ_1 etc., par Ξ_0, Ξ_1, Ξ_2 , etc., de manière que Ξ_0 représente le premier résidu donné a ; et désignons de plus par R_0, R_1, R_2 , etc., la suite des racines correspondantes dans la congruence (37), de manière que R_0 représente de même la racine demandée x . La formule (3a) donnera, à l'aide d'un indice général μ , pour la détermination consécutive de ces résidus Ξ_0, Ξ_1, Ξ_2 , etc., la loi très-simple et constante... (38)

$$\Xi_\mu = \Xi_{\mu-1} \cdot (-1)^{\mu+1} \cdot N \left[\frac{M}{N}, \rho \right]^{(1-\mu)} + Mi_1$$

et la formule (36) donnera de même, pour la détermination consécutive des racines correspondantes R_0, R_1, R_2 , etc., la loi très-simple et constante... (39)

$$R_{\mu-1} = R_\mu \cdot (-1)^{\mu+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{\mu+1})}, \pi \right]^{(1-\mu)} + Mj_1$$

Ainsi, en observant que $\Xi_0 = a$, la première loi (38) donnera généralement... (40)

$$\Xi_\mu = a \cdot \left\{ (-1)^{\mu+1} \cdot N \left[\frac{M}{N}, \rho \right]^{(1-\mu)} \right\}^\mu + Mi_1$$

et considérant Ξ_μ comme étant la puissance exacte du degré m , à laquelle il faut parvenir, savoir... (41)

$$\Xi_\mu = R_\mu^m + Mi_1$$

la seconde loi (39), en observant que $R_\mu = x$, donnera définitivement, pour la racine en question x , l'expression générale... (42)

$$x = R_\mu \cdot \left\{ (-1)^{\mu+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{\mu+1})}, \pi \right]^{(1-\mu)} \right\}^\mu + Mj_1$$

Lorsque, dans la suite des résidus Ξ_0, Ξ_1, Ξ_2 , etc., calculés par la formule (40) avec un genre k , on tombe sur un résidu Ξ_k identique avec l'un

des résidus précédents, avant que l'on parvienne à la puissance exacte (41), la suite de ces résidus $\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, \dots$, etc., qui depuis Ξ_1 deviendront périodiques, se trouve arrêtée à ce résidu Ξ_1 , pour le genre adopté k . Prenant alors un autre genre k , et employant successivement, dans la formule (40), à la place de a , tous ces résidus connus $\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, \dots, \Xi_1$, on en obtiendra d'autres, qui, à leur tour, donneront encore d'autres résidus avec d'autres genres k , toujours par la même formule (40). De cette manière, on épuisera nécessairement, avec les différents genres k , tous les différents résidus possibles, parmi lesquels se trouvent notoirement les puissances exactes du degré m ; et par conséquent, on arrivera toujours à ces puissances exactes (41) desquelles dépend la solution du problème.

Pour opérer la réunion de toutes ces circonstances, et pour avoir ainsi l'expression générale de la solution en question, distinguons par $k(1), k(2), k(3), \dots$, etc., les différents genres k ; et suivant la notation générale (30), formons spécialement, pour chacun des différents genres $k(v)$, les quantités auxiliaires... (43)

$$N(v) = N \left[\frac{M}{(1, k(v))^{m-1}}, \zeta(v) \right]^{(m-1)},$$

en distinguant ainsi par $N(v), \zeta(v)$, les quantités N et ζ qui appartiennent au genre spécial $k(v)$. Faisons de plus... (44)

$$P(v) = (-1)^{\omega(v)+r(v)} \cdot N \left[\frac{M}{N(v)}, \rho(v) \right]^{(k(v)-1)},$$

$$Q(v) = (-1)^{\omega(v)+s(v)} \cdot N \left[\frac{M}{(1, k(v))^{m-1}}, \pi(v) \right]^{(k(v)-1)};$$

en distinguant ici de même par $\rho(v)$ et $\pi(v)$ les indices ρ et π qui appartiennent au genre spécial $k(v)$. Alors, suivant la déduction que nous venons de donner de la solution générale de la congruence proposée (29), savoir... (45)

$$x^m \equiv a, \quad (\text{mod. } M),$$

nous aurons, pour la détermination de la racine x , l'expression générale... (46)

$$x = \left[a \cdot \left\{ P(1)^{\mu_1} \cdot P(2)^{\mu_2} \cdot P(3)^{\mu_3} \dots \right\} + M_i \right]^{\frac{1}{m}} \times \\ \times \left\{ Q(1)^{\mu_1} \cdot Q(2)^{\mu_2} \cdot Q(3)^{\mu_3} \dots \right\} + M_j;$$

en distinguant ici par les exposants spéciaux $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$, les différentes puissances arbitraires que plus haut, dans les expressions (40) et (42), nous avons distinguées généralement par μ . — Dans cette expression générale, on voit que la solution dépend uniquement de la condition que la quantité... (47)

$$a \cdot \left\{ P(1)^{\mu_1} \cdot P(2)^{\mu_2} \cdot P(3)^{\mu_3} \dots \right\} + M_i,$$

soit une puissance exacte du degré m . Or, dans la déduction précédente, nous avons reconnu que cette quantité (47), prise dans toutes les combinaisons des genres $k(1)$, $k(2)$, $k(3)$, etc., et des puissances μ_1 , μ_2 , μ_3 , etc., dont elle dépend, ne présente précisément rien autre que le système complet de tous les différents résidus possibles dans la congruence (45), par rapport au degré m et au module M . Et comme, parmi ces résidus, se trouvent évidemment les puissances exactes du degré m , plus petites que le module M , la quantité en question (47) présente nécessairement toutes ces puissances m des nombres entiers. Ainsi, par la simple réduction de cette quantité (47), à l'aide de son nombre arbitraire i , à des nombres plus petits que le module M , l'expression générale (46) donne toujours directement, sans aucun tâtonnement, des valeurs numériques exactes pour les racines des congruences; et, ce qui est plus, par le moyen des diverses puissances exactes (47) qui entrent dans cette expression (46), elle donne, en même temps, toutes les racines différentes qui, dans une congruence proposée (45), répondent au même résidu a . — Nous devons prévenir que les quantités qui, dans les expressions (46) et (47), sont désignées généralement par la caractéristique P et qui sont déterminées par les expressions (43) et (44), peuvent subir, dans ces expressions générales, une réduction très-considérable, par suite de laquelle leur détermination téléologique devient alors une simple détermination algébrique; de sorte que la solution générale (46) n'impliquera plus de conditions téléologiques que par les seules quantités désignées généralement par la caractéristique Q et déterminées par les expressions (44). Nous donnerons ci-après cette réduction des quantités P .

Telle (46) est donc, au moyen de nos principes téléologiques, la solution directe et rigoureusement complète de ce grand problème (45) ou (39) qui, comme cela est manifeste, sert de base à toute la Théorie des Nombres. — Nous présenterons de nombreuses applications de cette résolution générale des congruences dans notre Philosophie de la Théorie des Nombres, où nous indiquerons les circonstances principales de cette importante question. En attendant, si l'on considère la manière précise et fort détaillée avec laquelle nous venons d'exposer la loi téléologique (15) et son application (40), (42), (46), à la résolution des congruences (39) ou (45) de tous les degrés, on verra que, dans le cas de la présente loi fondamentale de la Théorie des Nombres, comme dans les cas concernant les deux autres lois fondamentales des Mathématiques, que nous avons produites antérieurement dans nos ouvrages, il suffit; pour ainsi dire, de connaître l'algèbre pour pouvoir, dans tous ces cas, appliquer immédiatement nos formules à des questions numériques. Cependant, les académiciens de Paris, en avouant qu'ils ne peuvent comprendre nos ouvrages, et en se dédommageant de cette impuissance scientifique par des injures, prétendent que tous les autres mathématiciens, nos contemporains, sont, à l'égard de nos ouvrages, dans la même impuissance. Et ce qui est remarquable, c'est

que ces académiciens de Paris portent leurs insultes à l'auteur dans un journal politique, le *National*, en s'adressant ainsi loyalement à un public qui est étranger aux sciences. Heureusement ce public est, pour le moins, assez judicieux pour voir que l'auteur n'a que le tort d'avoir publié ses travaux scientifiques parmi ces Messieurs, et de leur avoir ainsi fait injustement l'honneur de les croire capables de comprendre ces travaux. — Quant à cette commune impuissance scientifique que les académiciens de Paris veulent étendre aux autres mathématiciens, nos contemporains, nous sommes fondés à avoir une meilleure opinion de ces derniers. Dans tous les cas, si nos ouvrages contiennent réellement des découvertes fondamentales et propres à opérer la réforme de la science, et si les mathématiciens, nos contemporains, ne pouvaient comprendre ces ouvrages, comme le prétend à tort le susdit journal politique, ils ne feraient que participer à la gloire qu'avaient jadis les savants contemporains de Kepler, qui ne pouvaient non plus comprendre ses grandes découvertes, et même, sans aller si loin, nos contemporains ne feraient que participer à la gloire qu'avaient les académiciens de Paris lors de la découverte du calcul différentiel, de l'attraction des corps célestes, de l'aplatissement de la terre, et généralement de toutes les découvertes fondamentales qu'ils n'ont jamais pu comprendre que quarante à cinquante ans après leur production. — Nous regrettons sincèrement que nos hautes recherches des lois fondamentales du monde ne nous laissent pas assez de loisir pour pouvoir descendre jusqu'aux moindres conséquences, et rendre ainsi nos travaux à la portée des académiciens de Paris. Voici toutefois quelques exemples pour leur indiquer au moins le chemin dans les présentes recherches téléologiques.

Soit proposée la congruence du troisième degré... (48)

$$x^3 \equiv a, \quad (\text{mod.} = 19);$$

dont on connaît le module 19 et dont on veut connaître tous les résidus a et toutes leurs racines x correspondantes. La première des générations téléologiques (15), suivant son expression classique (17), donnera, pour tous les résidus cherchés a , l'expression générale... (48')

$$a = A(k, h) = (-1)^{h+1} \cdot \left\{ h \cdot (1^{11})^h + (-1)^{h+1} \right\} \cdot N \left[\frac{19}{(1^{11})^h} \right]^{h-1} + 19 \cdot i,$$

correspondant à tous les genres h , depuis $h=0$ jusqu'à $h = \frac{19-1}{2} = 9$,

et à toutes les espèces k , depuis $k=0$ jusqu'à $k = (19-1) = 18$. Et pour simplifier cette expression, en la rendant dépendante du résidu $A(k, 0)$ où l'espèce $h=0$, on aura, d'après les formules (19) et (20), l'expression... (49)

$$a = A(k, h) = (-1)^{h+1} \cdot A(k, 0) \cdot \left\{ h \cdot (1^{11})^h + (-1)^{h+1} \right\} + 19 \cdot i;$$

en y faisant... (49')

$$\Lambda(k, 0) = (-1)^{1/2 + (k+1) + 1} \cdot N \left[\frac{19}{(14)^k}, \epsilon \right]^{m-1} + 19 \cdot j.$$

Or, en observant que, d'après la génération (13) et (13') des présentes fonctions alephs, on a généralement... (50)

$$N \left[\frac{S}{1}, 1 \right]^{(1-n)} = 1;$$

on verra que, pour les deux premiers genres $k=0$ et $k=1$, la présente formule (49)' donne les deux résidus... (50')

$$\begin{aligned} a &= \Lambda(0, 0) = -1 + 19 \cdot j, \\ a &= \Lambda(1, 0) = +1 + 19 \cdot j. \end{aligned}$$

Et alors, la présente formule générale (49) donnera, pour ces deux premiers genres $k=0$ et $k=1$, les résidus... (51)

$$\begin{aligned} a &= \Lambda(0, h) = + (h-1)^2 + 19 \cdot j, \\ a &= \Lambda(1, h) = + (h+1)^2 + 19 \cdot j; \end{aligned}$$

correspondant à toutes les espèces h dans ces deux premiers genres $k=0$ et $k=1$. En effet, la seconde des générations téléologiques (15), en la considérant dans son expression classique (22), donne, pour ces deux premiers genres $k=0$ et $k=1$, en vertu de la présente valeur générale (50) de ces fonctions alephs, les racines... (51')

$$\begin{aligned} x &= X(0, h) = (h-1) + 19 \cdot i, \\ x &= X(1, h) = (h+1) + 19 \cdot i; \end{aligned}$$

qui, avec les résidus correspondants (51), satisfont à la congruence proposée (48). Et il faut ici remarquer qu'en général, pour une congruence d'un degré quelconque m et d'un module quelconque M , savoir... (52)

$$x^m \equiv a, \quad (\text{mod. } M),$$

on aurait constamment, par suite des considérations précédentes concernant les deux premiers genres $k=0$ et $k=1$, les mêmes résidus... (52')

$$\begin{aligned} a &= \Lambda(0, h) = + (h-1)^m + M \cdot j, \\ a &= \Lambda(1, h) = + (h+1)^m + M \cdot j; \end{aligned}$$

et les mêmes racines correspondantes... (52)''

$$\begin{aligned} x &= X(0, h) = (h-1) + M \cdot i, \\ x &= X(1, h) = (h+1) + M \cdot i. \end{aligned}$$

Ce n'est donc qu'avec les valeurs ultérieures du genre k que s'établiront des valeurs différentes pour la puissance x^m et pour le résidu a dans la congruence générale (52). — Ainsi, dans notre exemple présent (48), pour la classe $k=2$, l'expression (49)' du résidu fondamental $\Lambda(k, 0)$ donnera la va-

leur... (53)

$$A(2, 0) = (-1)^n \cdot N\left[\frac{19}{64}, \varpi\right]^{n+1} + 19.i;$$

et pour la détermination de la fonction aleph, on aura ici, d'après les règles (11) et (13)', les calculs suivants... (53)'

$$\begin{array}{lll} \frac{19}{64} = 0 + \frac{19}{64}, & a_1 = 0, & N\left[\frac{19}{64}, 6\right]^{(1)} = 0.1 = 0, \\ \frac{64}{19} = 3 + \frac{7}{19}, & a_2 = 3, & N\left[\frac{19}{64}, 6\right]^{(2)} = 3.0 + 1 = 1, \\ \frac{19}{7} = 2 + \frac{5}{7}, & a_3 = 2, & N\left[\frac{19}{64}, 6\right]^{(3)} = 2.1 + 0 = 2, \\ \frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}, & a_4 = 1, & N\left[\frac{19}{64}, 6\right]^{(4)} = 1.2 + 1 = 3, \\ \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}, & a_5 = 2; & N\left[\frac{19}{64}, 6\right]^{(5)} = 2.3 + 2 = 8. \\ \frac{2}{1} = 2 + \frac{0}{1}; & \varpi = 6; & \end{array}$$

Et par conséquent, le résidu fondamental (53), correspondant au genre $k=2$, aura la valeur... (53)''

$$A(2, 0) = 8 + 19.i.$$

Substituant donc cette valeur dans l'expression générale (49), on aura, pour tous les résidus du genre $k=2$, dans la congruence proposée (48), la formule... (53)'''

$$a = A(2, h) = -8.(4h-1)^2 + 19.i,$$

qui, pour toutes les susdites valeurs de l'espèce h , donnera les résidus correspondant au genre $k=2$, savoir... (53)''''

$$\begin{array}{lll} A(2, 0) = 8, & A(2, 1) = 12, & A(2, 2) = 11, & A(2, 3) = 11, \\ A(2, 4) = -1, & \text{etc., etc.,} & \text{jusqu'à } A(2, 18) = 12; \end{array}$$

où l'on voit que, pour des espèces différentes h , correspondant au même genre k , on obtient des résidus identiques.

Quant aux racines x qui, dans la congruence proposée (48), appartiennent à ces résidus (53)'''' correspondant au genre $k=2$, la seconde des générations téléologiques (15), dans son expression classificative (22), donnera, pour ce genre $k=2$, la formule... (54)

$$x = X(2, h) = h + (-1)^h \cdot N\left[\frac{19}{4}, \pi\right]^{(h-1)} + 19.j.$$

Et, suivant les susdites règles (11) et (13)', nous aurons, pour la détermination de la présente fonction aleph, les calculs suivants... (54)'

$$\begin{aligned} \frac{19}{4} &= 4 + \frac{3}{4}, & a_1 &= 4, & N\left[\frac{19}{4}, 3\right]^{(1)} &= 4.1 &= 4, \\ \frac{4}{3} &= 1 + \frac{1}{3}, & a_2 &= 1; & N\left[\frac{19}{4}, 3\right]^{(2)} &= 1.4 + 1 &= 5. \\ \frac{3}{1} &= 3 + \frac{0}{1}; & \pi &= 3; \end{aligned}$$

Et par conséquent, la formule (54) des racines x , correspondant au genre $k=2$, sera... (54)''

$$x = X(2, A) = (A-5) + 19.j;$$

et elle donnera, pour les ausdites valeurs de l'espèce A , les valeurs... (54)'''

$$X(2, 0) = -5, \quad X(2, 1) = -4, \quad X(2, 2) = -3, \quad X(2, 3) = -2, \\ X(2, 4) = -1, \quad \text{etc., etc.,} \quad \text{jusqu'à } X(2, 18) = +13.$$

Réunissant donc ces racines avec leurs résidus respectifs (53)''', on aura, pour la congruence générale proposée (48), toutes les congruences particulières qui correspondent au genre $k=2$, savoir... (55)

$$\begin{aligned} (-5)^2 &\equiv 8, \quad (-4)^2 \equiv 12, \quad (-3)^2 \equiv 11, \quad (-2)^2 \equiv 11, \\ (-1)^2 &\equiv -1, \quad \text{etc.,} \quad \text{jusqu'à } (+13)^2 \equiv 12, \quad \text{pour } M = 19. \end{aligned}$$

Et généralement, si l'on réunit la formule (54)'' des racines avec la formule (53)''' des résidus, on aura, dans la congruence proposée (48), la formule pour toutes les congruences particulières qui correspondent au genre $k=2$, savoir... (55)'

$$(A-5)^2 \equiv -8.(4A-1)^2, \quad (\text{mod.} = 19);$$

où l'espèce A peut recevoir toutes ses ausdites valeurs, depuis $A=0$ jusqu'à $A=18$.

On procédera de la même manière pour obtenir les formules des congruences particulières qui, dans la congruence générale proposée (48), répondent à tous les genres suivants $k=3$, $k=4$, etc., jusqu'à $k=9$. — Mais, en examinant la forme de la génération téléologique (15) ou (22), qui détermine les racines x des congruences, on voit que, pour un genre quelconque k et une espèce quelconque A , cette forme est constamment... (56)

$$x = X(k, A) = A + n + M.i,$$

où n est un nombre entier, positif ou négatif. Et alors, pour un genre k' différent et pour une espèce A' différente, on aura... (56)'

$$x' = X(k', A') = A' + n' + M.j.$$

On pourra donc toujours transformer ces racines x et x' l'une dans l'autre, en faisant... (56)''

$$A = (A' + n') - n, \quad \text{ou réciproquement } A' = (A + n) - n'.$$

Et comme les résidus des racines identiques sont les mêmes, ou pourra également, par les présentes substitutions (56)'', transformer, l'une dans l'autre, les formules qui, d'après la première génération téléologique (15) ou (17), déterminent les résidus des congruences générales (14). Ainsi, une seule de ces formules, obtenue par un genre quelconque k , différant de zéro et de l'unité, telle que l'est la formule (53)''' qui, pour notre exemple présent (48), donne les résidus correspondant au genre $k=2$, une seule formule pareille, disons-nous, est la formule générale de tous les résidus possibles, qui diffèrent des puissances des racines. C'est au reste ce qui résulte immédiatement de la forme générale (56) des racines, forme qui, pour tout genre k , peut représenter tous les nombres entiers, depuis $x=1$, jusqu'à $x=M$; de sorte que la formule des résidus correspondant au même genre k , représente nécessairement tous les résidus possibles, différant des puissances des racines. — Ainsi, dans notre exemple présent (48), si, par les procédés que nous venons d'indiquer, on calculait également, pour le genre $k=3$, le résidu fondamental (19) et le résidu général (20), on trouverait... (57)

$$\begin{aligned} \Lambda(3,0) &= 7 + 19.i, & \text{et par conséquent,} \\ a &= \Lambda(3,k) = 7.(36.k+1)^3 + 19.i = 7.(1-2k)^3 + 19.i; \end{aligned}$$

et cette dernière formule serait, de même que la formule précédente (53)''', la formule générale de tous les résidus possibles pour la congruence proposée (48), différant des puissances des racines. En effet, en calculant aussi, par les procédés que nous venons d'indiquer, la racine (22) correspondant au même genre $k=3$, on trouverait... (57)'

$$x = X(3,k) = (k+9) + 19.i;$$

de sorte qu'en réunissant ici cette racine à son résidu (57), on aurait, pour l'exemple (48), la nouvelle congruence générale... (57)''

$$(k+9)^3 \equiv 7.(1-2k)^3, \quad (\text{mod.} = 19);$$

dans laquelle l'espèce k représente également tous les nombres entiers, depuis $k=0$, jusqu'à $k=18$. — Or, en comparant cette deuxième congruence générale (57)'' avec la première congruence générale (55)', il est manifeste qu'en vertu des substitutions (56)'', si l'on met $(k+14)$ à la place de k dans la dernière (57)'' de ces congruences générales, elle se transformera dans la première (55)', et réciproquement, si l'on met $(k+14)$ à la place de k dans cette première (55)' congruence générale, elle se transformera dans la seconde (57)''.

Ainsi, en excluant toujours les genres $k=0$ et $k=1$, qui, d'après ce que nous avons vu sous la marque (51), ne donnent que les résidus formant des puissances exactes, il suffit de calculer, par la première génération téléologique (15) ou par son expression classique (17), en suivant les procédés

que nous venons d'indiquer, la formule des résidus correspondant à un genre quelconque k plus grand que l'unité, comme le sont, dans notre présent exemple (48), la formule (53)'' pour le genre $k=2$, et la formule (57) pour le genre $k=3$; et cette formule, quel qu'en soit le genre k , sera la formule générale pour tous les résidus possibles correspondant à un module quelconque M dans une congruence (14) d'un degré quelconque m . — Il est sans doute superflu de faire remarquer que, puisque l'exposant m entre dans l'expression de la première génération téléologique (15) ou (17) qui fixe les résidus a dans les congruences générales (14), les procédés de calculer la formule qui, pour un module donné M et pour un exposant donné m , détermine les résidus d'une telle congruence, sont toujours les mêmes que ceux que nous venons d'indiquer dans notre présent exemple (48); de sorte que cet exemple, quoiqu'il ne s'applique qu'à une congruence du troisième degré, embrasse manifestement les congruences de tous les degrés.

Soit maintenant proposée, pour deuxième exemple, la congruence du troisième degré . . . (58)

$$x^3 \equiv 7, \quad (\text{mod.} \equiv M),$$

dont on connaît le résidu 7, et dont on veut connaître tous les modules M correspondant à ce résidu 7 dans les congruences du troisième degré. — La troisième des générations téléologiques (15) ou (24) donnera, pour la détermination des modules cherchés, l'expression générale . . . (59)

$$M = \text{fact.} \{ 7.(1^{11})^3 - [k.(1^{11})^2 + (-1)^{k+1}]^2 \};$$

dans laquelle, comme nous l'avons déjà observé plus haut, le genre k et l'espèce k appartiennent proprement au résidu proposé 7 et non au module cherché M . — Or, en considérant ainsi ce résidu 7 comme appartenant d'abord au genre $k=2$, l'expression (59) donnera, pour la détermination des modules correspondants M , la formule . . . (60)

$$M = \text{fact.} \{ 7.64 - (4k-1)^2 \};$$

qui, pour les différentes espèces k , donnera les valeurs . . . (60)'

$$\begin{aligned} k=0, & \quad M = \text{fact.} \{ 448 + 1 \} = 449; \\ k=1, & \quad M = \text{fact.} \{ 448 - 27 \} = 421; \\ k=2, & \quad M = \text{fact.} \{ 448 - 343 \} = 105 = 3 \times 5 \times 7; \\ k=3, & \quad M = \text{fact.} \{ 448 - 1331 \} = 883; \\ k=4, & \quad M = \text{fact.} \{ 448 - 3375 \} = 2927; \\ & \quad \text{etc., etc.;} \end{aligned}$$

et ainsi de suite indéfiniment. On aura donc déjà, pour la congruence générale proposée (58), en considérant son résidu 7 comme appartenant au genre $k=2$, les congruences particulières . . . (60)'

$h = 0,$	$x^4 \equiv 7,$	(mod. $\equiv 449$);
$h = 1,$	$x^4 \equiv 7,$	(mod. $\equiv 421$);
$h = 2,$	$x^4 \equiv 7,$	(mod. $\equiv 3$), ou (mod. $\equiv 5$), ou (mod. $\equiv 7$);
$h = 3,$	$x^4 \equiv 7,$	(mod. $\equiv 883$);
$h = 4,$	$x^4 \equiv 7,$	(mod. $\equiv 2927$);

etc., etc.

et les racines de ces diverses congruences, dont on connaît ainsi le genre h et les espèces respectives h , seront alors données immédiatement par la deuxième génération téléologique (15) ou par son expression classique (22). On aura, en effet, dans le présent genre $h=2$, pour ces diverses racines, la formule... (61)

$$x = X(2, h) = h + (-1)^h \cdot N\left[\frac{M}{4}, \pi\right]^{(h-1)} + M \cdot j.$$

Ainsi, pour la première des congruences (60)', correspondant à l'indice $h=0$ et au module $M=449$, on aura la racine... (61)'

$$x = X(2, 0) = (-1)^0 \cdot N\left[\frac{449}{4}, \pi\right]^{(0-1)} + 449 \cdot j.$$

Et suivant les règles (11) et (13)', on trouvera... (61)''

$$\begin{aligned} \frac{449}{4} &= 112 + \frac{1}{4}, & a_1 &= 112; & N\left[\frac{449}{4}, 2\right]^{(1)} &= 112; \\ \frac{1}{4} &= 4 + \frac{0}{1}; & \pi &= 2; \end{aligned}$$

et par conséquent... (61)'''

$$x = X(2, 0) = 112 + 449 \cdot j.$$

La première des congruences (60)'' sera donc... (61)''

$$(112)^4 \equiv 7, \quad (\text{mod.} \equiv 449).$$

En effet, on a... (61)''

$$(112)^4 - 7 = 1404921 = 449 \times 3129.$$

Pour la quatrième des congruences particulières (60)'', correspondant à l'indice $h=3$ et au module $M=883$, on aura la racine... (62)

$$x = X(2, 3) = 3 + (-1)^3 \cdot N\left[\frac{883}{4}, \pi\right]^{(3-1)} + 883 \cdot j.$$

Et suivant toujours les règles (11) et (13)', on trouvera ici les valeurs... (62)'

$$\begin{aligned} \frac{883}{4} &= 220 + \frac{3}{4}, & a_1 &= 220, & N\left[\frac{883}{4}, 3\right]^{(1)} &= 220.1 &= 220, \\ \frac{3}{4} &= 1 + \frac{1}{3}, & a_1 &= 1; & N\left[\frac{883}{4}, 3\right]^{(1)} &= 1.220 + 1 &= 221; \\ \frac{1}{3} &= 3 + \frac{0}{1}; & \pi &= 3; \end{aligned}$$

et par conséquent... (62)^{iv}

$$x = X(2, 3) = 3 - 221 = -218 + 883.j.$$

Cette quatrième des congruences (60)^{iv} sera donc... (62)^{iv}

$$(-218)^3 \equiv 7, \quad (\text{mod.} = 883).$$

En effet, on a... (62)^{iv}

$$(-218)^3 - 7 = -10360239 = -883 \times 11733.$$

Quant à celles des congruences particulières (60)^{iv} qui répondent à l'espèce $\lambda=2$ et aux modules respectifs $M=3$, $M=5$, $M=7$, ou généralement au module $M=105$, il est manifeste qu'en traitant la congruence générale qui répond à ce dernier module 105, on aura immédiatement la solution des trois autres, correspondant aux modules 3, 5, 7. — Or, d'après (61), la racine de cette congruence générale pour le module $M=105$, sera... (63)

$$x = X(2, 2) = 2 + (-1)^n \cdot N \left[\frac{105}{4}, \pi \right]^{(n-1)} + 105.j.$$

Et suivant les règles (11) et (13)', on obtiendra ici les valeurs... (63)'

$$\begin{aligned} \frac{105}{4} &= 26 + \frac{1}{4}, & a_1 &= 26; & N \left[\frac{105}{4}, 2 \right]^{(1)} &= 26.1 = 26; \\ \frac{4}{1} &= 4 + \frac{0}{1}; & \pi &= 2; \end{aligned}$$

et par conséquent... (63)''

$$x = X(2, 2) = 2 + 26 = 28 + 105.j.$$

Cette congruence générale en question sera donc... (63)'''

$$(28)^3 \equiv 7, \quad (\text{mod.} = 105).$$

En effet, on a... (63)'''

$$(28)^3 - 7 = 21945 = 105 \times 209.$$

Ayant ainsi la solution générale (63)''' de cette congruence dont le module 105 est formé des facteurs 3, 5, 7, il suffira de réduire la racine 28 par rapport à ces modules particuliers 3, 5, 7; et l'on aura immédiatement les solutions des congruences particulières qui répondent à ces facteurs 3, 5, 7 du module général 105, savoir, on aura... (64)

$$1^3 \equiv 7, (\text{mod.} = 3); \quad 3^3 \equiv 7, (\text{mod.} = 5); \quad 0^3 \equiv 7, (\text{mod.} = 7);$$

les racines étant ici respectivement... (64)'

$$\begin{aligned} x = 1 &\equiv 1 + 3.9 = 28, & \text{pour } M = 3; \\ x = 3 &\equiv 3 + 5.5 = 28, & \text{pour } M = 5; \\ x = 0 &\equiv 0 + 7.4 = 28, & \text{pour } M = 7. \end{aligned}$$

Et ce sont aussi les racines qu'on trouverait en résolvant séparément les trois congruences particulières qui, parmi les congruences (60)', répondent à l'espèce $h=2$. Toutefois, il faut remarquer que la première de ces congruences particulières (64), celle qui répond au module 3, ne s'est ici établie qu'*accidentellement*, par la raison que le résidu 7, par rapport au module 3, est simplement l'*unité*; car, d'après les limites que nous avons assignées au genre k , sa valeur ne doit jamais excéder la moitié du plus petit facteur premier diminué de l'unité.

Poursuivons la solution du problème (58) dont nous avons fermé le deuxième exemple. — Et pour cela, donnons maintenant, dans l'expression générale (59) du module M , au genre k la valeur $k=3$. Nous aurons, pour la détermination ultérieure du module M dans l'exemple proposé (58), la nouvelle formule . . . (65)

$$M = \text{fact.} \{ 7.46636 - (36.h + 1)^3 \};$$

et cette formule donnera, pour les différentes valeurs de l'espèce h , les modules suivants . . . (65')

$$h = 0, \quad M = \text{fact.} \{ 326592 - 1^3 \} = 19.17189;$$

$$h = 1, \quad M = \text{fact.} \{ 326592 - (37)^3 \} = 275939;$$

$$h = 2, \quad M = \text{fact.} \{ 326592 - (73)^3 \} = (5)^3.11.227;$$

$$h = 3, \quad M = \text{fact.} \{ 326592 - (109)^3 \} = 968437;$$

etc., etc.; et pour

$$h = -1, \quad M = \text{fact.} \{ 326592 + (35)^3 \} = 7.47.1123;$$

$$h = -2, \quad M = \text{fact.} \{ 326592 + (71)^3 \} = 23.29761;$$

etc., etc.;

et ainsi de suite indéfiniment. Nous aurons donc de nouveau, avec ces valeurs du module M , autant de congruences particulières qui serviront à la solution du problème (58) proposé pour exemple. Et, d'après la deuxième génération téléologique (15) ou (22), les racines x de ces nouvelles congruences, qui répondent au genre $k=3$, auront, pour leur détermination, la formule . . . (66)

$$x = X(3, h) = h - (-1)^h \cdot N \left[\frac{M}{36}, \pi \right]^{(h-1)} + M.f.$$

Nous nous bornerons ici à considérer, parmi ces nouvelles congruences qui répondent aux modules (65)', celles dont l'espèce h est $h=-1$, savoir, les congruences . . . (67)

$x^1 \equiv 7, (\text{mod.} = 7); x^2 \equiv 7, (\text{mod.} = 47); x^3 \equiv 7, (\text{mod.} = 113);$
et leur congruence générale... (67)'

$$x^3 \equiv 7, (\text{mod.} = 369467);$$

dont les racines, d'après la formule (66), seront données par l'expression...
... (67)''

$$x = X(3, -1) = -1 - (-1)^n \cdot N \left[\frac{M}{36}, \pi \right]^{(n-1)} + M.f.$$

Ainsi, pour la première de ces congruences particulières (67), dont le module $M=7$, nous aurons, suivant les règles (11) et (13)', les valeurs... (68)

$$\begin{aligned} \frac{7}{36} &= 0 + \frac{7}{36}, & a, &= 0, & N \left[\frac{7}{36}, 3 \right]^{(1)} &= 0.1 = 0, \\ \frac{36}{7} &= 5 + \frac{1}{7}, & a, &= 5; & N \left[\frac{7}{36}, 3 \right]^{(2)} &= 5.0 + 1 = 1; \\ \frac{7}{1} &= 7 + \frac{0}{1}; & \pi &= 3; \end{aligned}$$

et par conséquent... (68)'

$$x = X(3, -1) = -1 + 1 \equiv 0 + 7.f;$$

comme cela doit être.

Pour la seconde des congruences particulières (67), dont le module $M=47$, nous aurons, suivant les règles (11) et (13)', les valeurs... (69)

$$\begin{aligned} \frac{47}{36} &= 1 + \frac{11}{36}, & a, &= 1, & N \left[\frac{47}{36}, 5 \right]^{(1)} &= 1.1 = 1, \\ \frac{36}{11} &= 3 + \frac{3}{11}, & a, &= 3, & N \left[\frac{47}{36}, 5 \right]^{(2)} &= 3.1 + 1 = 4, \\ \frac{11}{3} &= 3 + \frac{2}{3}, & a, &= 3, & N \left[\frac{47}{36}, 5 \right]^{(3)} &= 3.4 + 1 = 13, \\ \frac{3}{2} &= 1 + \frac{1}{2}, & a, &= 1; & N \left[\frac{47}{36}, 5 \right]^{(4)} &= 1.13 + 4 = 17; \\ \frac{2}{1} &= 2 + \frac{0}{1}; & \pi &= 5; \end{aligned}$$

et par conséquent... (69)'

$$x = X(3, -1) = -1 + 17 \equiv 16 + 47.f.$$

Cette deuxième des congruences (67) sera donc... (69)''

$$(16)^1 \equiv 7, (\text{mod.} = 47).$$

En effet, on a... (69)'''

$$(16)^3 - 7 = 4089 = 47 \times 87.$$

Pour la troisième des congruences particulières (67), dont le module $M = 1123$, nous aurons, suivant les règles (11) et (13)', les valeurs... (70)

$$\begin{aligned}\frac{1123}{36} &= 31 + \frac{7}{36}, & a_1 &= 31, & N\left[\frac{1123}{36}, 3\right]^{(1)} &= 31.1 = 31, \\ \frac{36}{7} &= 5 + \frac{1}{7}, & a_2 &= 5; & N\left[\frac{1123}{36}, 3\right]^{(2)} &= 5.31 + 1 = 156; \\ \frac{7}{1} &= 7 + \frac{0}{1}; & \pi &= 3;\end{aligned}$$

et par conséquent... (70')

$$x = X(3, -1) = -1 + 156 \equiv 155 + 1123.f.$$

Cette troisième des congruences (67) sera donc... (70)''

$$(155)^3 \equiv 7, \quad (\text{mod.} = 1123).$$

En effet, on a... (70)'''

$$(155)^3 - 7 = 3723868 = 1123 \times 3316.$$

Enfin, pour la congruence générale (67)', dont le module $M = 369467$, nous avons, suivant les règles (11) et (13)', les valeurs... (71)

$$\begin{aligned}\frac{369467}{36} &= 10262 + \frac{35}{36}, & a_1 &= 10262, & N\left[\frac{369467}{36}, 3\right]^{(1)} &= 10262, \\ \frac{36}{35} &= 1 + \frac{1}{35}, & a_2 &= 1; & N\left[\frac{369467}{36}, 3\right]^{(2)} &= 10263; \\ \frac{35}{1} &= 35 + \frac{0}{1}; & \pi &= 3;\end{aligned}$$

et par conséquent... (71')

$$x = X(3, -1) = -1 + 10263 \equiv 10262 + 369467.f.$$

Cette congruence générale (67)' sera donc... (71)''

$$(10262)^3 \equiv 7, \quad (\text{mod.} = 369467).$$

En effet, on a... (71)'''

$$\begin{aligned}(10262)^3 - 7 &= 1080677304721 = \\ &= 369467 \times 2924963.\end{aligned}$$

Or, la racine 10262 de la congruence générale (67)', dont le module est 369467, doit contenir les racines 0, 16, 155 des trois congruences particulières (67) dont les modules 7, 47, 1123 sont les facteurs du module 369467 de cette congruence générale (67)'. Et en effet, on a... (72)

$$\begin{array}{ll}
 x = 0 \equiv n + 7 \times 1466 = 10262, & \text{pour } M = 7; \\
 x = 16 \equiv 16 + 47 \times 218 = 10262, & \text{pour } M = 47; \\
 x = 155 \equiv 155 + 1123 \times 9 = 10262, & \text{pour } M = 1123.
 \end{array}$$

Il suffira donc toujours de résoudre la congruence générale dont le module contient les facteurs formant les modules de congruences particulières, pour pouvoir déduire, de la racine générale, les racines particulières de ces dernières. Et comme on le verra dans notre Théorie des Nombres, on peut en tirer un procédé assez simple pour la détermination des facteurs des nombres.

En donnant ainsi consécutivement, dans l'expression générale (59) du module M , proposé par notre deuxième exemple (58), les valeurs ultérieures au genre k , savoir, $k=4$, $k=5$, $k=6$, etc., on obtiendra autant de formules nouvelles qui, pour les différentes valeurs de l'espèce k , feront connaître, jusqu'à l'infini, toutes les autres valeurs de ce module M . — Nous pensons que les calculs que nous venons d'indiquer, avec les valeurs $k=2$ et $k=3$, suffiront pour éclaircir complètement cette question. Et considérant que la troisième des générations téléologiques (15) ou (24) qui sert ainsi à déterminer le module M , est fonction de l'exposant m de la congruence, on comprendra encore ici que l'exemple (58), quoiqu'il ne s'applique qu'aux congruences du troisième degré, s'étend manifestement aux congruences de tous les degrés m .

Nous pouvons donc considérer comme éclaircies complètement, par nos exemples et calculs précédents, les trois lois téléologiques (15), qui président à la génération distincte de chacune des trois parties constitutantes de la congruence générale (14), savoir, du résidu a , de la racine x , et du module M , lois qui régissent ainsi la formation des congruences. — Procédons maintenant à éclaircir également, par des exemples et des calculs numériques, les lois (40), (41), (42), et généralement (46), qui régissent la résolution des congruences.

Mais, pour ne pas nous étendre inutilement dans ces exemples, bornons-nous, ce qui sera suffisant, à un seul des facteurs qui entrent dans la loi générale (46), et nommément au premier de ces facteurs, correspondant à l'indice 1, c'est-à-dire, faisons $\mu_2 = n$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 0$, etc., dans cette expression générale (46) qui, comme nous l'avons reconnu, donne les racines x de la congruence (45) d'un degré quelconque m , lorsque le résidu a et le module M sont connus ou donnés. Nous aurons ainsi, pour cette résolution des congruences . . . (73)

$$x^m \equiv a, \quad (\text{mod.} = M),$$

l'expression générale et suffisante . . . (73)

$$x = \left[a \cdot P^* + M \cdot t \right]^{\frac{1}{m}} \times Q^* + M \cdot j;$$

les quantités P et Q étant données par les expressions auxiliaires (44). Et par conséquent, nous aurons, pour ce cas le plus simple, qui correspond aux formules primitives (40), (41), (42), et qui nous suffira ici amplement, l'expression générale et complètement déterminée... (74)

$$x = \left[a \cdot \left\{ (-1)^{\mu+1} \cdot N \left[\frac{M}{N}, p \right]^{(i-1)} \right\}^{\frac{1}{\mu}} + Mi \right]^{\frac{1}{\mu}} \times \\ \times \left\{ (-1)^{\mu+1} \cdot N \left[\frac{M}{(i^{j+1})}, \pi \right]^{(i-1)} \right\}^{\frac{1}{\mu}} + Mj;$$

l'exposant μ étant un nombre entier arbitraire, mais positif, γ compris zéro, et les nombres i et j étant de même des nombres entiers arbitraires, positifs, négatifs, ou zéro. Quant au nombre auxiliaire N , d'après sa formation (30), il constitue la fonction aleph que voici... (74')

$$N = N \left[\frac{M}{(i^{j+1})}, \pi \right]^{(\mu-1)}.$$

Avant tout, il faut ici faire remarquer que la présente expression téléologique (74), comme représentant de l'expression générale (46), dont elle indique un de ses facteurs, donne toujours et immédiatement, sous sa forme générale, IRATIONNELLE OU RATIONNELLE, la solution de la congruence générale proposée (73), quels que soient les nombres arbitraires μ et i qui entrent dans cette expression. On obtient donc ainsi, surtout dans la forme absolument générale (46), la solution générale et complète de ce grand problème des congruences (73), que la science actuelle n'a pu résoudre, pas même pour le second degré. Et par la présente solution générale (74) de ce problème, on découvre en même temps dans quels cas la racine demandée x peut devenir rationnelle et peut ainsi former un nombre entier. En effet, on y voit que cette forme RATIONNELLE de la racine x ne peut avoir lieu que lorsque, par l'influence des nombres arbitraires μ et i , la quantité qui est contenue dans les crochets [...], formant le premier facteur de cette expression (74), devient une puissance exacte du degré μ , ou bien généralement, comme nous l'avons déjà dit plus haut, lorsque la quantité (47) qui entre dans l'expression absolument générale (46), devient ainsi une puissance exacte du degré μ , par l'influence des nombres arbitraires i et μ_1, μ_2, μ_3 , etc. Et comme, par suite de la génération purement téléologique de cette quantité qui est contenue dans les susdits crochets [...], le cas où, par l'influence des nombres arbitraires i et μ , elle devient une puissance exacte du degré μ , est évidemment un cas isolé, c'est-à-dire, un fait SINGULIER, indépendant d'autres lois que de ces lois téléologiques qui président à la génération de la quantité en question, on conçoit que l'on ne peut

que constater à posteriori, et nullement déterminer à priori, ce fait singulier où la forme irrationnelle de la présente solution générale (74) ou (46) devient une forme rationnelle, et offre, dans ce cas isolé, une résolution spéciale de la congruence générale (73). — Toutefois, la variation progressive du nombre arbitraire μ conduit méthodiquement à n'avoir besoin que de très-petits nombres i pour constater ainsi à posteriori le fait singulier en question; et lorsque ces nombres μ amènent des résultats périodiques, comme nous l'avons vu plus haut, la variation progressive du genre k et la combinaison des facteurs différents dans l'expression générale (46) conduisent toujours méthodiquement à l'exclusion des grands nombres i et par conséquent à la solution métronomique et même à la solution absolue de ce grand et difficile problème.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, dans cette solution téléologique (73)' et (74), ou originellement et généralement (46), la formation progressive des puissances P^p et Q^q s'opère simplement sur leurs résidus et s'effectue ainsi avec la plus grande facilité. En effet, désignant par R_p et S_p les résidus respectifs des puissances P^p et Q^p , c'est-à-dire, faisant...

... (75)

$$P^p \equiv R_p, \quad (\text{mod.} \equiv M),$$

$$Q^q \equiv S_p, \quad (\text{mod.} \equiv M),$$

ou aura manifestement... (75')

$$R_{p+v} \equiv R_p \cdot R_v, \quad S_{p+v} \equiv S_p \cdot S_v, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

et généralement pour un nombre quelconque v , les produits... (75'')

$$R_{p+v} \equiv R_p \cdot R_v, \quad S_{p+v} \equiv S_p \cdot S_v, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

de sorte que la simple multiplication des résidus R et S , qui, positifs ou négatifs, seront toujours plus petits que le module M , équivaut ici, dans notre solution téléologique (73)', (74), etc., à la multiplication des puissances P^p , P' et Q^q , Q' , qui conduiraient à de très-grands nombres. Et cette multiplication respective des résidus R et S , ainsi que la réduction de leurs produits à des nombres plus petits que le module M , peut, comme nous venons de l'avancer, s'effectuer de la manière la plus simple par la construction de tarifs pour les premiers dix multiples des premiers résidus R , et S , et du module M . — Il faut encore remarquer que, dans le cas où les puissances P^p sont multipliées par le résidu a de la congruence, comme elles le sont dans l'expression spéciale (73)' et dans l'expression générale (46) de la racine x de cette congruence (73) ou (45), les résidus de ces produits sont également faciles à calculer. En effet, si nous désignons par T_p ces résidus des produits $a \cdot P^p$, de manière que l'on ait la congruence générale... (76)

$$a \cdot P^p \equiv T_p, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

on aura, pour tout autre nombre v , la congruence pareille... (76)'

$$a \cdot P^v \equiv T_v \pmod{M};$$

et leur produit donnera... (76)''

$$a^v \cdot P^{v+v} \equiv T_v \cdot T_v \pmod{M};$$

c'est-à-dire... (76)'''

$$a \cdot T_{p+} \equiv T_p \cdot T_v \pmod{M}.$$

On aura donc, en vertu des expressions (27) et (28) concernant ces congruences du premier degré, la valeur... (77)

$$T_{p+} = (-1)^{v+1} \cdot T_p \cdot T_v \cdot N \left[\frac{M}{a}, v \right]^{(v-1)} + M \cdot i.$$

Et quant à la formation progressive de ces résidus T_1, T_2, T_3 , etc., on aura manifestement... (78)

$$T_{p+} = a \cdot P^{p+1} = T_p \cdot P \equiv T_p \cdot R + M \cdot j;$$

de sorte qu'il suffira de multiplier tout résidu précédent T_p par le résidu R , du nombre P , pour avoir le résidu suivant T_{p+} , des produits $(a \cdot P^p)$ et $(a \cdot P^{p+1})$ qui entrent dans les expressions (73)' ou (46) des racines x des congruences en question. — Enfin, il faut remarquer que ces calculs des résidus R, S, T , sont les mêmes pour le degré quelconque m des congruences (73) ou (45) dont il s'agit; et par conséquent qu'ils n'ont généralement d'autre difficulté que celle qui provient de la grandeur du nombre M , formant le module, comme cela doit être inévitablement.

Quant à la relation qui existe entre ces différents résidus R, S, T , il suffit d'observer que, dans le cas où le résidu a de la congruence (73) serait $a \equiv 1$, l'une des racines x serait également $x \equiv 1$; de sorte qu'en donnant au nombre arbitraire μ qui entre dans l'expression (73)' de ces racines x la valeur $\mu \equiv \lambda m$, où λ est un nombre entier et positif quelconque, y compris zéro, cette expression (73)', en y faisant en outre $i \equiv 0$, donnera la congruence générale... (79)

$$P^{\lambda} \cdot Q^{m} \equiv 1 \pmod{M}.$$

Et par conséquent, en vertu des relations (75), on aura, entre les résidus correspondants R , et S_{m-1} des présentes puissances P^{λ} et Q^{m} , la congruence... (79)'

$$R_{\lambda} \cdot S_{m-1} \equiv 1 \pmod{M}.$$

De plus, en multipliant les deux membres de la congruence générale (79) par le résidu a , on aura... (79)''

$$a \cdot P^{\lambda} \cdot Q^{m} \equiv a \pmod{M};$$

et par conséquent, en vertu de la relation (76), on aura généralement, entre les résidus T et S , la congruence... (79)'''

$$T_1, S_{2n} \equiv a_1 \pmod{M};$$

qui, lorsque $a \equiv 1$, se réduit à la congruence précédente (79)', à cause qu'en vertu de cette relation (76), on a alors ... (79)''

$$T_1 \equiv P^1 \equiv R_1.$$

Enfin, pour la facilité de la recherche de toutes les racines $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ d'une congruence générale... (80)

$$x^m \equiv a \pmod{M},$$

il faut ne pas perdre de vue que l'on a toujours, entre ces m racines, comme théorème général, la congruence spéciale... (80)'

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv a \cdot (-1)^{m-1} \pmod{M};$$

de sorte que, connaissant $(m-1)$ de ces racines, on peut toujours, par cette congruence du premier ordre (80)', déterminer la dernière de ces mêmes racines. — Il est sans doute superflu de rappeler ici également que, lorsque l'exposant m de la congruence (80) est un nombre pair, il existe, pour toute racine positive, une racine négative équivalente.

Maïs, ce qui prouve que la solution (74) ou originairement (46) de la congruence générale (73) ou (45) offre la solution MÉTHODIQUE et même la solution ABSOLUE de ce grand et difficile problème, c'est que, comme nous l'avons annoncé plus haut, elle remplit, sous sa forme générale, irrationnelle ou rationnelle, toutes les conditions de ce problème. — Nous allons le prouver en réduisant maintenant, comme nous l'avons promis plus haut, à une forme purement algébrique, l'expression générale (44) de nos présentes quantités P qui entrent dans l'expression spéciale (73)' et originairement dans l'expression générale (46) des racines x en question. — Pour cela, en considérant d'abord comme inconnue la quantité N qui est donnée par l'expression auxiliaire (74)' ou originairement (43), formons avec elle la congruence du premier degré... (81)

$$N \cdot (x^{11})^m + O \equiv 0 \pmod{M};$$

dont la solution, en vertu de la règle (37), donnera... (81)'

$$N \equiv (-1)^m \cdot O \cdot N \left[\frac{M}{(x^{11})^m}, \varpi \right]^{m-1} + M.$$

Et attribuant à la quantité arbitraire O la valeur $O \equiv (-1)^m$, nous aurons... (82)

$$N \equiv N \left[\frac{M}{(x^{11})^m}, \varpi \right]^{m-1};$$

expression qui est identique avec l'expression auxiliaire en question (74)' ou

(43). — Supposons maintenant que, dans la présente congruence du premier degré (81), c'est la quantité $(1^{k1})^{m_1}$ qui, à son tour, est inconnue ; et nous obtiendrons, pour sa détermination, en vertu de la même règle (27), l'expression . . . (82)

$$(1^{k1})^{m_1} = (-1)^{j_1} \cdot O \cdot N \left[\frac{M}{N} \cdot \varphi \right]^{(j_1-1)} + Mj_1,$$

qui, en y introduisant pour O sa susdite valeur $O = (-1)^m$, deviendra . . . (83).

$$(1^{k1})^{m_1} = (-1)^{m+j_1} \cdot N \left[\frac{M}{N} \cdot \varphi \right]^{(j_1-1)} + Mj_1;$$

en ne perdant pas de vue que la quantité N est ici donnée par sa détermination précédente (82). — Or, cette présente expression téléologique (83) est précisément l'expression générale (44) de nos quantités P qui entrent dans la solution (46) de la congruence générale (45). Nous aurons donc simplement, pour ces quantités P , à la place de leur expression doublement (*) téléologique (44), l'expression générale et purement algébrique . . . (84)

$$P_v = (1^{k1v})^{m_v},$$

pour un indice quelconque v , c'est-à-dire, pour une valeur quelconque du genre k . Et alors, la solution générale (46) de la congruence (45), c'est-à-dire, de la congruence . . . (85)

$$x^n \equiv a, \quad (\text{mod. } \equiv M),$$

prendra la forme très-simple . . . (86)

$$x = \left[a \cdot \left\{ (1^{k11})^{m_1 \cdot p_1} \cdot (1^{k12})^{m_2 \cdot p_2} \cdot (1^{k13})^{m_3 \cdot p_3} \cdot \dots \right\} + Mi \right]^{\frac{1}{n}} \times \\ \times \left\{ Q_1^{p_1} \cdot Q_2^{p_2} \cdot Q_3^{p_3} \cdot \dots \right\} + Mj;$$

les quantités Q_1, Q_2, Q_3 , etc., ayant toujours l'expression générale qui est donnée sous la marque (44), savoir . . . (87)

$$Q_v = (-1)^{m+p_v} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{k1v})^{m_v}}, \pi \right]^{(n-1)}.$$

Ainsi, en nous bornant à un seul des facteurs qui entrent dans la présente expression générale (86), comme nous l'avons fait sous les marques (73)' et

(*) C'est par suite de cette double génération téléologique, l'une progressive, et l'autre régressive, que les quantités P restent purement algébriques.

(74), nous aurons, pour la solution spéciale de la congruence générale (85), l'expression . . . (88)

$$x = \left[a.(1^{11})^{m\mu} + Mj \right]^{\frac{1}{\mu}} \times \left\{ (-1)^{\mu+1} \cdot K \left[\frac{M}{(1^{11})^{\mu}}, \pi \right]^{(\mu-1)} \right\}^{\mu} + Mj;$$

l'exposant μ étant un nombre entier arbitraire, mais positif, y compris zéro, et les nombres i et j étant de même des nombres entiers arbitraires, positifs, négatifs ou zéro.

Nous pouvons maintenant démontrer facilement que la solution générale (86) de la congruence (85) d'un degré quelconque m , satisfait à toutes les conditions de cette congruence générale (85), et qu'elle offre ainsi, sous sa forme générale, irrationnelle ou rationnelle, la solution absolue de ce grand problème. — En effet, pour simplifier cette démonstration, bornons-nous à considérer la solution générale (86) dans un seul de ses facteurs, comme la donne l'expression spéciale (88); car, ce qui a lieu pour un seul de ces facteurs, s'étend nécessairement à tous les autres. Or, en prenant la puissance m des deux membres de l'expression élémentaire (88), nous aurons . . . (89)

$$x^m = a.(1^{11})^{m\mu} \cdot \left\{ (-1)^{\mu+1} \cdot K \left[\frac{M}{(1^{11})^{\mu}}, \pi \right]^{(\mu-1)} \right\}^{m\mu} + Mj;$$

c'est-à-dire . . . (89')

$$x^{f'} = a \cdot \left\{ (-1)^{\mu+1} \cdot (1^{11})^{\mu} \cdot K \left[\frac{M}{(1^{11})^{\mu}}, \pi \right]^{(\mu-1)} \right\}^{m\mu} + Mj';$$

expressions où f' est un nombre entier arbitraire. Mais, en vertu de la condition fondamentale (25) et (26) de notre loi téléologique (15), nous avons ici la congruence . . . (90)

$$(-1)^{\mu+1} \cdot (1^{11})^{\mu} \cdot K \left[\frac{M}{(1^{11})^{\mu}}, \pi \right]^{(\mu-1)} \equiv 1, \quad (\text{mod. } M);$$

et par conséquent, l'expression (89') de la puissance x^m se réduira à la forme très-simple . . . (90')

$$x^m = a.(1)^{m\mu} + Mj'.$$

Substituant donc cette valeur dans la congruence générale proposée (85), il viendra . . . (91)

$$x^m - a = a.(1)^{m\mu} - 1 + Mj' \equiv 0 + Mj';$$

et par conséquent, cette congruence proposée (85) se trouvera complètement résolue par l'expression générale (86); car, ce que nous venons de reconnaître pour un des facteurs de cette expression (86), s'étend manifestement à tous les autres.

Ainsi, comme nous l'avons avancé, l'expression (86), prise dans sa forme générale, irrationnelle ou rationnelle, offre effectivement la solution complète de la congruence (85) d'un degré quelconque m . Et ce qui est plus, cette expression (86) constitue même la solution absolue de la congruence générale (85), parce que cette solution en question est donnée immédiatement par l'expression (86) elle-même, sans dépendre d'aucun procédé auxiliaire, ni généralement d'aucune considération étrangère.

Il ne reste donc qu'à reconnaître la condition sous laquelle cette expression systématique (86), ou son expression élémentaire (88), peut recevoir une forme rationnelle, en donnant alors des nombres entiers pour les valeurs des racines x de la congruence générale (85). Et, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, cette condition problématique consiste manifestement en ce que, par l'influence des nombres arbitraires μ et l , la quantité qui, dans ces expressions (86) ou (88), se trouve entre les crochets [...], soit une puissance exacte du degré m , c'est-à-dire, en ce que, suivant l'expression élémentaire (88), on ait ... (92)

$$z^m = a \cdot \left\{ (1^{1\mu})^{1\mu} \right\}^m + Mi,$$

ou bien en ce que, suivant l'expression systématique (86), on ait généralement ... (92')

$$z^m = a \cdot \left\{ (1^{1\mu_1})^{1\mu_1} \cdot (1^{1\mu_2})^{1\mu_2} \cdot (1^{1\mu_3})^{1\mu_3} \dots \right\}^m + Mi;$$

la quantité z étant un nombre entier. — Or, le second membre de ces égalités problématiques (92) et (92') offre à la vérité une forme purement algébrique, comme nous l'avons promise plus haut; mais on ne saurait néanmoins résoudre ces égalités par un procédé algébrique, parce qu'elles impliquent, pour cette solution, un problème tout à fait téléologique. En effet, si nous désignons généralement par y la quantité inconnue qui, dans ces égalités, dépend des nombres arbitraires μ_1, μ_2, μ_3 , etc., c'est-à-dire, si nous faisons ... (93)

$$y = \left\{ (1^{1\mu_1})^{1\mu_1} \cdot (1^{1\mu_2})^{1\mu_2} \cdot (1^{1\mu_3})^{1\mu_3} \dots \right\};$$

les égalités (92) et (92') prendront la forme ... (93')

$$z^m = a \cdot y^m + Mi;$$

et elles donneront lieu à la congruence problématique du second ordre ... (94)

$$z^m - a \cdot y^m \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M),$$

dont la solution, comme nous le verrons ci-après, dépend de la congruence du premier ordre (85), et rentre ainsi, par un cercle logique, dans la même question purement téléologique de cette congruence du premier ordre (85). — Ainsi, comme nous l'avons avancé plus haut, l'existence des égalités (92)

et $(92)'$, qui peut donner une forme rationnelle à la solution (86) ou (88) de la congruence proposée (85), est tout à fait CONTINGENTE; et par conséquent, cette existence des égalités (92) et $(92)'$, lorsqu'elle a lieu, ne constitue, comme nous l'avons dit également, qu'un CAS ISOLÉ ou UN FAIT SINGULIER, qui dépend de la solution de la congruence du second ordre (94) , et qui rentre conséquemment, PAR SON PRINCIPLE, dans la question téléologique de la solution de la congruence proposée du premier ordre (85). On ne peut donc, comme nous l'avons avancé et comme nous le prouvons maintenant, on ne peut, disons-nous, que constater à *posteriori*, et nullement déterminer à *priori*, cette existence en question des égalités (92) et $(92)'$ qui donne une forme rationnelle à la solution systématique (86) ou à la solution élémentaire (88) de la congruence générale (85) du premier ordre, à cette solution fondamentale qui sert ainsi de base à toute la Théorie des Nombres.

Mais, il faut observer que, quoiqu'elle soit absolument CONTINGENTE dans sa génération, c'est-à-dire, indépendante de toute LOI, cette existence des égalités (92) et $(92)'$, dont dépend la solution rationnelle en question, a lieu NÉCESSAIREMENT, comme FAIT, parce que, d'après les déductions (38), (39), (40), (41), et (42), le second membre de ces égalités (92) et $(92)'$ forme TOUS LES RÉSIDUS POSSIBLES des puissances du degré m , parmi lesquels résidus se trouvent NÉCESSAIREMENT, comme nous l'avons déjà dit plus haut, les puissances elles-mêmes du degré m . — De plus, il faut observer que, pour constater à *posteriori* ce fait de l'existence nécessaire des égalités (92) et $(92)'$, comme on est ici forcé de le faire, le calcul du second membre de ces égalités s'exécute, non-seulement avec facilité, en n'opérant partout que sur des résidus plus petits que le module M , mais surtout par un *raisonnement* MÉTHODIQUE, en augmentant progressivement d'une unité le nombre arbitraire μ , d'après les susdites règles $(75)'$, $(75)''$, et (78), et en n'employant, pour le nombre arbitraire i , que les très-petits nombres qui sont nécessaires pour compléter les résidus du calcul, de manière à en former des puissances en question du degré m .

Bien plus, ce nombre arbitraire i qui entre dans la partie irrationnelle des expressions (86) et (88), ne doit servir principalement que pour réduire les résidus R_n et T_n des puissances P^n et $(a.P^n)$ à des nombres plus petits que le module M ; et ce n'est qu'accessoirement qu'on peut, lorsque le cas se présente, se servir de ce nombre i pour compléter ces résidus R_n et T_n , de manière à en former des puissances exactes du degré m , comme nous venons de l'indiquer. Aussi, le vrai et absolu *raisonnement* MÉTHODIQUE de la présente résolution générale des congruences (85) de tous les degrés, consiste-t-il à n'employer le nombre arbitraire i , dans les expressions (86) et (88), à rien autre qu'à la réduction des résidus R_n et T_n à des nombres plus petits que le module M , positifs ou négatifs, et par conséquent à n'employer, pour

cette résolution générale en question, d'autres puissances exactes du degré m que celles que présentent ces résidus R_p et T_p eux-mêmes. Et alors, l'expression élémentaire (88) qui, pour la solution de la congruence générale (85), donne les racines x , sera proprement . . . (95)

$$x = \left[T_p \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \left\{ (-1)^{r+1} \cdot R \left[\frac{M}{(1^{1/2})^2} ; \pi \right]^{(r-1)} \right\}^r + Mj;$$

le résidu T_p , positif ou négatif, mais toujours plus petit que le module M , étant donné par la congruence (76), c'est-à-dire, en vertu de la détermination algébrique (84) de la quantité P , par la congruence . . . (95)

$$a \cdot (1^{1/2})^{m \cdot p} \equiv T_p, \quad (\text{mod.} = M).$$

Et le calcul de ces résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., s'opérera alors méthodiquement d'après la règle (78), savoir . . . (96)

$$T_{p+1} = T_p \cdot R + M \cdot j',$$

dans laquelle la quantité R , est le résidu de la congruence . . . (96)

$$(1^{1/2})^{m \cdot p} \equiv R, \quad (\text{mod.} = M).$$

C'est encore ici, dans cette règle (96) du calcul des résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., que l'on voit l'extrême facilité de ce calcul, au point que, par la simple addition et soustraction numériques, on peut parvenir ainsi, d'une manière tout à fait directe, et sans aucun tâtonnement, à la découverte des racines x des congruences (85), c'est-à-dire, à la résolution générale de ces congruences. On voit en effet, dans cette règle (96), qu'il suffit, comme nous l'avons dit plus haut, de former les tarifs des dix premiers multiples du résidu R , et du module M , pour pouvoir opérer, d'abord, les multiplications progressives ($T_p \cdot R$) par de simples additions des multiples du résidu R , et ensuite les réductions de ces produits à des nombres plus petits que le module, par de simples soustractions des multiples de ce module M .

Mais, d'après ce que nous avons déjà observé plus haut en donnant la deduction de l'expression générale (46), il est manifeste, dans le procédé méthodique et absolu que nous venons d'indiquer, où l'on n'emploie le sous-dit nombre arbitraire r qu'à la réduction des résidus T_p à des nombres plus petits que le module M , il est manifeste, disons-nous, que, lorsque, dans la suite des résidus T_1, T_2, T_3 , etc., on obtient un résidu T_i identique avec l'un des résidus précédents, avant que ces résidus présentent une puissance exacte du degré m , il faut changer le genre k et procéder comme nous l'avons dit plus haut pour épuiser les différentes combinaisons qui conduisent à l'expression générale (46). Aussi, quelque grand que soit l'exposant m de la congruence proposée (85), et quelque petit que soit en même temps son module

M, existera-t-il toujours, parmi les résidus T_1, T_2, T_3 , etc., calculés ainsi méthodiquement, au moins l'unité qui formera une puissance exacte du degré m et qui servira ainsi à la solution complète du problème, soit avec le même genre k , à l'aide des indices μ ultérieurs qui donneront, pour la quantité Q , des valeurs différentes, soit avec des genres k différents, soit enfin par la combinaison de ces facteurs différents, conformément aux expressions générales (46) et (86).

Quant à cette expression générale (86), en désignant par p le nombre de ses facteurs, nous aurons d'abord ... (97)

$$x = \left[a \cdot \left(t^{h_1} \right)^{m \cdot p^1} \cdot \left(t^{h_2} \right)^{m \cdot p^2} \cdot \dots \cdot \left(t^{h_p} \right)^{m \cdot p^p} \right]^{\frac{1}{m}} \times \\ \times \left[Q_1^{p^1} \cdot Q_2^{p^2} \cdot \dots \cdot Q_p^{p^p} \right] + Mj.$$

Et si, conformément à la notation (76), nous formons ici, pour un indice quelconque v , le résidu général $T_{v,p}$ par la congruence ... (98)

$$a \cdot \left(t^{h_v} \right)^{m \cdot p^v} \equiv T_{v,p}, \quad (\text{mod.} = M);$$

nous aurons, par les produits respectifs des deux membres des congruences particulières qui répondent ici successivement aux indices $v = 1, v = 2, v = 3, \dots, v = p$, la congruence composée ... (98')

$$a \cdot \left\{ \left(t^{h_1} \right)^{m \cdot p^1} \cdot \left(t^{h_2} \right)^{m \cdot p^2} \cdot \dots \cdot \left(t^{h_p} \right)^{m \cdot p^p} \right\} \equiv \\ \equiv \left[T_{1,p} \cdot T_{2,p} \cdot \dots \cdot T_{p,p} \right], \quad (\text{mod.} = M),$$

qui donnera, pour la quantité formant la partie irrationnelle dans l'expression (86), la valeur ... (98'')

$$a \cdot \left\{ \left(t^{h_1} \right)^{m \cdot p^1} \cdot \left(t^{h_2} \right)^{m \cdot p^2} \cdot \dots \cdot \left(t^{h_p} \right)^{m \cdot p^p} \right\} = \\ = (-t)^{m \cdot p^1} \cdot \left[T_{1,p} \cdot T_{2,p} \cdot \dots \cdot T_{p,p} \right] \cdot N \left[\frac{M}{a^{p-1}}, \varpi \right]^{(m-1)} + Mj.$$

Et par conséquent, cette expression générale (86), en la réduisant aux simples résidus $T_{v,p}$, donnés par les congruences (98), et tous plus petits que le module M , sera ... (99)

$$x = \left[(-t)^{m \cdot p^1} \cdot \left[T_{1,p} \cdot T_{2,p} \cdot \dots \cdot T_{p,p} \right] \cdot N \left[\frac{M}{a^{p-1}}, \varpi \right]^{(m-1)} + Mj \right]^{\frac{1}{m}} \times \\ \times \left[Q_1^{p^1} \cdot Q_2^{p^2} \cdot \dots \cdot Q_p^{p^p} \right] + Mj;$$

où le nombre arbitraire j ne doit également être employé qu'à la réduction

de la partie irrationnelle de cette expression à des nombres plus petits que le module M.

Telle (99) est donc définitivement la **RÉSOLUTION GÉNÉRALE, DIRECTE, MÉTHODIQUE, ET MÊME ABSOLUE**, de la congruence (85) d'un degré quelconque m . — Et cette expression générale, en y faisant $\mu = 1$, c'est-à-dire, en n'employant qu'un seul de ses facteurs, donne immédiatement la **susdite** expression élémentaire (95) pour cette même résolution de la congruence générale (85); car, on a alors... (99)

$$N \left[\frac{M}{a^{m-1}} \right]^{(m-1)} = 1, \quad \text{et } \alpha = 1.$$

Nous devons ici, à propos des susdites règles (75)', (75)'', et (78), qui fixent les relations entre les résidus du calcul méthodique dont nous venons de parler, faire remarquer que l'on peut, par la présente expression algébrique (84) des quantités P, fixer la relation générale (79)' entre les résidus R et S, indépendamment de la considération de la valeur $x = 1$ de la racine lorsque le résidu a , dans la congruence (85), est égal à l'unité. En effet, substituant, dans la relation générale (79), les présentes valeurs (84) et (87) des quantités P et Q, cette relation, en vertu de notre susdite condition fondamentale (90), se trouvera vérifiée dans toute sa généralité.

Pour compléter ces considérations générales, examinons un instant l'expression téléologique et élémentaire (88) des racines x de la congruence générale (85); et nous découvrirons facilement l'analogie qui existe entre les congruences et les équations... (100)

$$x^m = a, \quad \text{qui donnent} \quad x = \sqrt[m]{a}.$$

On voit en effet que, lorsque, dans l'expression (88) et définitivement (95), le nombre arbitraire μ est zéro, ce qui, en vertu de (76) ou de (95)', donne $T_\mu = a$, les racines des congruences, en considérant ces racines sous leur forme générale (95), rationnelle ou irrationnelle, sont tout à fait identiques avec les racines des puissances. Seulement par l'influence de ce nombre arbitraire μ , les racines (88) ou (95) des congruences, pour satisfaire au module M, qui est l'élément nouveau et caractéristique des congruences, prennent des valeurs différentes de celles qu'ont les racines des puissances. — Et c'est ici le lieu de reconnaître le génie de Gauss qui, par l'introduction des congruences dans la Théorie des Nombres, à la place de simples équations algébriques, a si bien présenté les procédés **ARITHMÉTIQUES** ou **ARITHMÉTIQUES** de cette Théorie, en opposition aux procédés **LOGIQUES** ou **ALGÈBRIQUES** de toutes les autres branches de l'Algorithme; tandis que l'illustre académicien Legendre n'y voyait et n'y cherchait constamment que des procédés **ALGÈBRIQUES**, en trahissant ainsi une profonde ignorance sur l'esprit de la Théorie des Nombres.

Procédons maintenant aux exemples que nous nous sommes proposé de donner pour la résolution générale (88) et définitivement (95) des congruences de tous les degrés (85), pour cette résolution (95) qui forme un des éléments de la résolution générale (86) et définitivement (99), telle que, sous la marque (46), nous l'avons déduite de notre Principe téléologique (15), constituant la troisième et dernière loi fondamentale des Mathématiques.

Soit proposée, pour premier exemple, la congruence du second degré... (101)

$$x^2 \equiv 7, \quad (\text{mod.} = 367);$$

dont on connaît le résidu 7 et le module 367, et dont il s'agit de découvrir directement les racines x . — Nous aurons donc ici $m \equiv 2$, $a \equiv 7$, et $M \equiv 367$. Et donnant d'abord au genre k la valeur $k \equiv 2$, nous aurons de plus, pour l'expression (88), les valeurs... (101)'

$$(1^{1/2})' = 4, \quad \text{et} \quad (1^{1/2})'' = 16.$$

Ainsi, suivant les règles (11) et (13)', d'après les exemples que nous en avons donnés, nous obtiendrons ici, pour la fonction aleph qui entre dans cette expression élémentaire (88), la valeur... (101)''

$$\aleph\left[\frac{367}{4}, 3\right]^{(1)} = 92, \quad \text{et} \quad \pi \equiv 3.$$

Et par conséquent, une des expressions générales des racines cherchées sera... (102)

$$x = \left[7 \cdot (16)^j + 367 \cdot i\right]^{\frac{1}{2}} \cdot (92)^j + 367 \cdot j;$$

expression où i et j sont toujours des nombres entiers arbitraires, positifs, négatifs, ou zéro. — Or, sans avoir égard à la forme, rationnelle ou irrationnelle, de cette expression, elle offre déjà réellement, avec ce premier genre $k \equiv 2$, et avec un nombre quelconque p , une des expressions générales des racines demandées. En effet, son carré sera... (102)'

$$x^2 = 7 \cdot \left\{16 \cdot (92)^j\right\}^2 + 367 \cdot j \equiv 7 \cdot (1)^j + 367 \cdot j;$$

parce que... (102)''

$$16 \cdot (92)^j \equiv 1, \quad (\text{mod.} = 367);$$

et par conséquent, on aura réellement... (102)'''

$$x^2 - 7 = 7 \cdot \left\{(1)^j - 1\right\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 367).$$

Pour découvrir maintenant la forme rationnelle de l'expression (102) des racines cherchées, il suffit de calculer, avec la règle (78) ou (96) les résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., de la quantité générale qui se trouve dans le radical carré de cette expression (102). Ainsi, suivant les notations (75), (76) et (95)', d'après lesquelles les quantités R_p, S_p , et T_p seront ici, par rapport

au module $M = 367$, les résidus dans les congruences ... (103)

$$(16)^8 \equiv R_8, \quad (92)^8 \equiv S_8, \quad \text{et } 7 \cdot (16)^8 \equiv T_8,$$

nous aurons ... (103)

$$T_8 = 112, \quad T_8 = 324, \quad \text{qui est le carré de 18.}$$

Donc, déjà pour l'exposant $\mu = 2$, la forme (102), en y faisant $i = 0$, devient rationnelle; et alors, avec le deuxième résidu correspondant $S_8 = 23$, nous obtiendrons, pour la valeur rationnelle de la racine cherchée, la quantité ... (103)''

$$x = [324]^{\frac{1}{2}} \cdot 23 + 367 \cdot j \equiv 47 + 367 \cdot j'.$$

Et puisque l'exposant de la congruence proposée (101) est un nombre pair, la seconde racine de cette congruence, d'après la remarque que nous avons rappelée à l'occasion de la congruence générale (80), sera égale à la première, prise négativement. D'ailleurs, la racine carrée dans l'expression (103)'' a immédiatement le signe positif et le signe négatif. On aura donc, sans recherche ultérieure, pour la congruence proposée (101) du second degré, les deux racines ... (104)

$$x_1 = 47 + 367 \cdot j',$$

$$x_2 = -47 + 367 \cdot j'' \equiv 320 + 367 \cdot j''';$$

les quantités j' , j'' , j''' , étant des nombres entiers arbitraires, positifs, négatifs, ou zéro. En effet, ou a réellement ... (104)'

$$(47)^2 - 7 = 2202 = 367 \times 6, \quad \text{et}$$

$$(320)^2 - 7 = 102393 = 367 \times 279.$$

Soit proposée, pour deuxième exemple, la congruence du troisième degré ... (105)

$$x^3 \equiv 83, \quad (\text{mod.} = 1291);$$

dont on connaît le résidu 83 et le module 1291, et dont il s'agit de découvrir directement les racines x . — Nous aurons donc ici $m = 3$, $a = 83$, et $M = 1291$. Et donnant d'abord au genre k la valeur $k = 2$, nous aurons de plus, pour l'expression (88), les valeurs ... (105)'

$$(1^{11})^2 = 4, \quad \text{et } (1^{11})^{12} = 64.$$

Ainsi, suivant les règles (11) et (13)', d'après les exemples que nous en avons donnés, nous obtiendrons ici, pour la fonction aleph qui entre dans cette expression élémentaire (88), la valeur ... (105)''

$$\aleph \left[\frac{1291}{4}, 3 \right]^{(2)} = 323, \quad \text{et } \pi = 3.$$

Et par conséquent, une des expressions générales des racines cherchées sera ... (106)

$$x = [83 \cdot (64)^2 + 1291 \cdot i]^{\frac{1}{2}} \cdot (323)^2 + 1291 \cdot j;$$

i et j étant des nombres entiers quelconques. — Or, sans avoir égard à la forme, rationnelle ou irrationnelle, de cette expression, elle offre déjà réellement, avec ce premier genre $k = 2$, et avec un nombre quelconque μ , une des expressions générales des racines demandées. En effet, son cube sera...

$$(106)' \quad x^3 = 83 \cdot \{64.(3a3)^3\}^{\mu} + 1291.j = 83.(1)^{\mu} + 1291.j;$$

parce que... (106)''

$$64.(3a3)^3 \equiv 1, \quad (\text{mod.} = 1291);$$

et par conséquent, on aura réellement... (106)'''

$$x^3 - 83 \equiv 83 \cdot \{(1)^{\mu} - 1\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 1291).$$

Pour découvrir maintenant la forme rationnelle de la présente expression (106) des racines cherchées, il suffit de nouveau de calculer, avec la susdite règle (78) ou (96), les résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., de la quantité générale qui se trouve dans le radical cubique de cette expression (106). Ainsi, suivant les notations (75), (76) et (95), d'après lesquelles les quantités R_1, S_1 , et T_1 seront ici, par rapport au module $M = 1291$, les résidus dans les congruences... (107)

$$(64)^{\mu} \equiv R_{\mu}, \quad (3a3)^{\mu} \equiv S_{\mu}, \quad \text{et} \quad 83.(64)^{\mu} \equiv T_{\mu},$$

nous obtiendrons les valeurs progressives... (107)'

$$T_1 = 148, \quad T_2 = 435, \quad T_3 = 729 = (9)^3.$$

Done, déjà pour l'exposant $\mu = 3$, la forme (106), en y faisant $i = 0$, devient rationnelle; et alors, avec le deuxième résidu correspondant $S_3 = 585$, nous obtiendrons, pour la valeur rationnelle de la racine cherchée, la quantité... (107)''

$$x = [729]^{\frac{1}{3}}.585 + 1291.j \equiv 101 + 1291.j.$$

Pour avoir les autres racines de la congruence proposée (105), il faut maintenant, d'après la susdite règle (78) ou (96), calculer méthodiquement la suite des présents résidus T_1, T_2, T_3 , etc., jusqu'à ce que, pris positivement ou négativement, ils donnent une puissance exacte du troisième degré. Or, en formant pour cela les susdits tarifs des dix premiers multiples du résidu $R_1 = 64$ et du module $M = 1291$, savoir... (108)

$$\begin{array}{llll} 64 = 1.R_1, & 384 = 6.R_1, & \text{et} & 1291 = 1.M, & 7746 = 6.M, \\ 128 = 2.R_1, & 448 = 7.R_1, & & 2582 = 2.M, & 9037 = 7.M, \\ 192 = 3.R_1, & 512 = 8.R_1, & & 3873 = 3.M, & 10328 = 8.M, \\ 256 = 4.R_1, & 576 = 9.R_1, & & 5164 = 4.M, & 11619 = 9.M, \\ 320 = 5.R_1, & 640 = 10.R_1, & & 6455 = 5.M, & 12910 = 10.M; \end{array}$$

on obtiendra très-facilement, comme nous l'avons dit plus haut, par de sim-

plus additions et soustractions numériques, cette suite des résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., en question, pris positivement et négativement; et l'on y retrouvera, pour $\mu = 34$, une puissance exacte du troisième degré dans T_n pris négativement. Voici cette suite de résidus... (108)

$T_1 = 148 \equiv -1143$,	$T_2 = 435 \equiv -856$,	$T_3 = 729 \equiv -562$,
$T_4 = 180 \equiv -1111$,	$T_5 = 1192 \equiv -99$,	$T_6 = 119 \equiv -1172$,
$T_7 = 1161 \equiv -130$,	$T_8 = 717 \equiv -574$,	$T_9 = 703 \equiv -588$,
$T_{10} = 1098 \equiv -193$,	$T_{11} = 558 \equiv -733$,	$T_{12} = 855 \equiv -436$,
$T_{13} = 498 \equiv -793$,	$T_{14} = 888 \equiv -403$,	$T_{15} = 28 \equiv -1263$,
$T_{16} = 501 \equiv -790$,	$T_{17} = 1080 \equiv -211$,	$T_{18} = 697 \equiv -594$,
$T_{19} = 714 \equiv -577$,	$T_{20} = 511 \equiv -780$,	$T_{21} = 429 \equiv -862$,
$T_{22} = 345 \equiv -946$,	$T_{23} = 133 \equiv -1158$,	$T_{24} = 766 \equiv -525$,
$T_{25} = 1257 \equiv -34$,	$T_{26} = 406 \equiv -885$,	$T_{27} = 164 \equiv -1127$,
$T_{28} = 168 \equiv -1123$,	$T_{29} = 424 \equiv -867$,	$T_{30} = 25 \equiv -1266$,
$T_{31} = 309 \equiv -982$,	$T_{32} = 411 \equiv -880$,	$T_{33} = 484 \equiv -807$,
$T_{34} = 1283 \equiv -8$.		

Ainsi, en outre du cube que présente le résidu T_1 et qui nous a donné l'expression rationnelle (107) de l'une des racines cherchées, nous trouvons de plus un cube exact dans le résidu T_{34} pris négativement, savoir... (108)

$$T_{34} = -8 = (-2)^3.$$

Et alors, l'expression générale (95) nous donnera, pour la deuxième racine x de la congruence proposée (105) du troisième degré, la détermination... (109)

$$x = [-8]^{\frac{1}{3}} \cdot (323)^{14} + 1291 \cdot j \equiv -2 \cdot S_{34} + 1291 \cdot j.$$

Quant au résidu S_{34} qui entre dans cette détermination, on pourra le calculer facilement par la règle (75)'; et l'on obtiendra ainsi les valeurs consécutives suivantes... (109)

$$\begin{array}{lll} S_1 = 323, & S_2 = 585, & S_3 = 110, \\ S_4 = 272, & S_5 = 227, & S_6 = 469, \end{array} \quad \text{et } S_{34} = 601.$$

Donc, cette deuxième racine (109) sera... (109)'

$$x = -2.601 + 1291 \cdot j = 89 + 1291 \cdot j'.$$

Nous devrions ici faire remarquer, à l'occasion du calcul des susdits résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., tels qu'ils sont produits sous la marque (108)', qu'il faut, dans la réduction de ces résidus à des nombres plus petits que le module M , examiner tous les degrés de cette réduction pour reconnaître si, parmi ces degrés de réduction, formant encore des nombres plus grands que ce module M , il ne s'en trouve pas déjà qui soient des puissances exactes du

degré m en question. On s'arrêterait alors à ces puissances en nombres plus grande que le module M , sans avoir besoin de poursuivre plus loin la recherche des puissances pareilles en nombres plus petits que le module M . Mais, afin d'éviter les calculs nécessaires pour reconnaître ces puissances à grands nombres, il faudrait alors se servir des tables de puissances, à l'instar de la petite table que nous joindrons ici à la fin de nos présents exemples, et qui suffira pour des calculs ordinaires. Ainsi, dans nos présents résidus (108)', pour calculer successivement, à l'aide de la susdite règle (78) ou (96), les résidus T_1 par T_0 , et T_2 par T_1 , on aura le type suivant des calculs... (110)

435 = T_0 ,	729 = T_1 ,
320 = 5.R,	576 = 9.R,
192 = 30.R,	128 = 20.R,
256 = 400.R,	448 = 700.R,
27840 = T_1 .R,	46656 = T_1 .R,
2582 = 20.M	3873 = 30.M
2020	7926
1291 = 1.M	7746 = 6.M
729 = T_2 ;	180 = T_2 .

Et il faudrait ici examiner, d'abord, dans le calcul du résidu T_1 , si sa première valeur 27840, ou son premier degré de réduction 2020, ne sont pas déjà des cubes exacts, et ensuite, dans le calcul du résidu T_2 , si sa première valeur 46656, ou son premier degré de réduction 7926, ne sont pas déjà des cubes exacts. On trouverait ainsi que, parmi ces nombres, l'avant-dernier 46656 est réellement le cube de 36; et l'on pourrait s'y arrêter, en obtenant, par la formule (95), une nouvelle expression des racines pour la congruence proposée (105), savoir... (110')

$$x = [46656]^{\frac{1}{3}}.S_4 + 1291.j = 36.469 + 1291.j;$$

c'est-à-dire... (110'')

$$x = 101 + 1291.j.$$

Mais, comme la valeur de cette racine est la même que celle que nous avons déjà trouvée sous la marque (107)'', ce qui n'arrivera pas toujours ainsi, il a fallu poursuivre la recherche des résidus ultérieurs T_2 , T_3 , T_4 , etc., comme nous l'avons fait sous la marque (108)', pour découvrir la deuxième valeur (109)' des racines cherchées. — Nous devons encore, à l'occasion du calcul des susdits (108)' résidus progressifs T_2 , T_3 , T_4 , etc., faire remarquer que la relation (77) entre ces résidus peut offrir une vérification à leur calcul consécutif; une vérification qui devient ici presque indispensable, en considérant

qu'une erreur qui se glisserait à un terme quelconque de ces calculs, se propagerait sur tous les termes suivants. Ainsi, d'après cette relation générale (77), on aurait ici, pour la vérification en question, l'égalité . . . (111)

$$T_{p+1} = (-1)^{p+1} \cdot T_p \cdot T \cdot N \left[\frac{1291}{83}, \varpi \right]^{(p-1)} + 1291.f;$$

qui, par suite de la valeur . . . (111)'

$$N \left[\frac{1291}{83}, \varpi \right]^{(p-1)} = 140, \quad \text{et} \quad \varpi = 5,$$

serait . . . (111)''

$$T_{p+1} \equiv 140 \cdot T_p \cdot T + 1291.f.$$

Maïs, dans cette vérification d'un terme T_{p+1} , il faut toujours se servir des termes T_p et T , déjà vérifiés auparavant, parce que l'erreur introduite dans ces termes composants, se retrouverait dans le terme composé T_{p+1} .

Enfin, dans notre exemple présent (105) du troisième degré, connaissant déjà les deux racines (107)'' et (109)'', savoir, $x_1 = 101$ et $x_2 = 89$, nous trouverons facilement la troisième racine x_3 par le théorème (80)', qui formera ici la congruence . . . (112)

$$101.89.x_3 \equiv 83, \quad (\text{mod.} = 1291);$$

ou bien . . . (112)'

$$1243.x_3 \equiv 83, \quad (\text{mod.} = 1291);$$

laquelle, d'après les règles (27) et (28), donnera . . . (112)''

$$x_3 = 83.511 + 1291.f \equiv 1101 + 1291.f'.$$

Ainsi, les trois racines de la congruence proposée (105) seront . . . (113)

$$x_1 = 101 + 1291.f',$$

$$x_2 = 89 + 1291.f'',$$

$$x_3 = 1101 + 1291.f''';$$

les quantités f' , f'' , f''' étant des nombres entiers quelconques. En effet, on a réellement . . . (113)'

$$(101)^3 - 83 = 1\,030\,218 = 1291 \times 798,$$

$$(89)^3 - 83 = 704\,886 = 1291 \times 546,$$

$$(1101)^3 - 83 = 1\,334\,633\,218 = 1291 \times 1\,033\,798.$$

Soit proposée, pour troisième exemple, la congruence du quatrième degré . . . (114)

$$x^4 \equiv 42, \quad (\text{mod.} = 61);$$

dont on connaît le résidu 42 et le module 61, et dont il s'agit de découvrir directement les racines x . — Nous aurons donc ici $m = 4$, $a = 42$, et $M = 61$. Et donnant de nouveau au genre k , d'abord, la valeur de $k = 2$, nous aurons de plus, pour l'expression (88), les valeurs . . . (114)'

$$(1^{1/2})^4 = 4, \quad \text{et} \quad (1^{1/2})^{2m} = 256 \equiv 12, \quad (\text{mod.} = 61).$$

Ainsi, suivant toujours les règles (11) et (13)', d'après les exemples que nous en avons donnés, nous obtiendrons ici, pour la fonction aleph qui entre dans cette expression élémentaire (88), la valeur . . . (114)'

$$N\left[\frac{61}{4}, 2\right]^{(10)} = 15, \quad \text{et} \quad \pi = 2.$$

Et par conséquent, une des expressions générales des racines cherchées sera . . . (115)

$$x = [42.(12)^k + 61.i]^{1/2} . (-15)^k + 61.j;$$

i et j étant toujours des nombres entiers quelconques. — Or, sans avoir égard à la forme, rationnelle ou irrationnelle, de cette expression, elle offre déjà réellement, avec ce premier genre $k=2$, et avec un nombre quelconque μ , une des expressions générales des racines demandées. En effet, sa quatrième puissance sera . . . (115')

$$x^4 = 42. \left\{ 12.(-15)^4 \right\}^{\mu} + 61.j^{\mu} = 42.(1)^{\mu} + 61.j^{\mu},$$

parce que . . . (115'')

$$12.(-15)^4 \equiv 1, \quad (\text{mod.} = 61);$$

et par conséquent, on aura réellement . . . (115''')

$$x^4 - 42 = 42. \left\{ (1)^{\mu} - 1 \right\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 61).$$

Pour découvrir maintenant la forme rationnelle de la présente expression (115) des racines cherchées, il suffit également de calculer, avec la susdite règle (78) ou (96), les résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., de la quantité générale qui se trouve dans le radical du quatrième degré de cette expression (115). Ainsi, suivant toujours les notations (75), (76) et (95)', d'après lesquelles les quantités R_p, S_p , et T_p seront ici, par rapport au module $M=61$, les résidus dans les congruences . . . (116)

$$(12)^k \equiv R_k, \quad (-15)^k \equiv S_k, \quad \text{et} \quad 42.(12)^k \equiv T_k,$$

nous obtiendrons, d'abord, pour les résidus T_1, T_2, T_3 , etc., les valeurs progressives . . . (116')

$$\begin{array}{llll} T_1 = 16, & T_2 = 9, & T_3 = 47, & T_4 = 15, \\ T_5 = 58, & T_6 = 25, & T_7 = 56, & T_8 = 1; \end{array}$$

dont la première $T_1=16$ et la dernière $T_8=1$ sont des quatrièmes puissances exactes. Et nous aurons ensuite, pour les résidus correspondants S_1 et S_2 , les valeurs progressives . . . (116'')

$$S_1 = -15, \quad S_2 = 42, \quad S_3 = 56, \quad S_4 = 25.$$

Donc, en vertu de l'expression élémentaire générale (95), la présente expression (115) donnera, pour ces deux indices $\mu=1$ et $\mu=8$, pour lesquels les résidus T_1 et T_8 forment des quatrièmes puissances exactes, les deux systèmes de racines . . . (117)

$$x = \pm 2.(-15) + 61.j = \pm 30 + 61.j,$$

$$x = \pm 1.25 + 61.j = \pm 25 + 61.j.$$

Ainsi, les quatre racines cherchées de la congruence proposée (114) du quatrième degré seront... (117')

$$x_1 = 31 + 61.j,$$

$$x_2 = 30 + 61.j,$$

$$x_3 = 25 + 61.j,$$

$$x_4 = 36 + 61.j.$$

En effet, on a réellement... (117'')

$$(31)^4 - 42 = 923\,479 = 61 \times 15139,$$

$$(30)^4 - 42 = 809\,958 = 61 \times 13278,$$

$$(25)^4 - 42 = 390\,583 = 61 \times 6403,$$

$$(36)^4 - 42 = 1\,679\,574 = 61 \times 27534.$$

Il faut ici remarquer que, lorsqu'on s'aperçoit, dans l'expression générale (115) des racines, que, par une petite valeur de la quantité arbitraire i , on peut, dans la suite des résidus T_1, T_2, T_3 , etc., compléter une ou plusieurs de leurs valeurs progressives (116') de manière à en former des quatrièmes puissances exactes, il est inutile de poursuivre le calcul méthodique de ces résidus. Ainsi, dans notre exemple présent, on voit facilement que, pour le résidu $T_1 = 15$, en attribuant à i la valeur $i = 10$, qui donne $61.i = 610$, il en résultera, dans le radical de l'expression (115), la quatrième puissance exacte $[15 + 610] = 625$; de sorte que cette expression (115) donnera alors immédiatement, pour cet indice $\mu = 4$ et pour cette valeur $i = 10$, le système de racines... (118)

$$x = \pm 5.(-15)^4 + 61.j = \pm 36 + 61.j',$$

formant les deux dernières des quatre racines (117) ou (117'). Mais, ce procédé exceptionnel rentre déjà dans le système de procédés indirects de tâtonnement par exclusion, dont nous parlerons ci-après; et il faut ici s'en tenir principalement aux procédés directs et méthodiques (88) ou (95), et généralement (99), pour lesquels nous donnons les présents exemples.

Enfin, soit proposée, pour quatrième et dernier exemple, la congruence du cinquième degré... (119)

$$x^5 \equiv 13, \quad (\text{mod.} = 13313),$$

dont on connaît le résidu 13 et le module 13313, et dont il s'agit de découvrir directement les racines x . — Nous aurons donc ici $m = 5$, $a = 13$, et $M = 13313$. Et donnant d'abord au genre k sa valeur la plus simple $k = 2$, nous aurons de plus, pour l'expression élémentaire (88) ou (95), les valeurs... (119')

$$(1^{11})^5 = 4, \quad \text{et} \quad (1^{11})^{10} = 1024.$$

Ainsi, suivant toujours les règles (11) et (13)', d'après les exemples que nous en avons donnés plus haut, nous obtiendrons ici, pour la fonction αleph qui entre dans ces expressions élémentaires (88) ou (95), la valeur . . . (119)''

$$\kappa\left[\frac{13313}{4}, 2\right]^{(1)} = 3328, \quad \text{et} \quad \pi = 2.$$

Et par conséquent, une des expressions générales des racines, en vertu des formules (88) ou (95) en question, sera . . . (120)

$$x = [13.(1024)^i + 13313.i]^{1/2} \times (-3328)^j + 13313.j;$$

expression où i et j sont toujours des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, γ compris zéro. — Or, sans avoir de nouveau égard à la forme, rationnelle ou irrationnelle, de cette expression, elle offre déjà réellement, avec ce premier genre $k=2$, et avec un nombre quelconque μ , une des expressions générales des racines demandées. En effet, sa cinquième puissance sera . . . (120)''

$$x^5 = 13.\{1024.(-3328)^5\}^i + 13313.j \equiv 13.(1)^i + 13313.j,$$

parce que . . . (120)''

$$1024.(-3328)^5 \equiv 1, \quad (\text{mod.} = 13313);$$

et par conséquent, on aura réellement . . . (120)'''

$$x^5 - 13 \equiv 13.\{(1)^i - 1\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 13313).$$

Pour découvrir maintenant la forme rationnelle de la présente expression (120) des racines cherchées, il suffit encore de calculer, à l'aide de la susdite règle (78) ou (96), les résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., de la quantité générale qui, d'après l'expression élémentaire (95), se trouve dans le radical du cinquième degré de cette présente expression (120). Ainsi, suivant toujours les notations (75), (76), et (95)', d'après lesquelles les quantités R_1, S_1 , et T_1 seront ici, par rapport au module $M = 13313$, les résidus dans les congruences . . . (121)

$$(1024)^5 \equiv R_5, \quad (-3328)^5 \equiv S_5, \quad \text{et} \quad 13.(1024)^5 \equiv T_5;$$

nous obtiendrons, pour les résidus en question T_1, T_2, T_3 , etc., au moyen de la susdite règle (78) ou (96), les valeurs progressives . . . (121)'

$T_1 = 13312 \equiv -1,$	$T_4 = 12289 \equiv -1024,$
$T_2 = 3151 \equiv -10162,$	$T_5 = 4878 \equiv -8435,$
$T_3 = 2697 \equiv -10616,$	$T_6 = 5937 \equiv -7376,$
$T_4 = 8760 \equiv -4553,$	$T_7 = 10591 \equiv -2722,$
$T_5 = 8402 \equiv -4911,$	$T_8 = 3450 \equiv -9863,$
etc., etc.	

Et parmi ces résidus, pris ainsi positivement et négativement, les valeurs négatives du premier et du second, savoir, les valeurs $T_1 = -1$, et $T_2 = -1024$, forment déjà des cinquièmes puissances exactes. Ainsi, avec la première de ces valeurs, correspondant à l'indice $\mu = 1$, l'expression générale (120) donnera, pour l'une des racines x de la congruence proposée en dernier lieu (119), la valeur... (122)

$$x = 3328 + 13313.j.$$

En effet, on a réellement... (122')

$$\begin{aligned}(3328)^5 - 13 &= 408\ 240\ 970\ 811\ 834\ 355 = \\ &= 13313 \times 30\ 664\ 836\ 686\ 835.\end{aligned}$$

Quant au second résidu T_2 , dont la valeur $T_2 = -1024$ forme également une cinquième puissance exacte, et nommément la cinquième puissance de (-4) , l'expression générale (120) donnera, pour l'indice correspondant $\mu = 2$, la valeur... (123)

$$x = -4.(-3328)^4 + 13313.j = 3328 + 13313.j'';$$

c'est-à-dire, une valeur identique avec la valeur précédente (122), à cause que, par suite de la congruence (120)'', qui forme la condition fondamentale de l'expression générale (120), on a ici... (123')

$$4.(-3328) \equiv 1, \quad (\text{mod.} = 13313).$$

Pour avoir les autres racines x de la congruence proposée (119), si elle avait réellement des racines différentes, il faudrait continuer les calculs (121)' de la suite des résidus T_3, T_4, T_5 , etc., au delà du résidu T_2 auquel nous y avons arrêté ces calculs; et on le ferait facilement à l'aide de la même règle (78) ou (96), savoir... (124)

$$T_{p+1} = T_p.R = T_p.(1024), \quad (\text{mod.} = 13313);$$

de sorte qu'en formant ici les tarifs des dix premiers multiples du résidu $R = 1024$ et du module $M = 13313$, comme nous l'avons fait sous la marque (108), ces calculs pourraient s'effectuer par la simple addition et soustraction, à l'instar de ceux dont nous avons présenté le type à la marque (110). Quant aux résidus S_1, S_2, S_3 , etc., qui, d'après leurs présentes valeurs (121), entrent également dans l'expression générale (120) qu'il s'agit d'évaluer rationnellement, on calculerait ces résidus, avec la même facilité, suivant la règle (75) ou généralement (75)'', et l'on obtiendrait ainsi, comme sous la marque (109)', la suite progressive de ces résidus, dont voici les premiers... (125)

$$S_1 = -3328, S_2 = -832, S_3 = -208, S_4 = -52, S_5 = -13, \text{ etc.}$$

Enfin, pour la vérification des calculs progressifs (124) des résidus T_1, T_2, T_3 , etc., on aurait ici, d'après la règle (77), d'abord, la valeur de la fonction α qui entre dans cette règle, savoir... (126)

$$N\left[\frac{M}{a}, \omega\right]^{(a-j)} = N\left[\frac{13313}{13}, 2\right]^{(1)} = 1024, \quad \text{et } \omega = 2;$$

et ensuite, le produit normal . . . (126')

$$T_{n+j} \equiv -1024.T_n.T_1, \quad (\text{mod.} = 13313).$$

Or, tous ces calculs, déterminés ainsi avec précision, et éclaircis complètement par les exemples précédents, ne demanderaient plus, pour être effectués, qu'un travail purement mécanique qui n'impliquerait même que l'emploi des simples opérations arithmétiques d'addition et de soustraction. Nous pourrions donc nous en dispenser ici, quand même nous n'aurions pas d'autres motifs de ne pas fuir ces calculs; et nous pourrions ainsi en laisser l'exécution au lecteur, s'il le désirait, pour lui servir d'exercice dans ce nouveau genre de calculs téléologiques. Seulement, pour compléter ce grand et décisif exemple (119), nous ajouterions ici les observations suivantes.

D'abord, il est manifeste que, dans le cas où l'on n'arriverait pas, dans la suite progressive (121)' des résidus T_1, T_2, T_3 , etc., à un résidu T_k identique avec l'un des résidus précédents, on y amènerait nécessairement, à cause de leur différence continue, toutes celles des cinquièmes puissances exactes qui seraient plus petites que le module 13313. Et avec ces puissances exactes, correspondant alors à des indices μ connus, l'expression générale (120) donnerait les racines cherchées x . Bien plus, quand même, après avoir ainsi amené des cinquièmes puissances exactes, on arriverait ensuite à un résidu T_k identique avec l'un des résidus précédents, on pourrait continuer le calcul de la suite de ces résidus (121)' en ne tenant compte que des résidus périodiques qui formeraient ces cinquièmes puissances exactes, et qui, correspondant alors à des indices μ différents, pourraient donner, par l'expression générale (120), de nouvelles et différentes racines cherchées x .

Ensuite, dans le cas où, avant d'avoir ainsi amené des cinquièmes puissances exactes dans la suite (121)' des résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., on arriverait à un tel résidu T_k identique avec l'un des résidus précédents, on n'aurait pas besoin de continuer le calcul de ces résidus T_1, T_2, T_3 , etc., puisque, à partir du résidu T_k , on ne ferait que reproduire périodiquement la suite des mêmes résidus identiques. Mais aussi, par l'absence des cinquièmes puissances exactes, toute cette suite (121)' de résidus deviendrait inutile, en se bornant toujours, comme nous le supposons ici, à celles des cinquièmes puissances exactes qui sont plus petites que le module 13313. Il faudrait donc alors, avec un nouveau genre k , et nommément d'abord avec le genre suivant $k = 3$, déterminer, d'après l'expression élémentaire (88) ou (95), une nouvelle expression générale des racines x pour la congruence proposée (119).

Or, avec cette valeur $k = 3$, on aurait ici, pour l'expression élémentaire (88) ou (95), les valeurs . . . (127)

$$i^{11} = 6, \quad (i^{11})^5 = 36; \quad \text{et pour } M = 13313, \\ (i^{11})^{12} = (i^{11})^{12} = 60\,466\,176 \equiv -1470.$$

De plus, pour la fonction aleph qui entre dans ces expressions (88) ou (95), en suivant toujours les susdites règles (11) et (13)', on obtiendrait ici la valeur . . . (127)

$$N\left[\frac{M}{36}, \pi\right]^{(n-1)} = 1849, \quad \text{et } \pi = 4.$$

On aurait donc, avec ce genre $k = 3$, pour la solution de la congruence proposée (119), la nouvelle expression générale des racines x , savoir . . . (128)

$$x = [13.(-1470)^i + 13313.i]^{\frac{1}{5}} \times (-1849)^j + 13313.j;$$

dans laquelle i et j seraient toujours des nombres entiers quelconques. Et en effet, cette expression, en y faisant abstraction de son état rationnel ou irrationnel, satisferait généralement à la congruence proposée (119), parce que . . . (128')

$$\{(-1470).(-1849)^k\}^5 \equiv (1)^5, \quad (\text{mod.} = 13313).$$

Pour découvrir maintenant la forme rationnelle de cette deuxième expression générale (128), il faudrait de nouveau, à l'aide de la règle (78) ou (96), calculer les résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., de la quantité générale qui se trouve dans le radical du cinquième degré de cette expression (128). Et alors; suivant les notations (75), (76), et (95)', d'après lesquelles les quantités R_s, S_s , et T_s seraient ici, par rapport au module en question, les résidus dans les congruences . . . (129)

$(-1470)^5 \equiv R_s, \quad (-1849)^5 \equiv S_s, \quad \text{et } 13.(-1470)^5 \equiv T_s;$
on obtiendrait, pour la suite des résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., en question, les valeurs . . . (129')

$$\begin{array}{ll} T_1 = 7516 \equiv -5797, & T_2 = 1270 \equiv -12043, \\ T_3 = 10233 \equiv -3080, & T_4 = 1180 \equiv -12133, \\ T_5 = 9403 \equiv -3910, & T_6 = 9797 \equiv -3516, \\ T_7 = 3076 \equiv -10237, & T_8 = 4700 \equiv -8613, \\ T_9 = 447 \equiv -12866, & T_{10} = 8560 \equiv -4753, \\ \text{etc., etc.} \end{array}$$

et pour les résidus correspondants S_1, S_2, S_3 , etc., calculés d'après la règle (75)' ou généralement (75)'', on obtiendrait les valeurs . . . (129)''

$$\begin{array}{lll} S_1 = -1849, & S_2 = -2640, & S_3 = -4511, \\ S_4 = -6412, & S_5 = -6095, & \text{etc., etc.} \end{array}$$

Et comme, parmi ces dix premiers résidus (129)' que nous venons de calculer, il ne se trouve pas encore des cinquièmes puissances exactes, il faudrait

continuer le calcul de cette suite (129) des résidus T_1, T_2, T_3 , etc., jusqu'à ce que l'on parvienne à une cinquième puissance exacte, ou bien jusqu'à ce que, avant d'arriver à une telle puissance, on parvienne à un résidu T_i identique avec l'un des résidus précédents. Et dans ce dernier cas, il faudrait de nouveau, avec une autre valeur du genre k , et ommémment avec sa valeur suivante $k = 4$, déterminer, d'après l'expression élémentaire (88) ou (95), une nouvelle expression générale des racines cherchées x pour la congruence proposée (119).

Or, avec cette valeur $k = 4$, on aurait ici, pour l'expression élémentaire (88) ou (95), les valeurs . . . (130)

$$1^{(1)} = 24, \quad (1^{(1)})^2 = 576; \quad \text{et pour } M = 13313,$$

$$(1^{(1)})^3 = (1^{(1)})^4 = (7962624)^2 = (-2518)^2 = -954.$$

De plus, pour la fonction α qui entre dans ces expressions (88) ou (95), en suivant toujours les règles (11) et (13)', on obtiendrait ici la valeur . . . (130')

$$N\left[\frac{M}{576}, \pi\right]^{(1-1)} = 5940, \quad \text{et } \pi = 6.$$

Donc, pour ce genre $k = 4$, on aurait, pour la solution de la congruence proposée (119), c'est-à-dire, pour ses racines cherchées x , la nouvelle expression générale . . . (131)

$$x = [13.(-954)^2 + 13313.i]^{\frac{1}{2}} \times (-5940)^2 + 13313.j.$$

En effet, cette expression, en y faisant abstraction de son état rationnel ou irrationnel, satisfait encore généralement à la congruence proposée (119), parce que . . . (131')

$$\{(-954).(-5940)^2\}^2 \equiv (1)^2, \quad (\text{mod.} = 13313).$$

Et pour découvrir maintenant la forme rationnelle de cette troisième expression générale (131), il faudrait encore, à l'aide de la règle (78) ou (96), calculer la suite des résidus T_1, T_2, T_3 , etc., de la quantité générale qui se trouve sous le radical du cinquième degré dans cette présente expression (131). Ainsi, suivant toujours les notations (75), (76), et (95)', d'après lesquelles les quantités R_p, S_p , et T_p seraient ici, par rapport au module 13313, les résidus dans les congruences . . . (132)

$(-954)^2 \equiv R_p, \quad (-5940)^2 \equiv S_p, \quad \text{et } 13.(-954)^2 \equiv T_p;$
on obtiendrait, pour la suite des résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., en question, les valeurs . . . (132')

$$\begin{array}{ll} T_1 = 911 \equiv -12402, & T_2 = 9564 \equiv -3749, \\ T_3 = 8662 \equiv -4651, & T_4 = 3825 \equiv -9488, \\ T_5 = 12025 \equiv -1288, & T_6 = 3956 \equiv -9357, \\ T_7 = 6868 \equiv -6445, & T_8 = 11237 \equiv -2076, \\ T_9 = 10180 \equiv -3133, & T_{10} = 6770 \equiv -6543, \\ \text{etc., etc.;} \end{array}$$

et pour les résidus correspondants S_1, S_2, S_3 , etc., calculés avec la règle (75)' ou généralement (75)'', on obtiendrait les valeurs . . . (132)''

$$\begin{array}{lll} S_1 = -5940, & S_2 = +4150, & S_3 = +4676, \\ S_4 = -4522, & S_5 = -4954, & \text{etc., etc.} \end{array}$$

Or, parmi les dix premiers résidus (132)' que nous venons de calculer, il ne se trouve non plus aucune cinquième puissance exacte; et il faudrait de nouveau poursuivre le calcul de ces résidus T_1, T_2, T_3 , etc., jusqu'à ce que l'on parvienne à ces puissances exactes, ou bien jusqu'à ce que, avant d'atteindre une telle puissance, on parvienne à un résidu T_1 identique avec l'un des résidus précédents. Et dans ce dernier cas, où l'expression générale (131) ne saurait faire découvrir les racines cherchées, lorsque, comme nous le supposons toujours, on se bornerait à celles des cinquièmes puissances exactes qui seraient plus petites que le module, il faudrait, avec la valeur suivante $k = 5$ du genre k , déterminer, d'après les expressions élémentaires (88) ou (95), une nouvelle expression générale des racines x pour la congruence proposée (119); et il faudrait déduire ces racines x de cette nouvelle expression générale, correspondant à $k = 5$, en suivant les procédés que nous avons indiqués pour les précédentes expressions générales (120), (128) et (131), correspondant aux valeurs progressives $k = 2, k = 3$, et $k = 4$ du genre k .

Mais, presque généralement cette détermination d'une ultérieure expression générale serait superflue, quand on aurait déjà les trois expressions (120), (128) et (131) qui, lors même qu'elles conduiraient toutes à des résidus périodiques, suffiraient, par leur combinaison dans l'expression systématique (99), pour donner des résidus formant des puissances exactes dans le radical de cette expression finale (99). Bien plus, les deux premières expressions générales (120) et (128) suffiraient déjà, dans la plupart des cas, pour arriver ainsi, par leur combinaison dans l'expression systématique (99), à de tels résultats utiles et définitifs.

Ainsi, dans notre cas présent, si nous désignons généralement par $(Tk)_{\mu}$ et $(Qk)_{\mu}$ les quantités T et Q qui entrent dans l'expression systématique (99), en denotant de cette manière par l'indice k la valeur du genre k à laquelle correspondent ces quantités T et Q , nous aurions évidemment, d'abord, pour les quantités $(T2)_{\mu}, (T3)_{\mu}, (T4)_{\mu}$, les valeurs respectives que nous avons calculées sous les marques (121)', (129)', (132)', et ensuite, d'après leur détermination générale (87), pour les quantités $(Q2)_{\mu}, (Q3)_{\mu}, (Q4)_{\mu}$, les valeurs respectives (119)'', (127)', (130)', savoir . . . (133)

$(Q2)_{\mu} = (-3328)_{\mu}^2, (Q3)_{\mu} = (-1849)_{\mu}^3, (Q4)_{\mu} = (-5940)_{\mu}^4$; les nombres μ_2, μ_3, μ_4 , qui correspondent respectivement aux mêmes indices généraux μ , étant arbitrairement des nombres quelconques, entiers et positifs, y compris zéro. Et alors, en n'employant d'abord que les deux éléments $(T2)_{\mu}$

et $(T3)_{11}$, l'expression systématique (99) donnerait ici, pour les racines x de la congruence proposée (119), une première expression systématique . . . (134)

$$x = \left[-1024.(T2)_{11}.(T3)_{11} + 13313.i \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\{ (-3328)^{11} . (-1849)^{11} \right\} + 13313.j;$$

en observant que la fonction aleph qui entre dans le radical de cette expression systématique (99), recevrait ici, pour $p = 2$, la valeur . . . (134')

$$N \left[\frac{M}{a}, \varpi \right]^{(p-1)} = 1024, \quad \text{et} \quad \varpi = 2.$$

Ainsi, en combinant chacune des valeurs de $(T2)_{11}$, telles qu'elles sont calculées sous la marque $(121)'$, avec chacune des valeurs de $(T3)_{11}$, telles qu'elles sont calculées sous la marque $(129)'$, on obtiendrait déjà cent résultats différents avec les seules dix valeurs respectives $(121)'$ et $(129)'$. Et formant des tarifs des dix premiers multiples de chacune de ces valeurs de $(T2)_{11}$ ou $(T3)_{11}$, multipliée par leur facteur 1024, on obtiendrait, comme plus haut, par la simple addition et soustraction, ces cent résultats différents qui serviraient à amener des cinquièmes puissances exactes et propres à rendre rationnelle cette première expression systématique.

Employant ensuite les trois éléments $(T2)_{11}$, $(T3)_{11}$, et $(T4)_{11}$, l'expression systématique et générale (99) donnerait ici, pour les racines x de la congruence proposée (119), une deuxième expression systématique . . . (135)

$$x = \left[-3151.(T2)_{11}.(T3)_{11}.(T4)_{11} + 13313.i \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\{ (-3328)^{11} . (-1849)^{11} . (-5940)^{11} \right\} + 13313.j;$$

en observant que la fonction aleph qui entre dans le radical de l'expression générale (99), recevrait ici, pour $p = 3$, la valeur . . . (135')

$$N \left[\frac{M}{a}, \varpi \right]^{(p-1)} = 3151, \quad \text{et} \quad \varpi = 6.$$

Ainsi, en combinant chacune des valeurs des combinaisons précédentes $(T2)_{11}$, $(T3)_{11}$, avec chacune des valeurs de $(T4)_{11}$, telles qu'elles sont calculées sous la marque $(132)'$, on obtiendrait mille résultats différents avec les seules dix valeurs respectives $(121)'$, $(129)'$ et $(132)'$. Et ces mille résultats différents seraient, dans tous les cas, plus que suffisants pour la solution de la congruence proposée (119), sans qu'il soit nécessaire de déterminer ultérieurement de nouvelles expressions élémentaires de racines x , correspondant aux valeurs ultérieures du genre k .

Mais, tous ces calculs que nous venons d'indiquer depuis la marque $(124)'$, après avoir découvert la racine x sous la marque (122) par la première ex-

pression élémentaire (120), deviendraient ici tout à fait inutiles pour la solution complète de la congruence (119) proposée au dernier lieu; car, et nous devons le dire enfin, cette congruence proposée (119) n'a qu'une seule racine réelle ou rationnelle, et nommément la racine (122) que nous avons découverte immédiatement par la première expression générale (120). — Profitant du dernier exemple (119), qui est grand et décisif, nous n'avons ici indiqué les différents calculs, tels que nous venons de les exposer depuis la marque (124), que pour présenter un exemple complet de tous les procédés qu'il faudrait employer pour la solution de cette congruence (119) si elle avait réellement des racines rationnelles et différentes, afin d'avoir ainsi un tel exemple complet de la solution générale de toutes les congruences, de quelque degré qu'elles puissent être.

Quant aux conditions qui fixent le nombre des racines réelles ou rationnelles dans toute congruence quelconque (14), dont la formation est régie par la loi téléologique (15), nous les ferons connaître dans notre traité de la Théorie des Nombres qui, d'après ce que nous avons annoncé dans le Programme précédent, doit former le neuvième des ouvrages présents. Toutefois, nous pouvons déjà prévenir ici que le principe théorique de ces conditions se trouve dans la première des générations téléologiques (15), dans celle qui préside à la formation du résidu a de la congruence générale (14). En effet, suivant la notation (30) pour les parties constitutives de cette première génération téléologique (15), si l'on fait de plus . . . (136)

$$H = A.(1^m)^* + (-1)^{i+1}, \quad \text{c'est-à-dire, } H^* = \mathbb{Z},$$

la congruence (31) qui forme cette première génération (15), sera . . . (136')

$$(-1)^m . a + N.H^* \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M).$$

Et si, dans la solution (32) de cette congruence, on suppose que, par le nombre arbitraire i pris convenablement, on forme du second membre de cette expression (32) une puissance exacte du degré m d'un nombre déterminé R , on aura, pour l'une des déterminations de $\mathbb{Z}$, la valeur . . . (136'')

$$\mathbb{Z} = R^*;$$

et la congruence générale (31) se trouvera réalisée par le nombre R dans l'expression . . . (136''')

$$(-1)^m . a + N.R^* \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M).$$

Or, en retranchant cette congruence particulière (136''') de la congruence générale (136'), on obtiendra, pour la génération du même résidu a , la congruence de condition . . . (137)

$$H^* - R^* \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M).$$

Ainsi, lorsque d'abord l'exposant m sera un nombre impair, la racine R

n'aura qu'une seule valeur; et cette congruence de condition (137) se réduira à la forme . . . (137')

$$(H - R) \{ H^{n-1} + A_1 H^{n-2} + A_2 H^{n-3} \dots + A_n H^0 \} \equiv 0,$$

c'est-à-dire, à la forme simple . . . (137'')

$$H^{n-1} + A_1 H^{n-2} + A_2 H^{n-3} \dots + A_n H^0 \equiv 0, \quad (\text{mod. } = M);$$

les coefficients A_1, A_2, A_3 , etc., étant ceux qui résultent de cette décomposition du premier membre de la congruence (137). Donc, en considérant l'équation . . . (138)

$$H^{n-1} + A_1 H^{n-2} + A_2 H^{n-3} \dots + A_n H^0 = 0,$$

et la relation (136) qui existe entre les racines H de cette équation et les espèces A qui entrent dans la formation (13) du même résidu a , on comprendra, par analogie, que de même que, dans cette équation (138), il peut y avoir des racines H idéales (imaginaires), il peut y avoir également, dans la congruence (137''), des racines H impossibles; comme nous le verrons d'ailleurs positivement lorsque, ci-après, nous traiterons de la résolution de telles congruences composées (137''').

Ensuite, lorsque l'exposant m dans la congruence de condition (137) est un nombre pair, la racine R aura les deux valeurs $+R$ et $-R$; et cette congruence de condition se réduira alors à la forme . . . (139)

$$(H^2 - R^2) \{ H^{n-2} + B_1 H^{n-4} + B_2 H^{n-6} \dots + B_m H^0 \} \equiv 0,$$

c'est-à-dire, à la forme simple . . . (139')

$$H^{n-2} + B_1 H^{n-4} + B_2 H^{n-6} \dots + B_m H^0 \equiv 0, \quad (\text{mod. } = M);$$

les coefficients B_1, B_2, B_3 , etc., résultant ici de la présente décomposition du premier membre de la congruence de condition (137). Donc, par suite des mêmes raisons précédentes, en considérant l'équation . . . (140)

$$H^{n-2} + B_1 H^{n-4} + B_2 H^{n-6} \dots + B_m H^0 = 0,$$

on comprendra de nouveau, par analogie, que de même que, dans cette équation (140), il peut y avoir des racines H idéales (imaginaires), il peut y avoir également, dans la congruence (139'), des racines H impossibles. Et par conséquent, en vertu de la seconde de nos générations téléologiques (15), il y aura autant de moins de racines réelles ou rationnelles dans la congruence (14).

Mais, quelque précise que soit cette détermination théorique des conditions qui fixent, dans les congruences (14), le nombre de racines réelles ou rationnelles, il est plus facile de déterminer pratiquement ce nombre par nos présents calculs téléologiques qui servent à découvrir ces racines rationnelles

des congruences en question. En effet, il suffit, par le procédé très-simple que nous allons indiquer, de constater l'identité des racines dans leurs différentes expressions élémentaires, correspondant aux différentes valeurs progressives du genre k ; car, plus il y aura ainsi de racines identiques, pour le premier indice général μ , c'est-à-dire, pour $\mu = 1$, et moins sera grande la probabilité de ce que, dans la congruence proposée, il existe des racines rationnelles différentes. — Ainsi, dans notre dernière congruence proposée (119), il suffit de constater que les différentes expressions élémentaires (120), (128), (131), etc., correspondant aux valeurs progressives $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$, etc., du genre k , donnent toutes, pour le premier indice général μ , c'est-à-dire, pour $\mu = 1$, la même racine x , et notamment la racine $x = 3328$ que donne ici immédiatement, sous la marque (122), la première (120) de ces expressions élémentaires (120), (128), (131), etc. Et le procédé pour constater cette identité de la racine est éminemment simple, comme nous allons le voir en général sur l'expression élémentaire et générale (88) ou (95). En effet, supposant que la racine x qu'il s'agit ainsi de constater dans l'expression (88) ou (95) pour l'indice $\mu = 1$, soit $x = r$, si l'on considère comme inconnue la quantité radicale de cette expression élémentaire, en désignant cette inconnue par ξ , c'est-à-dire, en faisant . . . (141)

$$\xi = [a.(1^{1/\mu})^m + M]^{1/\mu},$$

nous aurons, en vertu de l'expression générale (88) en question, la congruence simple du premier ordre . . . (141)'

$$\xi.Q - r \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

en donnant toujours, d'après (87), à la quantité Q , la valeur . . . (141)''

$$Q = (-1)^{m+1}.N \left[\frac{M}{(1^{1/\mu})^m} \right]^{m-1}.$$

Et par le moyen de la formule (27), on obtiendra facilement, dans cette présente congruence (141)', la valeur de l'inconnue ξ , savoir . . . (141)'''

$$\xi = (-1)^{m+1}.r.N \left[\frac{M}{Q} \right]^{m-1} + M.$$

On aura donc . . . (142)

$$\xi^m = a.(1^{1/\mu})^m + M;$$

et par conséquent, en vertu de la relation générale (95), on devrait avoir . . . (142)'

$$\xi^m \equiv T, \quad (\text{mod.} = M).$$

Ainsi, connaissant la valeur de T , si cette valeur forme réellement le résidu dans la dernière congruence (142)', l'expression élémentaire (88) ou (95) donnera effectivement, avec l'indice $\mu = 1$, pour la racine x de la congruence (85) à laquelle elle se rapporte, la valeur r dont il s'agit de constater l'identité.

Or, en appliquant ce procédé à notre présent exemple (119), et spécialement aux expressions élémentaires progressives (120), (128), (131), etc., des racines x de cette congruence (119), pour y constater l'identité de la racine $x = 3328$, correspondant à l'indice $\mu = 1$, nous obtiendrons les résultats suivants. — D'abord, pour ce qui concerne la première (120) de ces expressions élémentaires, correspondant au genre $k = 2$, elle donne immédiatement, avec l'indice $\mu = 1$, cette racine $x = 3328$ en question; de sorte que, dans le cas présent, il ne reste aucune opération à faire sur cette première expression élémentaire (120). — Pour ce qui concerne ensuite la deuxième expression (128), correspondant à la valeur $k = 3$ du genre k , elle donnera, d'après la présente congruence générale (141)', la congruence particulière du premier ordre . . . (143)

$$\xi \cdot (-1849) - 3328 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 13313);$$

dont l'inconnue ξ , calculée par la formule (141)''', sera . . . (143')

$$\xi = -9 + 13313.f.$$

On aurait donc . . . (143)''

$$\xi = -59049 \equiv -5797, \quad (\text{mod.} = 13313);$$

et par conséquent . . . (143)''' $T_1 = -5797.$

Et telle est effectivement, comme on le voit à la marque (129)', la valeur de ce premier résidu T_1 . Donc, avec l'indice $\mu = 1$, la deuxième expression élémentaire (128) donne effectivement la racine $x = 3328$ qu'il s'agissait de constater. — Enfin, pour ce qui concerne la troisième expression élémentaire (131), correspondant à la valeur $k = 4$ du genre k , elle donnera, d'après la présente congruence générale (141)', la congruence particulière du premier ordre . . . (144)

$$\xi \cdot (-5940) - 3328 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 13313);$$

dont l'inconnue ξ , calculée par la formule (141)''', sera . . . (144')

$$\xi = -144 + 13313.f.$$

On aurait donc . . . (144)''

$$\xi = -(144)^2 \equiv +911, \quad (\text{mod.} = 13313);$$

et par conséquent . . . (144)''' $T_1 = +911.$

Et telle est ici effectivement, comme on le voit à la marque (132)', la valeur de ce premier résidu T_1 . Donc, toujours avec l'indice $\mu = 1$, la troisième expression élémentaire (131) donnerait encore effectivement la racine $x = 3328$ qu'il s'agissait de constater.

Ainsi, les trois expressions élémentaires (120), (128), (131) donnent constamment, avec le même premier indice $\mu = 1$, la même racine $x = 3328$.

Et par conséquent, en supposant qu'il y ait, pour la congruence proposée (119), cinq racines x différentes, la probabilité de cette triple reproduction de la même racine $x = 3328$ serait notoirement $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$; probabilité qui suffirait déjà pour ne pas se livrer, sans une nécessité absolue, à la recherche de ces cinq hypothétiques racines différentes. Mais, lors même que, dans la congruence proposée (119), il n'y aurait que trois racines différentes, car, d'après la condition théorique (137)', il ne saurait y en avoir que une, ou trois, ou cinq, la probabilité de la triple reproduction de la même racine $x = 3328$ serait déjà $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, et elle suffirait également, dans des cas ordinaires, pour ne pas chercher inutilement les deux autres racines hypothétiques. Dans un cas extraordinaire, où l'on aurait besoin d'une plus grande certitude, il suffirait de déterminer ultérieurement une ou plusieurs des expressions élémentaires (88) ou (95), correspondant aux valeurs ultérieures $k = 5$, $k = 6$, etc., du genre k , et d'y constater également, pour le premier indice $\mu = 1$, la racine identique en question. Ainsi, dans notre dernier exemple (119), en suivant toujours les procédés par lesquels nous avons obtenu plus haut, pour les racines x de cette congruence (119) du cinquième degré, les trois premières expressions élémentaires (120), (128) et (131), on obtiendrait facilement, pour ces racines x , la quatrième expression élémentaire, correspondant à la valeur $k = 5$ du genre k , savoir . . . (145)

$$x = [13.(4524)^5 + 13313.i]^{\frac{1}{5}}.(2425)^5 + 13313.f;$$

expression où, pour l'indice $\mu = 1$, le résidu T , de la quantité qui est sous le radical, serait . . . (145')

$$T_1 = 5560 \equiv -7753.$$

Or, cette quatrième expression élémentaire (145), pour pouvoir y constater la racine en question $x = 3328$ avec l'indice $\mu = 1$, donnerait ici, d'après la susdite congruence générale (141)', la congruence particulière du premier degré . . . (146)

$$\xi.(2425) - 3328 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 13313);$$

dont l'inconnue ξ , calculée par la formule (141)'', serait . . . (146')

$$\xi = 3328 \times 1087 = -3600 + 13313.f.$$

On aurait donc . . . (146'')

$$\xi^5 = -(3600)^5 \equiv -7753, \quad (\text{mod.} = 13313);$$

et par conséquent, en vertu de la relation (142)', on aurait . . . (146''')

$$T_1 = -7753.$$

Et telle est effectivement la valeur (145') de ce premier résidu T . Donc, tou-

jours avec l'indice $\mu = 1$, la quatrième expression élémentaire (145) donne encore la même racine $x = 3328$ qu'il s'agissait de constater. Et alors, la probabilité de ce qu'il y ait trois racines différentes dans la congruence proposée (119), ne serait plus que $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$, c'est-à-dire que, sur 81 congruences pareilles (119) du cinquième degré, où les quatre premières expressions élémentaires (88) ou (95) des racines x de ces congruences donneraient constamment, pour le même premier indice $\mu = 1$, la même racine x , il n'y aurait qu'une seule de ces 81 congruences qui aurait trois racines différentes. Aussi, est-ce sur cette très-petite probabilité que nous nous fondons ici, en supposant que la congruence (119), proposée pour notre dernier exemple, n'a qu'une seule racine rationnelle, et nommément la racine $x = 3328$ que nous avons découverte immédiatement, sous la marque (122), par la première expression élémentaire (120) des racines de cette congruence (119), en nous dispensant ainsi, par cette très-petite probabilité, de recourir ici aux susdites conditions théoriques (137)' et (139)' qui, à la vérité, nous auraient donné une certitude absolue, mais dont l'évaluation aurait exigé des calculs beaucoup plus considérables.

Nous terminons ainsi les exemples de tous les cas qui peuvent se présenter dans la résolution des congruences fondamentales (14) ou (85) de tous les degrés. Et il ne nous reste qu'à indiquer un moyen très-simple pour abrégier indéfiniment les calculs, déjà peu considérables, qu'exige cette solution directe et absolue des congruences fondamentales (14) ou (85) dont il s'agit. — Nous allons le faire.

Jusqu'ici, dans la suite des résidus T_1, T_2, T_3 , etc., qui, pour la solution en question de la congruence fondamentale (85), sont déterminés généralement par la congruence auxiliaire (95)', et calculés progressivement par les règles (78) ou (96); nous n'avons employé, pour l'expression élémentaire (95), que ceux de ces résidus T_1, T_2, T_3 , etc., qui étaient déjà eux-mêmes des puissances exactes du degré m de la congruence proposée (85). Ce sont là en effet celles des valeurs des résidus T_1, T_2, T_3 , etc., qui donnent immédiatement, par elles-mêmes, la solution rationnelle de l'expression élémentaire (95) ou de l'expression systématique (99) des racines cherchées x . Et par conséquent, c'est dans cette limite des valeurs des résidus T_1, T_2, T_3 , etc. en question, que se trouve proprement la méthode absolue pour la solution des congruences fondamentales (85) dont il s'agit. — Mais, en considérant que les valeurs de ces résidus T_1, T_2, T_3 , etc., sont toujours plus petites que le module M , on voit que, dans cette limite fixée ainsi par le module M , il n'existe toujours qu'un très-petit nombre de puissances exactes d'un degré quelconque m , surtout lorsque ce degré m est grand. Et l'on conçoit alors que, pour amener de telles puissances exactes, il faudrait souvent calculer un grand nombre de résidus T_1, T_2, T_3 ,

etc., spécialement lorsque le module M ne forme pas un grand nombre et lorsqu'au contraire le degré m de la congruence proposée (85) est grand. Il importe donc essentiellement de dépasser cette limite absolue et très-resserrée, telle qu'elle est fixée par le module M , et dans laquelle seule les résidus $T_1, T_2, T_3, \dots$, pouvaient ainsi, en formant des puissances exactes du degré m , devenir immédiatement utiles pour la solution en question des congruences fondamentales (85).

Or, rien n'est plus facile. Il suffit, en effet, au delà de cette limite fixée par le module M , de prendre, par rapport à ce module, les résidus des puissances du degré en question m , pour la suite des nombres naturels dont les puissances de ce degré m dépassent cette limite absolue, c'est-à-dire, la valeur du module M . Et en général, si l'on désigne par N un nombre quelconque de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, etc., et si l'on désigne par N_m le résidu de la puissance N^m de ce nombre, en prenant ce résidu par rapport au module M , c'est-à-dire, si l'on fait . . . (147)

$$N^m \equiv N_m, \quad (\text{mod. } \equiv M),$$

il suffira de calculer ces résidus N_m pour les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, etc., aussi loin qu'on le voudra, et ces résidus N_m , savoir . . . (147)'

$$1_m, 2_m, 3_m, 4_m, 5_m, 6_m, 7_m, \text{ etc.},$$

formeront manifestement les nombres qu'il faudra comparer aux susdits résidus $T_1, T_2, T_3, \dots$, etc., pour pouvoir conclure, de ces derniers résidus de solution, les puissances exactes du degré m auxquelles répondent ces résidus $T_1, T_2, T_3, \dots$, etc. Et comme le nombre des résidus comparatifs (147)' des puissances des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, etc., peut, à volonté, être aussi grand qu'on le jugera convenable, on aura ainsi, pour l'appréciation des résidus progressifs $T_1, T_2, T_3, \dots$, etc., tel nombre (147)' de termes de comparaison que l'on voudra; ce qui limitera proportionnellement le nombre des résidus $T_1, T_2, T_3, \dots$, etc., dont on aura besoin pour arriver, par l'expression élémentaire (95) ou par l'expression systématique (99), à la solution des congruences fondamentales (85).

Quant au calcul de ces résidus comparatifs (147)', d'après leur congruence générale (147), il est manifeste qu'en formant le tarif des dix premiers multiples du module M , comme on doit toujours le former pour le susdit calcul rapide des résidus $T_1, T_2, T_3, \dots$, etc. de solution, on pourra calculer les résidus comparatifs (147)' par la simple opération d'une soustraction continue, appliquée aux puissances du degré m des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, etc. Il suffira donc d'avoir une table des puissances de ces nombres naturels pour pouvoir, avec une grande facilité, calculer rapidement, pour tout module donné M , cette suite (147)' des résidus comparatifs en question, en prolongeant cette suite (147)' aussi loin qu'on le voudra, dans les limites de cette table de puissances. A cette fin, nous joignons ici une telle table de

puissances, jusqu'aux sixièmes puissances inclusivement, pour tous les nombres naturels depuis $N = 1$ jusqu'à $N = 100$. Cette table, due aux soins de M. Lazare Augé, qui l'a calculée expressément et qui répond de son exactitude, sera plus que suffisante pour presque tous les calculs ordinaires, et pourra, à cause de son exactitude, servir de commencement au calcul des tables plus étendues. — La voici . . . (148)

TABLE DES PUISSANCES.

N	N ²	N ³	N ⁴	N ⁵	N ⁶
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000
11	121	1331	14641	161051	1771561
12	144	1728	20736	248832	2985984
13	169	2197	28561	371293	4826809
14	196	2744	38416	537824	7529536
15	225	3375	50625	759375	11390625
16	256	4096	65536	1048576	16777216
17	289	4913	83521	1419857	24137569
18	324	5832	104976	1880568	34012224
19	361	6859	130321	2476099	47045881
20	400	8000	160000	3200000	64000000
21	441	9261	194481	4084101	85766121
22	484	10648	234256	5153632	113379904
23	529	12167	279841	6436343	148035889
24	576	13824	331776	7961624	191102976
25	625	15625	390625	9765625	244140625
26	676	17576	456976	11881376	308915776
27	729	19683	531441	14348907	387420489
28	784	21952	614656	17210368	481890304
29	841	24389	707281	20511149	594823321
30	900	27000	810000	24300000	729000000

N	N ¹	N ²	N ³	N ⁴	N ⁵
31	961	29791	923521	28629151	887503681
32	1024	32768	1048576	33554432	1073741824
33	1089	35937	1185921	39135393	1291467969
34	1156	39304	1336336	45435424	1544804416
35	1225	42875	1500625	52521875	1838265625
36	1296	46656	1679616	60466176	2176782336
37	1369	50653	1874161	69343957	2565726409
38	1444	54872	2085136	79235168	3010936384
39	1521	59319	2313441	90224199	3518743761
40	1600	64000	2560000	102400000	4096000000
41	1681	68921	2825761	115856201	4750104241
42	1764	74088	3111696	130691232	5489031744
43	1849	79507	3418801	147008443	6321363049
44	1936	85184	3748096	164916224	7256313856
45	2025	91125	4100625	184528125	8303765625
46	2116	97336	4477456	205962976	9474296896
47	2209	103823	4879681	229346007	10779215329
48	2304	110592	5308416	2548039968	12230590464
49	2401	117649	5764801	282475249	13841287201
50	2500	125000	6250000	312500000	15625000000
51	2601	132651	6765201	345022251	17596287801
52	2704	140608	7311616	380204032	19770609664
53	2809	148877	7890481	418195493	22164361129
54	2916	157464	8503056	459165024	24794911296
55	3025	166375	9150625	503284375	27680640625
56	3136	175616	9834496	550731776	30840979456
57	3249	185193	1055601	601692057	34296447249
58	3364	195112	11316496	656356768	38088692544
59	3481	205379	12117361	714924299	42180533641
60	3600	216000	12960000	777600000	46656000000
61	3721	226981	13845841	844596301	51520374361
62	3844	238228	14776336	916132832	56800235584
63	3969	250047	15752961	9922436543	62522502209
64	4096	262444	16777216	1073741824	68719476736
65	4225	274625	17850625	1160290625	75418890625
66	4356	287496	18974736	1252232576	82653950016
67	4489	300763	20151121	1350125107	90458382169
68	4624	314432	21381376	1453933568	98867482624
69	4761	328509	22667121	1564031349	107918163081
70	4900	343000	24010000	1680700000	117649000000

N	N ²	N ³	N ⁴	N ⁵	N ⁶
71	5041	357911	25411681	1804229351	128100283921
72	5184	373248	26873856	19346917632	139314069504
73	5329	389017	28398241	2073071593	151334226289
74	5476	405224	29986576	2219006624	164206490176
75	5625	421875	31640625	2373046875	177978515625
76	5776	438976	33362176	2535525376	192699928576
77	5929	456533	35153041	2706784157	208422380089
78	6084	474552	37015056	2887174368	225109600704
79	6241	493039	38950081	3077056399	243087455521
80	6400	512000	40960000	3276800000	262144000000
81	6561	531441	43046721	3486784401	282429536481
82	6724	551368	45212176	3707398432	304006671424
83	6889	571787	47458321	3939040643	326940373369
84	7056	592704	49787136	4182119424	351298031616
85	7225	614125	52200625	4437053125	377149515625
86	7396	636056	54700816	4704270176	404567235136
87	7569	658503	57289761	4984209207	433626201009
88	7744	681472	59969536	5277319168	464404086784
89	7921	704969	62742241	5584059449	496998129061
90	8100	729000	65610000	5904900000	531441000000
91	8281	753571	68574961	6240321451	567869252041
92	8464	778688	71639296	6590815232	606355001344
93	8649	804357	74805201	6956883693	646909183449
94	8836	830584	78074896	7339040224	6898691781056
95	9025	857375	81450625	7737809375	735091890625
96	9216	884736	84934656	8153726976	782757786996
97	9409	912673	88529281	8587340257	832972004929
98	9604	941192	92236816	9039207968	885842380864
99	9801	970299	96059601	9509900499	941480149401
100	10000	1000000	100000000	10000000000	1000000000000

Appliquons maintenant à nos précédents exemples cette *méthode des résidus comparés*, comme on pourrait la nommer, mais que, par opposition à la *méthode absolue* dont nous venons de nous servir dans ces exemples, nous nommons *méthode relative ou indéfinie*, par la raison que, dans cette méthode, la limite de la suite (142) des résidus comparatifs demeure indéfinie.

Or, en reprenant d'abord l'exemple (105) de la congruence du troisième

degré, savoir . . . (149)

$$x^1 \equiv 83, \quad (\text{mod.} = 1291)$$

nous obtiendrons facilement, avec la table précédente (148), et à l'aide du tarif (108) du module $M = 1291$, par la simple opération de la soustraction, la suite des vingt premiers résidus comparatifs que voici . . . (149)

$$\begin{aligned} 1^1 &\equiv 1, & 2^1 &\equiv 8, & 3^1 &\equiv 27, & 4^1 &\equiv 64, & 5^1 &\equiv 125, & 6^1 &\equiv 216, \\ 7^1 &\equiv 343, & 8^1 &\equiv 512, & 9^1 &\equiv 729, & 10^1 &\equiv 1000, & 11^1 &\equiv 40, \\ 12^1 &\equiv 437, & 13^1 &\equiv 906, & 14^1 &\equiv 162, & 15^1 &\equiv 793, & 16^1 &\equiv 223, \\ 17^1 &\equiv 1040, & 18^1 &\equiv 668, & 19^1 &\equiv 404, & 20^1 &\equiv 254, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Et ces vingt résidus seront plus que suffisants pour la solution de cette congruence proposée du troisième degré. En effet, comparant ces résidus de puissances avec les résidus de solution T_1, T_2, T_3 , etc., que nous avons calculés à la marque (108)', nous trouvons immédiatement, en outre du résidu $T_1 \equiv 729$ qui forme le cube exact de 9 et dont nous nous sommes servi pour la détermination de la racine (107)', le résidu . . . (149)'

$$T_{11} \equiv -793 \equiv (-15)^3,$$

resultant du cube exact de (-15) , et correspondant à l'indice $\mu = 13$. Ainsi, ayant, par suite de (109)', la valeur . . . (149)''

$$S_{11} \equiv S_{11}.S. \equiv 481 \times 323 \equiv 443;$$

nous obtiendrons, en vertu de l'expression générale (106), pour la seconde racine de la congruence (149), la valeur . . . (150)

$$x \equiv (-15).443 \equiv 1101 + 1191.j,$$

qui est la valeur (112)'' de la troisième racine de cette congruence (149). Il suffirait donc, par la présente méthode indéfinie, de calculer seulement treize des résidus de solution T_1, T_2, T_3 , etc., pour avoir deux racines, tandis que, par la méthode absolue, il a fallu en calculer trente-quatre. — Quant à la troisième racine, on l'obtiendrait ici également, d'une manière immédiate, avec les deux racines connues 101 et 1101, par le théorème général (80)'. En effet, on aurait ainsi la congruence du premier degré . . . (151)

$$101.1101.x \equiv 83, \quad (\text{mod.} = 1291).$$

c'est-à-dire,

$$175.x \equiv 83;$$

et par l'expression (27), on trouverait . . . (151)'

$$x \equiv -83 \times 450 \equiv 89 + 1291.j.$$

Et reprenant ensuite l'exemple (114) de la congruence du quatrième degré, savoir . . . (152)

$$x^4 \equiv 42, \quad (\text{mod.} = 61),$$

nous obtiendrons de nouveau facilement, avec la table précédente (148), et à

l'aide du tarif du module présent $M = 61$, par la simple opération de la soustraction, la suite des six premiers résidus comparatifs que voici... (152)
 $1^4 \equiv 1$, $2^4 \equiv 16$, $3^4 \equiv 20$, $4^4 \equiv 12$, $5^4 \equiv 15$, $6^4 \equiv 15$, etc.,
 et qui sont de nouveau suffisants pour la solution de la congruence proposée (152). En effet, comparant ces résidus de puissances avec les résidus de solution T_1 , T_2 , T_3 , etc., que nous avons calculés à la marque (116)', nous trouverons immédiatement, en outre du résidu $T_1 = 16$ qui forme la quatrième puissance de 2 et dont nous nous sommes servi pour déterminer la première des racines (117), le double résidu... (153)

$$T_1 = 15 \equiv 5^4, \quad \text{et} \quad T_1 = 15 \equiv 6^4,$$

résultant de la quatrième puissance exacte de 5 et de 6, et correspondant au seul et même indice $\mu = 4$. Ainsi, ayant, par (116)', la valeur de $S_4 = 56$, nous obtiendrons ici sur-le-champ, en vertu de l'expression générale (115), toutes les quatre racines, savoir... (153)

$$x \equiv \pm 5.56' \equiv \pm 36 + 61.j'', \\ x \equiv \pm 6.56 \equiv \pm 31 + 61.j''.$$

En reprenant enfin l'exemple (119) de la congruence du cinquième degré, savoir... (154)

$$x^5 \equiv 13, \quad (\text{mod.} = 13313);$$

nous obtiendrons encore facilement, avec la table précédente (148), et à l'aide du tarif du module présent $M = 13313$, toujours par la simple opération arithmétique de la soustraction, la suite des dix premiers résidus comparatifs que voici... (154')

$$1^5 \equiv 1, \quad 2^5 \equiv 32, \quad 3^5 \equiv 243, \quad 4^5 \equiv 1024, \quad 5^5 \equiv 3125, \\ 6^5 \equiv 7776, \quad 7^5 \equiv 3494, \quad 8^5 \equiv 6142, \quad 9^5 \equiv 5797, \quad 10^5 \equiv 6809, \text{ etc.},$$

et qui suffiront pour la solution de la congruence proposée (154). En effet, comparant ces résidus de puissances avec les résidus de solution T_1 , T_2 , T_3 , etc., correspondant au genre $k = 2$, que nous avons calculés à la marque (121)', nous trouverons d'abord, comme plus haut, les deux résidus... (154)''

$$T_1 = -1 \equiv (-1)^1, \quad \text{et} \quad T_1 = -1024 \equiv (-4)^1,$$

qui nous ont fait connaître la racine identique (122) et (123). Et comparant de plus les présents résidus de puissances (154)' avec les résidus de solution T_1 , T_2 , T_3 , etc., correspondant à la valeur $k = 3$ du genre k , tels que nous les avons calculés à la marque (129)', nous trouverons le résidu... (155)

$$T_1 = -5797 \equiv (-9)^1,$$

résultant de la cinquième puissance de -9 et correspondant à l'indice $\mu = 1$.

Ainsi, ayant, par (129)^o, la valeur de S , $= -1849$, nous obtiendrons ici, en vertu de la seconde expression élémentaire et générale (128), la racine

$$\dots (155) \quad x = (-9)(-1849) \equiv 3328 + 1313.j,$$

qui serait encore la susdite racine identique (122) et (123). Nous pourrions donc, par cette reproduction de la même racine $x \equiv 3328$, au moyen des deux expressions générales (120) et (128), et avec le même indice $\mu = 1$, nous pourrions, disons-nous, présumer déjà, par la petite probabilité de $\frac{1}{25}$ qui y correspond, que la congruence proposée (154) n'a pas cinq racines réelles ou rationnelles. Et alors, sans entreprendre des calculs ultérieurs, nous procéderions immédiatement aux susdites vérifications (144), (146), etc., de la même racine dans les expressions générales (131), (145), etc., correspondant aux valeurs ultérieures $k = 4$, $k = 5$, etc., du genre k , pour fixer plus exactement la probabilité de cette racine identique $x \equiv 3328$, comme nous l'avons fait plus haut; ou bien, pour en avoir la certitude absolue, nous recourrions immédiatement à l'évaluation de la susdite condition (137)^o.

Nous avons donc maintenant, par une méthode directe, soit relative, soit même absolue, et dans toutes ses déterminations possibles, théoriques et pratiques, la solution générale (99) du grand problème des congruences fondamentales (85) ou (14) de tous les degrés, cette solution qui sert évidemment de base à toute la Théorie des Nombres, et qui, bien moins encore que la résolution des équations algébriques de tous les degrés, n'était nullement attendue ni même prévue dans l'état actuel de la science. Et cette solution décisive, qui confirme si puissamment notre réforme philosophique des Mathématiques, vient d'être donnée effectivement par la simple application de la loi téléologique (15), qui, dans cette réforme, constitue la troisième et dernière loi fondamentale des Mathématiques.

Pour la parfaite intelligence philosophique de cette grande solution (99), nous nous bornerons à faire remarquer qu'en la réduisant à la considération des puissances exactes des nombres, comme elle l'est effectivement, elle se trouve ramenée à une considération purement logique ou algorithmique, et non à une ultérieure considération téléologique, parce que les puissances et les racines, nommément la formation des premières et l'extraction des dernières, appartiennent à l'universalité de la Théorie générale de l'Algorithmie, et non à l'individualité de la Théorie spéciale des Nombres. C'est pourquoi notre solution présente (99) est en outre rigoureusement complète; et observant d'ailleurs qu'elle n'exige aucune supposition, aucun tâtonnement, on verra de plus, comme nous venons de la qualifier, qu'elle est entièrement caractérisée.

A propos de suppositions ou de tâtonnements, nous devons ici observer que les diverses méthodes indirectes, auxquelles les géomètres étaient forcés de

s'en tenir jusqu'à ce jour, et qui ne sont guère applicables que lorsqu'il s'agit de petits nombres, dépendent également de nos principes téléologiques, du moins celles de ces méthodes qui sont réellement scientifiques, telles que sont, pour le cas présent, les méthodes dites d'*exclusion*, c'est-à-dire, celles qui servent à déterminer les nombres hétéroclites, les nombres qui ne peuvent pas résoudre la question. — Nous allons en présenter un exemple.

En formant, comme sous la marque (30), les valeurs... (156)

$$N = \aleph \left[\frac{M}{(1^{10})^m}, \mathfrak{A} \right]^{(w-1)},$$

$$\mathfrak{Z} = \left\{ h.(1^{10})^i + (-1)^{i+1} \right\}^n;$$

la première des générations téléologiques (15) présentera l'égalité... (157)

$$\mathfrak{Z} = - \frac{a + M i}{N.(-1)^w}.$$

Or, si l'on conçoit un autre module M' , et un autre résidu a' tel que, pour ce module M' , il réponde au même genre k et à la même espèce h , auxquels répond, pour le premier module M , le premier résidu a ; et si l'on distingue également par N' et $\mathfrak{A}'$ les quantités N et $\mathfrak{A}$ correspondantes à ce second module M' ; l'égalité analogue à la précédente (157), sera... (157')

$$\mathfrak{Z} = - \frac{a' + M' j}{N'.(-1)^{w'}};$$

en désignant toujours par i et j des nombres arbitraires, positifs, négatifs, ou zéro. Ainsi, comparant ces deux valeurs de $\mathfrak{Z}$, il viendra l'équation... (158)

$$a N'.(-1)^{w'} - a' N.(-1)^w = M N.(-1)^w . j - M' N'.(-1)^{w'} . i;$$

et par conséquent la congruence... (159)

$$M N'.i + \left\{ a N' - a'.N.(-1)^{w-w'} \right\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M'.N),$$

qui donne, pour le nombre i , la détermination... (159')

$$i = (-1)^s . \left\{ a.N' - a'.N.(-1)^{w-w'} \right\} . \aleph \left[\frac{M'.N}{M.N}, \tau \right]^{(t-1)} + M'.N.j.$$

Mais, ces résultats ne sont vrais qu'autant que le nombre a' forme un véritable résidu par rapport au module M' , et même un résidu tel que son genre k et son espèce h soient les mêmes que ceux du résidu a considéré par rapport au module M . Donc, si l'on prend, pour ce nombre a' , un *non-résidu*, ou même un tout autre nombre non-congruent par rapport au nombre auxiliaire M' , considéré comme module dans la congruence simple (14) du degré m , les nombres i , donnés par la dernière formule (159'), seront fautifs ou hétéroclites

dans la relation d'égalité . . . (160)

$$x^n = a + Mi,$$

qui résulte de la congruence proposée (14), savoir . . . (161)

$$x^n \equiv a, \quad (\text{mod. } M).$$

Ainsi, voulant, à l'aide de tâtonnements, déterminer la racine x par le second membre de l'égalité (160), en y substituant successivement des nombres entiers à la place de i , il faut exclure de cet essai tous ceux des nombres entiers qui sont donnés par la formule (159) dans le cas où, comme nous le supposons ici, le nombre a' n'est pas le résidu qui, par rapport au module M' , répond au genre k et à l'espèce k , auxquels répond le résidu a par rapport au module M .

Telle (159) et (159)' est donc, pour la solution indirecte ou par tâtonnement des congruences fondamentales (161), la méthode générale d'exclusion. — En considérant la simplicité et la précision de ces présentes expressions (159) et (159)', nous pouvons nous dispenser d'alléguer ici des exemples de cette méthode d'exclusion, d'autant plus qu'elle devient maintenant tout à fait inutile, lorsque nous possédons enfin la méthode directe (99) pour cette difficile solution des congruences fondamentales (161) ou (85). — Nous nous bornerons donc à déduire, de cette méthode générale (159), la méthode particulière d'exclusion, nommée celle qui, par le moyen de tâtonnement, fournit l'unique méthode que la science ait eue, jusqu'à ce jour, pour la résolution des congruences en question.

Si l'on prend simplement l'unité pour le genre k , avec lequel on calcule les quantités N et N' par la première des expressions (156), on aura $\alpha \equiv 1$, $\alpha' \equiv 1$, et par conséquent $N \equiv 1$ et $N' \equiv 1$. Dans ce cas, où le nombre a' sera simplement un non-résidu par rapport au module M' , la congruence générale d'exclusion (159) prendra la forme particulière . . . (162)

$$Mi + (a - a') \equiv 0, \quad (\text{mod. } M');$$

et c'est là la méthode d'exclusion proposée par Gauss, méthode que l'on voit ainsi n'être qu'un cas très-particulier de la méthode générale d'exclusion (159), résultant de nos principes téléologiques. — Nous venons de dire que cette toute particulière méthode de tâtonnement est tout ce que, jusqu'à ce jour, la science a possédé pour la solution du grand problème des congruences fondamentales (161), de cette base de la Théorie des Nombres.

Pour achever ici l'établissement de nos principes téléologiques, nous allons encore les appliquer à la solution du fameux problème de la décomposition des nombres en leurs facteurs, et par conséquent, de la fixation du caractère des nombres premiers; problème qui notoirement couronne toute la Théorie des Nombres. Mais, en considérant que nous traiterons complètement cette question dans le huitième des ouvrages annoncés dans le Programme précédent,

dans celui qui aura le titre *Théorie des Nombres*, nous nous bornerons ici, pour ne pas trop nous écarter du véritable objet de l'ouvrage présent, à n'indiquer que les nouveaux principes téléologiques de cette difficile et également grande question, autant qu'il est nécessaire pour montrer qu'à son tour, elle dépend entièrement de notre présente (15) troisième et dernière loi fondamentale des Mathématiques. Toutefois, ces principes seront suffisants pour fixer méthodiquement, dès aujourd'hui, l'ensemble de cette théorie de la décomposition des nombres en leurs facteurs; et ce n'est que dans l'application de ces principes, surtout dans leur éclaircissement par des exemples, que nous nous bornerons à ce qui sera nécessaire pour le but présent, en observant que les nombreux exemples que nous venons d'alléguer pour ces nouveaux calculs, doivent déjà avoir éclairci suffisamment ces calculs téléologiques.

Nous joignons ici cette question de la décomposition des nombres en leurs facteurs, par la raison principale de ce que, dans sa généralité, la solution de cette fameuse question implique la solution des congruences du second ordre d'indéterminatus, de celles qui contiennent deux quantités inconnues, c'est-à-dire, la solution de ces congruences supérieures qui, jusqu'à ce jour, est restée insaisissable par la science, et qui, comme celle des congruences du premier ordre, dérive également de notre présente loi téléologique (15), formant la troisième loi fondamentale de notre réforme des Mathématiques. Aussi, avant d'aborder la question de la décomposition des nombres en facteurs, allons-nous faire connaître les principes de la solution de ces congruences supérieures, du moins de celles dont dépend cette question, nommément des congruences fondamentales d'un degré quelconque n , que voici . . . (163)

$$x^n - a.y^n \equiv 0, \quad (\text{mod. } \equiv M);$$

dans lesquelles le coefficient a et le module M sont donnés, et les deux quantités x et y , indéterminées et inconnues, sont les quantités qu'il s'agit de découvrir par une méthode directe.

En y appliquant les générations téléologiques (15); et spécialement les principes de la dernière de ces générations, on trouvera facilement . . . (164)

$$M = \text{fact.} \left\{ a.(1^{(1)})^n - 1 \right\},$$

pour l'expression générale du module M dans cette congruence supérieure (163); expression dans laquelle k désigne toujours le genre arbitraire des racines a et y de cette congruence. — Ainsi, avec le coefficient donné a , et avec des genres arbitraires k , on aura les nombres (164) dont les divers facteurs présenteront tous les modules M qui peuvent servir pour la relation congruentielle (163) dont il s'agit. — De plus, avec chaque genre k que l'on aura adopté, les générations téléologiques (15) donneront, pour les racines x et y , les expressions générales . . . (165)

$$z = k + (-1)^{k+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{11})}, \pi \right]^{(2-k)} + Mj',$$

$$y = k \cdot (1^{11})^2 + (-1)^{k+1} + Mj'';$$

l'espèce k de ces racines demeurant encore arbitraire et servant ainsi, par sa variation, à fixer tous les nombres indéterminés z et y .

Cette FORMATION des congruences fondamentales (163) du second ordre ne présente ici aucune difficulté nouvelle; et nous pouvons immédiatement aborder la résolution de ces congruences supérieures. — Pour cela, formant auxiliairement les quantités . . . (166)

$$x = (1^{11})^k, \quad \text{et} \quad \xi = x^2 = (1^{11})^{2k};$$

l'expression (164) du module M offrira immédiatement la congruence du premier ordre et du premier degré . . . (167)

$$a \cdot \xi - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

qui, en vertu des relations (27) et (28), donnera, pour la quantité ξ , la valeur . . . (167')

$$\xi = (-1)^{w+k} \cdot N \left[\frac{M}{a}, \pi \right]^{(w-1)} + Mi.$$

Et avec cette valeur de ξ , on aura, en vertu des relations auxiliaires (166), la congruence du premier ordre et du degré n . . . (168)

$$x^n \equiv \xi, \quad (\text{mod.} = M);$$

congruence dont on trouvera les racines x par nos méthodes précédentes, soit élémentaire (95), soit systématique (99). Ainsi, en formant, pour les différentes valeurs progressives $k = 0, k = 1, k = 2, k = 3, k = 4$, etc., du genre k , les résidus correspondants $f(k)$ qui sont donnés par la congruence générale . . . (169)

$$(1^{11})^{2k} \equiv f(k), \quad (\text{mod.} = M);$$

il suffira de comparer les racines x que donne la congruence (168), avec ces résidus progressifs $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$, etc., pour découvrir l'égalité ou les égalités . . . (169')

$$x \equiv f(k),$$

qui feront connaître les genres k desquels dépendent les valeurs (165) des deux quantités inconnues z et y . — On conçoit que si, par la comparaison des racines x avec les résidus progressifs $f(k)$, on ne pouvait obtenir l'égalité (169)', pour toutes les valeurs de k correspondant au module M , ce serait une preuve que la congruence proposée (163) du second ordre, par suite de son coefficient a , serait impossible.

Voici quelques exemples de cette résolution des congruences fondamentales (163) du second ordre. — Soit d'abord proposée une telle congruence du troisième degré, savoir . . . (170)

$$z^3 - 17 \cdot j^3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 1087);$$

où l'on a ainsi . . . (170')

$$n = 3, \quad a = 17, \quad \text{et } M = 1087.$$

On aura donc, par l'expression (167)', la valeur . . . (171)

$$\xi = (-1)^{1+1} \cdot K \left[\frac{1087}{17}, 3 \right]^{(1)} = 64 + 1087 \cdot i;$$

et par conséquent, pour la congruence générale (168), on aura la présente congruence particulière . . . (171')

$$x^1 \equiv 64, \quad (\text{mod.} = 1087);$$

dont la racine est immédiatement . . . (171'')

$$x = 4 + 1087 \cdot j.$$

Comparant alors cette racine $x = 4$ avec les résidus (169) des factorielles (171''), on trouvera, pour l'égalité (169)', la valeur . . . (171''')

$$4 = f(2), \quad \text{c'est-à-dire, } k = 2.$$

Telle est donc la valeur du genre k qui correspond à la congruence proposée (170). Et par conséquent, en introduisant cette valeur $k = 2$ dans les expressions (165) des quantités inconnues z et y , on obtiendra, pour ces quantités, d'abord, les valeurs . . . (172)

$$K \left[\frac{1087}{4}, \pi \right]^{(2-1)} = 272, \quad \text{et } \pi = 3;$$

et avec elles, les valeurs définitives . . . (172)

$$z = h - 272 + 1087 \cdot j', \\ y = 4h - 1 + 1087 \cdot j'';$$

dans lesquelles l'espèce h demeure arbitraire et sert, par la même, à fixer toutes les valeurs de ces quantités indéterminées z et y . — Ainsi, pour $h = 0$, on aura . . . (172')

$$z = -272 + 1087 \cdot j', \quad \text{et } y = -1 + 1087 \cdot j'';$$

et ces valeurs résoudreont effectivement la congruence proposée (170); car, on aura . . . (172''')

$$(-272)^3 - 17 \cdot (-1)^3 = -20\,123\,631 = -1087 \times 18\,513.$$

Ensuite, pour $h = 1$, les valeurs définitives (172) donneraient . . . (172''')

$$z = -271 + 1087 \cdot j', \quad \text{et } y = 3 + 1087 \cdot j'';$$

et ces valeurs résoudreient encore la congruence proposée (163); car, on au-

rait . . . (172)^{iv}

$$(-271)^3 - 17.(3)^3 = -19\,902\,970 = -1087 \times 18310.$$

Il en serait de même pour toute autre valeur de l'espèce k , comme on peut s'en convaincre en introduisant, dans la congruence proposée (170), les valeurs générales . . . (173)

$$z = (k - 272), \quad \text{et} \quad y = (4k - 1),$$

qui donneront ainsi . . . (173)ⁱ

$$(k - 272)^3 - 17.(4k - 1)^3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 1087);$$

car, en y développant les deux cubes par rapport aux puissances de cette quantité arbitraire k , on verra que tous les coefficients de ces puissances seront congruents avec le module 1087.

Soit ensuite proposée la congruence du second ordre et du second degré . . . (174)

$$z^2 - 3.y^2 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 47);$$

où l'on a ainsi . . . (174)ⁱⁱ

$$n = 2, \quad a = 3, \quad \text{et} \quad M = 47.$$

On aura donc, par l'expression (167)ⁱ, la valeur . . . (175)

$$\xi = (-1)^{1+1} . N \left[\frac{47}{3}, 3 \right]^{(2)} = 16 + 47.i;$$

et par conséquent, pour la congruence générale (168), on aura la présente congruence particulière . . . (175)ⁱ

$$x^2 \equiv 16, \quad (\text{mod.} = 47);$$

dont la racine est encore immédiatement . . . (175)ⁱⁱ

$$x = 4 + 47.j.$$

Comparant alors cette racine $x \equiv 4$ avec les résidus (169) des factorielles (14)ⁱⁱ, on trouvera de nouveau, pour l'égalité (169)ⁱ, la valeur . . . (175)ⁱⁱⁱ

$$4 = f(2), \quad \text{c'est-à-dire,} \quad k = 2.$$

Telle est donc encore ici la valeur du genre k qui correspond à la deuxième congruence proposée (174). Et par conséquent, en introduisant cette valeur $k = 2$ dans les expressions (165) des quantités inconnues z et y , on obtiendra, pour ces quantités, d'abord, les valeurs . . . (175)^{iv}

$$N \left[\frac{47}{4}, \pi \right]^{(2-1)} = 12, \quad \text{et} \quad \pi = 3;$$

et avec elles, les valeurs définitives . . . (176)

$$\begin{aligned} z &= k - 12 + 47.j'', \\ y &= 4k - 1 + 47.j'''; \end{aligned}$$

dans lesquelles l'espèce k demeure de nouveau arbitraire et sert, par là même,

à fixer toutes les valeurs de ces quantités indéterminées z et y . — Ainsi, pour $k = 0$, on aura . . . (176)^j

$$z = -12 + 47 \cdot j', \quad \text{et} \quad y = -1 + 47 \cdot j'';$$

et ces valeurs résoudreont effectivement la congruence proposée (174) du second degré; car, on aura . . . (176)^{j'}

$$(-12)^2 - 3 \cdot (-1)^2 = 141 = 47 \times 3.$$

Ensuite, pour $k = 1$, les valeurs définitives (176) donneraient . . . (176)^{j''}

$$z = -11 + 47 \cdot j', \quad \text{et} \quad y = 3 + 47 \cdot j'';$$

et ces valeurs résoudreient encore la congruence proposée (174); car, on aurait . . . (176)^{j''}

$$(-11)^2 - 3 \cdot (3)^2 = 94 = 47 \times 2.$$

Il en serait de même pour toute autre valeur de l'espèce k , comme on peut de nouveau s'en convaincre en introduisant les valeurs générales (176) des inconnues z et y dans la congruence proposée (174); car, on obtiendrait la congruence générale . . . (177)

$$(k-12)^2 - 3 \cdot (4k-1)^2 \equiv 0; \quad (\text{mod.} = 47);$$

dans laquelle, en y développant les carrés, les coefficients de toutes les puissances de k seraient effectivement congruents par rapport au module 47.

Soit enfin proposée la congruence du second ordre et seulement du premier degré . . . (178)

$$z - 3 \cdot y \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 107);$$

dans laquelle, en la comparant à la congruence générale (163) du second ordre, on aura . . . (178)

$$n = 1, \quad a = 3, \quad \text{et} \quad M = 107.$$

On aura donc ici, par l'expression (167), la valeur . . . (179)

$$\xi = (-1)^{1+1} \cdot N \left[\frac{107}{3}, 3 \right]^{(1)} = 36 + 107 \cdot i;$$

et par conséquent, pour la congruence générale (168), on aura la présente congruence particulière . . . (179)

$$x \equiv 36, \quad (\text{mod.} = 107);$$

dont la racine est ici et toujours immédiatement . . . (179)ⁿ

$$x = 36 + 107 \cdot j.$$

Comparant alors cette racine avec les résidus (169) des factorielles $(1^{11})^2$, on trouvera ici, pour l'égalité (169), la valeur . . . (179)ⁿ

$$36 \equiv f(3), \quad \text{c'est-à-dire,} \quad k = 3.$$

Telle sera donc la présente valeur du genre k qui correspond à la congruence proposée (178) du premier degré. Et par conséquent, en introduisant cette

valeur $k \equiv 3$ dans les expressions (163) des quantités inconnues et indéterminées z et y , on obtiendra, pour ces quantités, d'abord, les valeurs...

$$N\left[\frac{107}{36}, 3\right]^{(10)} = 3, \quad \text{et} \quad \pi = 3;$$

et avec elles, les valeurs définitives . . . (180)

$$\begin{aligned} z &= A + 3 + 107.f', \\ y &= 36.A + 1 + 107.f''; \end{aligned}$$

dans lesquelles l'espèce A demeure toujours arbitraire et sert, par là même, à fixer toutes les valeurs de ces quantités indéterminées z et y qui donnent la solution de la dernière congruence proposée (178).

Dans les trois exemples précédents (170), (174), et (178), nous avons toujours trouvé immédiatement, par les relations (169) et (169)', la valeur du genre k . Et l'on conçoit qu'il n'en sera pas toujours de même; car, dans l'égalité comparative (169)', la racine x de la congruence (168) n'indiquera généralement que le résidu $f(k)$ de la factorielle $(1^{(1)})^k$, tel que, d'après la congruence (169), ce résidu $f(k)$ s'établit par rapport au module donné M . — Il importe donc, pour la prompte solution des congruences fondamentales (163) du second ordre, dont il s'agit, d'avoir une table de ces factorielles $(1^{(1)})^k$, c'est-à-dire, une table des carrés des factorielles naturelles $(1^{(1)})^k$. — Voici un commencement de cette table, que l'on pourra continuer aussi loin qu'on le voudra . . . (181)

TABLE DES CARRÉS DES FACTORIELLES.

k	$(1^{(1)})^k$	$(1^{(1)})^k$
1	1	1
2	2	4
3	6	36
4	24	576
5	120	14400
6	720	518400
7	5040	25401600
8	40320	1625702400
9	362880	131681894400
10	3628800	13168189440000

Il suffira donc de prendre les résidus de ces carrés par rapport au module M qui préside à la congruence fondamentale (163) dont il s'agit, pour avoir les nombres que, dans la congruence auxiliaire (169), nous désignons par $f(k)$, et qui, par l'égalité (169)', font découvrir le genre k par rapport auquel la solution (165) de cette congruence générale (163) du second ordre est possible. — Toutefois, pour éviter la rapide augmentation des chiffres qui forment les carrés présents, on pourrait se borner à ne construire la table (181) que pour les seules valeurs de la simple factorielle $(1^{(1)})$, pour celles qui sont dans la seconde colonne de cette table, parce qu'après avoir pris les résidus de ces valeurs simples par rapport à un module donné M , on prendrait alors facilement les carrés de ces résidus. On pourrait aussi, dans ces cas des seules valeurs de la factorielle $(1^{(1)})$, prendre immédiatement, à la place des quantités auxiliaires (166), les quantités . . . (182)

$$x = (1^{(1)}), \quad \text{et} \quad \xi = x^n = (1^{(1)})^n;$$

et résoudre alors, à la place de la congruence (168), la congruence . . . (182)'

$$x^n \equiv \xi, \quad (\text{mod. } M),$$

dont les résidus x , servant à découvrir le genre k , n'auraient ainsi besoin d'être confrontés, à la place des relations (169) et (169)', qu'avec les résidus des seules valeurs des simples factorielles $(1^{(1)})$, par l'égalité . . . (183)

$$x = f(k),$$

en supposant que les nombres $f(k)$ seraient alors les résidus dans la congruence . . . (183)'

$$(1^{(1)}) \equiv f(k), \quad (\text{mod. } M).$$

Ainsi, avec chacun de ces moyens, la congruence fondamentale (163) du second ordre se trouvera, par l'application de nos principes téléologiques, résolue enfin généralement pour un degré quelconque n . — Et l'on sait, par les travaux ingénieux et instructifs de Lagrange, que, jusqu'à présent, la science actuelle n'a pu résoudre ces congruences du second ordre, pas même complètement pour le deuxième degré. — Procédons maintenant à l'application de cette solution générale à la résolution du fameux problème de la décomposition des membres en leurs facteurs.

Pour cela, reprenons la congruence fondamentale et générale (163) du second ordre, savoir . . . (184)

$$z^2 - a.y^2 \equiv 0, \quad (\text{mod. } M);$$

et observons que si le module M de cette congruence était le nombre proposé qu'il s'agit de décomposer en ses facteurs, il faudrait, si cela était possible en général, décomposer algébriquement en ses facteurs le premier membre de la présente congruence générale (184). Et la condition de cette possibilité générale consiste manifestement en ce que le coefficient a , dans ce premier

membre en question, soit transformé en une puissance x^n par la congruence du premier ordre . . . (185)

$$x^n \equiv a, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

Mais, pour la possibilité générale de la congruence fondamentale (184), son coefficient a est déterminé par la condition de cette congruence, c'est-à-dire, par l'expression (164) de son module M , savoir, par l'expression . . . (186)

$$M = \text{fact.} \{ a \cdot (1^{11})^n - 1 \}.$$

Nous aurons donc, pour la détermination du coefficient a en question, la congruence simple du premier degré . . . (186')

$$a \cdot (1^{11})^n - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

qui, d'après les relations (27) et (28), donnera . . . (187)

$$a = (-1)^{n+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{11})^n}, \varnothing \right]^{n-1} + M.$$

Et connaissant ainsi la valeur du coefficient a en question, la résolution de la congruence (185) du premier ordre nous fera connaître les racines x dont la puissance n pourra être introduite, à la place de ce coefficient a , dans la congruence fondamentale (184), afin de rendre par là décomposable algébriquement en des facteurs son premier membre. — Or, cette résolution de la congruence du premier ordre (185) se trouve maintenant donnée par nos susdits procédés, élémentaire (88) ou (95), et systématique (99). En effet; le procédé élémentaire (88), qui nous suffira ici complètement, nous donnera, pour les racines x de la congruence (185) dont il s'agit, l'expression . . . (188)

$$x = \left[a \cdot (1^{11})^{n-1} + M \right]^{\frac{1}{n}} \times (Q)^{\frac{1}{n}} + Mj;$$

en faisant toujours auxiliairement . . . (188')

$$Q = (-1)^{n+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{11})^n}, \pi \right]^{(n-1)}.$$

La congruence fondamentale (184) recevra ainsi, par cette transformation (185) de son coefficient a , la forme . . . (189)

$$z^n - (xy)^n \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

Et en vertu de la solution (165) de cette congruence fondamentale (185), nous aurons, en outre de la présente valeur (188) de la quantité x , pour les deux quantités z et y , les valeurs . . . (190)

$$\begin{aligned} z &= h - (-1)^t \cdot Q + M \cdot j^t, \\ y &= h \cdot (1^{11})^t - (-1)^t + M \cdot j^{t-n}. \end{aligned}$$

Or, sous la forme primitive (184), le premier membre de cette congruence fondamentale, dans l'état *réthorologique* où il se trouve encore, surtout par la valeur (187) de son coefficient a , ne pouvait manifestement indiquer ou faire connaître les facteurs du module M qu'il représente, parce que c'est là précisément le nœud de la question. Il fallait donc amener ce premier membre de la congruence (184) à un état *algébrique*, tel que le présente sa forme (189), afin de pouvoir y appliquer la loi fondamentale de la Théorie des Nombres, cette loi purement algébrique que nous avons alléguée plus haut, comme ayant été donnée, sous la marque (D), dans notre Introduction à la Philosophie des Mathématiques (page 67), pour opérer la transition de la *possibilité* à l'*effectivité* de cette Théorie spéciale. En effet, appliquant ici cette loi fondamentale (D) à la forme (189) du premier membre de cette congruence fondamentale qui représente le nombre proposé M , nous obtiendrons la décomposition de ce premier membre en ses deux facteurs algébriques que voici . . . (191)

$$z^2 - (xy)^2 = (z - xy) \times N[z + xy]^{(a-1)};$$

la fonction *aleph* étant ici une des fonctions *alephs* algébriques qui entrent dans la construction de la loi fondamentale (D) que nous venons d'appliquer, c'est-à-dire, la fonction qui forme ici l'expression algébrique . . . (192)

$$N[z + xy]^{(a-1)} = z^{a-1} + (xy).z^{a-2} + (xy)^2.z^{a-3} + \\ + (xy)^3.z^{a-4} . . . + (xy)^{a-1}.z^0.$$

Nous obtenons donc, par cette application (191) de la loi fondamentale et purement algébrique (D) de la Théorie des Nombres, par cette application à la congruence fondamentale (184) du second ordre, qui représente, de la manière la plus générale, le nombre proposé M , nous obtenons ainsi, disons-nous, la décomposition absolument générale de ce nombre M en ses facteurs, lorsqu'il en a réellement. Et nous découvrons même, dans cette forme absolue (191) de la décomposition de tout nombre M en ses facteurs, d'une part, les conditions de la possibilité de cette décomposition, lorsque le nombre M est un nombre composé, et par contre-coup, de l'autre part, les conditions de son impossibilité, lorsque ce nombre M est un nombre premier, comme nous allons le voir.

En n'examinant que le premier des deux facteurs algébriques (191), qui suffira complètement pour la solution de la présente question, si l'un y introduit les valeurs (190) des quantités indéterminées z et y , nous obtiendrons, pour ce premier facteur, l'expression . . . (193)

$$(z - xy) = \left\{ 1 - x.(1^{(a)})^2 \right\}.A + (-1)^2.(x - Q);$$

c'est-à-dire, l'expression . . . (194)

$$(z - xy) = A.h + \sum_{i=1}^p (-1)^i B_i;$$

en faisant auxiliairement . . . (195)

$$A = \left\{ 1 - x.(1^{h_1})^p \right\}, \quad \text{et} \quad B = (x - Q);$$

expressions où les quantités x et Q sont données par les formules (188) et (188'), dont la première, en vertu de la congruence (186'), se réduit ici à la forme plus simple . . . (196)

$$x = \left[\left\{ (1^{h_1})^p \right\}^{(p-1)} + M \right]^{\frac{1}{p}} \times (Q)^p + M.j,$$

dans laquelle le coefficient a de la congruence fondamentale (184) se trouve complètement éliminé. Il ne faut pas ici perdre de vue que, par suite de la présente réduction (196), le nombre arbitraire p , qui entre dans cette expression réduite (196) de la quantité x , est tout nombre positif, depuis $p = 1$ inclusivement. — Or, dans l'expression (193) ou (194) que nous venons d'obtenir pour le premier facteur algébrique (191) du nombre proposé M , il entre le nombre indéterminé h qui forme l'espèce de la racine x dans la congruence auxiliaire (185), pour tout genre k que l'on aura adopté, et qui, à son tour, entre dans la construction (195) des coefficients A et B de ce premier facteur (194). Donc, pour que ce premier facteur algébrique $(z - xy)$ puisse contenir un facteur numérique du nombre proposé M , il faut nécessairement que ce facteur numérique soit contenu dans chacun des coefficients constants A et B qui entrent dans l'expression indéterminée et variable (194) de ce premier facteur algébrique $(z - xy)$. Et par conséquent, il suffira de chercher le diviseur commun le plus grand entre les deux coefficients A et B , pour avoir immédiatement l'un des facteurs numériques du nombre proposé M , en observant que si, pour toutes les racines x de la congruence auxiliaire (185), telles qu'elles se trouvent données par leur expression élémentaire (188) ou (196), et, si l'on veut, par l'expression systématique (99), on trouve constamment, pour toutes les valeurs du genre k , que le plus grand diviseur commun des coefficients A et B en question est toujours égal à l'unité ou au nombre M lui-même, ce nombre proposé M sera un nombre premier. — Quant à l'expression systématique (99) que nous venons d'alléguer comme pouvant être employée, si l'on veut, pour la résolution de la présente congruence auxiliaire (185), il faut ici remarquer que les différentes valeurs du genre k , telles qu'elles sont indiquées dans la formule (98) des résidus progressifs T_v , qui entrent dans cette expression systématique (99), sont entièrement indépendantes de la valeur spéciale du genre k que l'on aura adoptée pour les expressions (190) des quantités indéterminées z et y , et par conséquent pour la

construction définitive (195) des coefficients A et B qui donnent la solution de la question. Aussi, pour éviter la confusion de ces valeurs du genre k , convient-il de ne jamais se servir ici de l'expression systématique (99) pour la détermination des racines x dans la congruence auxiliaire (185), d'autant plus que l'expression élémentaire (188) réduite à la forme (196) suffit ici complètement dans tous les cas, en considérant que, dans notre question présente, nous avons la faculté de varier, dans cette expression (196) des racines x , non-seulement la valeur du genre k , mais de plus, ce qui est ici l'ESSENTIEL, la valeur de l'exposant arbitraire n qui forme le degré dans la congruence fondamentale (184), servant de principe à la présente solution du problème en question. Et en bornant ainsi cette solution à la seule expression élémentaire (188) réduite à l'expression (196), nous pouvons également employer ici, pour la détermination des racines auxiliaires x , l'expression élémentaire et finale (95), savoir . . . (197)

$$x = [T_r]^{\frac{1}{r}} \times (Q)^r + M.j;$$

en observant que, par suite de notre présente congruence (186)', l'expression (95)' des résidus T_r se réduit ici à la forme plus simple . . . (198)

$$(1^{11})^{m \cdot (r-1)} \equiv T_r, \quad (\text{mod. } \equiv M),$$

dans laquelle disparaît le coefficient a de la congruence fondamentale (184).

Telle est donc, dans son absolue généralité, la solution définitive, complète et rigoureusement directe de ce grand problème de la décomposition des nombres en leurs facteurs, de ce problème qui, pour ainsi dire à la honte de la science, n'a pu, sans tâtonnement, être résolu directement jusqu'à ce jour. — Il ne nous reste ici qu'à signaler, par anticipation sur notre susdit traité de la Théorie des Nombres, quelques cas singuliers que présente cette question dans ce qui concerne respectivement, d'abord, les racines auxiliaires x , données par l'expression élémentaire (196) ou (197), ensuite, le genre k que l'on aura adopté, et enfin l'exposant n dans la congruence fondamentale (184) dont on se sert, comme principe, dans la solution de cette grande question. — Avant tout, il faut remarquer que, lorsque le nombre proposé M est une puissance exacte d'un autre nombre, premier ou composé, sa décomposition en facteurs ne serait d'abord qu'une extraction de sa racine, dont l'opération, comme ayant le caractère d'universalité, appartient proprement à la Théorie générale de l'Algorithmie, et non à la Théorie spéciale des Nombres. Il faut donc, avant d'appliquer la présente solution téléologique, s'assurer de ce que le nombre proposé M n'est pas une telle puissance exacte; car, s'il l'était, sa décomposition en ses racines s'opérerait plus facilement par l'application des règles ordinaires d'extraction des racines. — Procédons maintenant aux cas singuliers qu'il nous reste à signaler.

Pour ce qui concerne, en premier lieu, les racines auxiliaires x , telles qu'elles sont données par l'expression (196) ou (197), il faut remarquer que celle de ces racines qui y répond à l'indice $\mu = 1$, et qui forme ainsi, parmi les n racines x , la *racine fondamentale*, se réduit à la valeur . . . (199)

$$x = Q + M.j,$$

et donne alors, d'après (195), pour les coefficients A et B du facteur algébrique (194), les valeurs . . . (200)

$$A = 1 - Q.(1^{11})^s, \quad \text{et} \quad B = 0,$$

dont la première, par suite de l'expression (188) de la quantité Q, et en vertu de notre congruence générale de condition (25), forme ici la congruence . . . (200')

$$A = 1 - Q.(1^{11})^s \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

Ainsi, avec cette racine fondamentale (199), le facteur algébrique (194) se réduit toujours à la congruence . . . (201)

$$(z - xy) = A.A + (-1)^s.B \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M),$$

et ne peut conséquemment, à l'exception d'un seul cas que nous allons signaler à l'instant, faire connaître aucun facteur numérique du nombre proposé M, lors même que ce nombre serait réellement un nombre composé. Il faut donc généralement, à l'exception du cas singulier que nous venons de mentionner, négliger cette racine fondamentale (199) dans l'évaluation des coefficients A et B du facteur algébrique (194), de ces coefficients dont le plus grand diviseur commun doit faire découvrir l'un des facteurs numériques du nombre proposé M. Et par conséquent, c'est uniquement avec les autres racines indépendantes x , telles qu'elles sont données par l'expression élémentaire (196) ou (197), à l'aide de valeurs de l'indice arbitraire μ , différentes de $\mu = 1$, qu'il faudra évaluer, par leurs expressions générales (195), ces coefficients A et B du facteur algébrique (194) dont le plus grand diviseur commun doit donner l'un des facteurs numériques du nombre proposé M. — Quant au cas exceptionnel que nous venons de mentionner, et qui peut, dans la congruence (200) produite par la racine fondamentale (199), faire découvrir un des facteurs numériques du nombre M, il a lieu manifestement lorsque, ce qui arrive rarement, la quantité $Q.(1^{11})^s$ qui entre dans la construction du coefficient A, forme une puissance exacte $(r)^s$ d'un nombre r et d'un degré quelconque s ; car, l'expression (200) du coefficient A sera alors . . . (202)

$$A = 1 - Q.(1^{11})^s = 1 - (r)^s = (1 - r).N[1 + r]^{(s-1)};$$

et le nombre $(1 - r)$, en faisant abstraction de son signe, sera facteur du coefficient A, et par conséquent facteur du nombre proposé M, à cause que le coefficient B est alors zéro.

Nous pouvons maintenant déjà, avant de signaler les ultérieurs cas singuliers, ceux concernant le genre k et l'exposant n , présenter ici quelques exemples de la présente résolution directe du problème de la décomposition des nombres en leurs facteurs. — Les voici.

Soit proposé d'abord le nombre 314431 dont il s'agit de découvrir directement les facteurs. — Nous aurons $M = 314431$; et adoptant, pour l'exposant n et pour le genre k , les valeurs les plus simples, savoir, $n = 3$ et $k = 1$, nous aurons, pour les expressions (188)' et (196) ou (197), les valeurs . . . (203)

$$(1^{11})^3 = 4, \quad \text{et} \quad (1^{11})^m = 64;$$

et par conséquent, en vertu de ces expressions (188)' et (196) ou (197), nous aurons, pour les quantités Q et x , les valeurs . . . (203')

$$Q = (-1)^{n+1} \cdot \pi \left[\frac{314431}{4}, \pi \right]^{(n-1)} = + 78608,$$

$$T_r = (64)^{r-1}, \quad (\text{mod.} = 314431); \quad \text{et}$$

$$x = [T_r]^{\frac{1}{3}} \cdot (78608)^r + 314431.f.$$

Donc, pour la racine fondamentale x , qui répond à l'indice $\mu = 1$, nous obtiendrons, d'après (199), la valeur . . . (204)

$$x = + 78608 + 314431.f,$$

qui, d'après (200), comme identique avec la présente valeur de Q , donnera, pour les coefficients A et B , les valeurs . . . (204')

$$A = 1 - 314431 = - 314431, \quad \text{et} \quad B = 0;$$

où l'on voit que la congruence (200)', savoir . . . (204)''

$$A \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 314431),$$

a lieu réellement pour la racine fondamentale (204). Ainsi, comme nous l'avons reconnu dans la théorie précédente, cette racine fondamentale x , correspondant à l'indice $\mu = 1$, ne peut faire découvrir aucun des facteurs numériques du nombre proposé $M = 314431$, à moins qu'elle ne conduise au cas exceptionnel (202), où la quantité $Q \cdot (1^{11})^3$ forme une puissance exacte. — Or, en examinant ici cette quantité, savoir, la quantité . . . (205)

$$Q \cdot (1^{11})^3 = 78608 \times 4 = 314432,$$

on trouve facilement qu'elle forme le cube de 68. Nous aurons donc, d'après (202)', pour le coefficient A , la valeur composée . . . (205')

$$A \equiv 1 - 314431 \equiv 1 - (68)^3 \equiv (1 - 68) \cdot \pi [1 + 68]^{(n)};$$

et par conséquent, le nombre $(1 - 68) = - 67$, en faisant abstraction de son signe, sera un des facteurs du nombre proposé 314431. En effet, on

e... (205)^u

$$314431 = 67 \times 4693.$$

Il est sans doute superflu de faire remarquer que, si le cas exceptionnel (202) ne s'était pas rencontré ici, il aurait fallu, par la dernière des expressions (203), chercher les autres racines auxiliaires x , correspondant à des indices μ plus grands que $\mu = 1$, pour avoir, d'après (195), les coefficients A et B propres à la solution de la question, comme nous allons le faire dans l'exemple suivant.

Soit proposé, pour ce deuxième exemple, le nombre 4693 qui, d'après (205)^u, forme le deuxième facteur du nombre 314431 du premier exemple, afin de continuer ainsi la décomposition de ce nombre en tous ses facteurs. — Nous aurons ici $M = 4693$; et adoptant encore, pour l'exposant n et pour le genre k , leurs valeurs les plus simples, savoir, $n = 3$, et $k = 2$, nous aurons, comme sous la marque (203), pour les expressions (188)^u et (196) ou (197), les valeurs . . . (206)

$$(1^{11})^3 = 4, \quad \text{et} \quad (1^{11})^{33} = 64;$$

et par conséquent, en vertu de ces expressions (188)^u et (196) ou (197), nous aurons ici, pour les quantités Q et x , les valeurs . . . (206)^j

$$Q = (-1)^{3+1} \cdot N \left[\frac{4693}{4}, \pi \right]^{(3-1)} = -1173,$$

$$T_3 = (64)^{3-1}, \quad (\text{mod.} = 4693); \quad \text{et}$$

$$x = [T_3]^{\frac{1}{2}} \cdot (-1173)^3 + 4693 \cdot j.$$

Donc, pour la racine fondamentale x , correspondant à l'indice $\mu = 1$, nous obtiendrons, d'après (199), la valeur . . . (207)

$$x = -1173 + 4693 \cdot j,$$

qui, d'après (200), comme identique avec la présente valeur de Q, donnera, pour les coefficients A et B construits à la marque (195), les valeurs . . . (207)^j

$$A = 1 + 4692 = 4693, \quad \text{et} \quad B = 0;$$

où l'on voit de nouveau que la congruence (200)^j, savoir . . . (207)^j

$$A \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 4693);$$

a lieu réellement pour cette racine fondamentale (207), et par conséquent quelle ne peut, comme nous l'avons reconnu dans la théorie précédente, faire découvrir aucun des facteurs du nombre proposé $M = 4693$. On y voit de plus que le cas exceptionnel (202) qui en effet, comme nous l'avons dit dans la théorie, arrive très-rarement, ne se présente pas ici. — Il faut donc, pour découvrir les facteurs en question du nombre 4693, chercher, par la dernière des expressions (205)^j, les autres racines indépendantes x qui, avec la présente valeur de Q, feront connaître, par leur construction (195), les

deux coefficients A et B dont le plus grand diviseur commun donnera l'un de ces facteurs du nombre proposé 4693. — Or, en calculant les résidus progressifs T_1, T_2, T_3 , etc., d'après la seconde des expressions (206)', on trouvera, pour celui de l'indice $\mu = 10$, la valeur . . . (208)

$$T_{10} \equiv -911, \quad (\text{mod.} = 4693);$$

et calculant de plus, d'après la méthode des résidus comparatifs (147) et (147)', les résidus des troisièmes puissances des nombres naturels, telles qu'elles sont données dans la table (148) de M. Augé, on trouvera, pour le nombre (27), la même résidu cubique, savoir . . . (208')

$$(27)^3 \equiv +911, \quad (\text{mod.} = 4693).$$

On aura donc, pour une deuxième racine indépendante x , en vertu de la troisième des expressions (206)', la détermination . . . (209)

$$x \equiv (-27).(-1173)^{10} + 4693.f;$$

dans laquelle, d'après la notation (75) et la règle (75)', on trouvera facilement le résidu . . . (209')

$$(-1173)^{10} \equiv +1069, \quad (\text{mod.} = 4693);$$

de sorte que l'on aura définitivement, pour cette deuxième racine indépendante x , la valeur . . . (209'')

$$x \equiv (-27).(+1069) \equiv -705 + 4693.f.$$

Et avec cette deuxième valeur de la racine x , jointe à la présente valeur (206)' de la quantité Q , les expressions (193) donneront, pour les coefficients A et B, les valeurs . . . (209''')

$$A \equiv (1-4x) \equiv +2821, \quad \text{et} \quad B \equiv (x-Q) \equiv +468,$$

dont le plus grand diviseur commun est 13. Donc, ce nombre 13 sera nécessairement un des facteurs du nombre proposé 4693. En effet, on a réellement . . . (210)

$$4693 \equiv 13 \times 361.$$

En ne perdant pas de vue que les racines x qui sont données par la dernière des expressions (206)', sont proprement les racines de la congruence auxiliaire (185), laquelle, comme partie constituante, entre dans notre présente solution du problème des facteurs, et de laquelle le résidu a , déterminé par l'expression (187), reçoit ici, avec les quantités adoptées $n=3$ et $k=2$, la valeur . . . (211)

$$a \equiv (-1)^{w+1} \cdot N \left[\frac{4693}{64}, \zeta \right]^{(w-1)} \equiv +220,$$

on comprendra, d'après notre théorie précédente, que la troisième racine indépendante x de cette congruence auxiliaire (185), telles que ces racines sont données toutes par la dernière expression (206)', servirait, de la même ma-

nière, à la détermination, par leur construction générale (195), des coefficients A et B dont le plus grand diviseur ferait également connaître l'un des facteurs du nombre proposé 4693. En effet, sans même recourir à cette dernière des expressions (206)', en observant que nous connaissons déjà deux de ces trois racines x en question, savoir, la racine (207) et la racine (209)', le théorème (80)', qui serait ici . . . (212)

$$(-1173) \cdot (-703) \cdot x \equiv 220, \quad (\text{mod.} = 4693),$$

nous donnerait immédiatement, par la règle (27) et (28), la troisième racine x , savoir . . . (212')

$$x = -1732 + 4693 \cdot j.$$

Et alors, en combinant cette valeur de x avec la susdite valeur (206)' de Q, les expressions (195) nous donneraient, pour les coefficients A et B en question, les nouvelles valeurs . . . (212'')

$$A = (1 - 4x) = + 6929, \quad \text{et} \quad B = (x - Q) = - 559,$$

dont le plus grand diviseur commun, qui est encore 13, en faisant abstraction du signe, indique de nouveau que ce nombre 13 est un des facteurs du nombre proposé 4693.

C'est ici le lieu de faire remarquer la différence essentielle qui se trouve entre les racines que nous nommons *indépendantes* et qui sont données par les expressions générales, élémentaire (95) ou systématique (99), c'est-à-dire, entre les racines indépendantes des congruences fondamentales (85), et les racines que l'on peut déduire de ces racines indépendantes, par l'influence du module M, et que nous nommerons racines *dérivées*. Par exemple, dans la présente congruence auxiliaire (185), qui, par suite de la valeur (211) de son résidu a , est . . . (213)

$$x^3 \equiv 220, \quad (\text{mod.} = 4693),$$

nous venons d'obtenir, par les susdites expressions générales (88) ou (95), les trois racines indépendantes . . . (213')

$$x_1 = -1173, \quad x_2 = -703, \quad \text{et} \quad x_3 = -1732,$$

et dans cette même congruence (213), on peut encore déduire, de la première x , de ces racines indépendantes, plusieurs racines *dérivées*, telles que sont les racines . . . (213'')

$$x_4 = + 17, \quad \text{et} \quad x_5 = + 1156,$$

qui satisfont également à la présente congruence (213). En effet, on a aussi . . . (213''')

$$(17)^3 - 220 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 4693); \quad \text{et}$$

$$(1156)^3 - 220 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 4693).$$

Ces racines *dérivées*, dont le nombre est généralement indéterminé, proven-

ment, comme nous venons de le dire, de l'influence du module dans l'une des racines indépendantes, comme dans l'exemple présent, où les deux racines dérivées x_1 et x_2 proviennent de la racine fondamentale x , de la manière que voici . . . (214)

$$\begin{aligned}(17)^3 &\equiv (-70.4693 + 1).(17)^3 \equiv (-69).(17)^3 \equiv (-1173)^3; \\ (1156)^3 &\equiv (68).(17)^3 \equiv (67.4693 + 1).(17)^3 \equiv (17)^3, \\ \text{et par conséquent,} \quad (1156)^3 &\equiv (-1173)^3.\end{aligned}$$

Quant aux racines indépendantes, dont le nombre ne saurait être plus grand que le degré m de la congruence fondamentale (14) ou (83), et qui, comme nous venons de le dire, sont toujours données par leurs expressions générales (95) et (99), elles s'établissent évidemment par le principe de la première des générations téléologiques (15), qui implique ce degré m ; comme cela résulte, d'abord, des procédés (40) et (42), par lesquels nous sommes parvenu à cette expression générale et primitive (46) des racines en question, et ensuite, des procédés (137), (137)' et (139)', par lesquels nous avons fixé le nombre des racines rationnelles et réelles. — Or, ce sont proprement ces racines indépendantes qui, telles qu'elles sont ici données par la congruence auxiliaire (185), sont seules propres à la construction (195) des coefficients A et B dont le plus grand diviseur commun donne l'un des facteurs du nombre proposé M, et sert ainsi, d'après notre théorie présente, à la solution du problème de la décomposition des nombres en leurs facteurs, comme nous venons de le voir dans les exemples précédents (203)' et (206)', surtout dans le dernier (206)', par l'application des trois racines indépendantes (213)'. En effet, l'application des racines dérivées dans la congruence auxiliaire (185), telles que sont ici, pour la congruence (213), les deux racines dérivées (213)'', ne saurait qu'accidentellement conduire aux coefficients A et B en question qui donnent la solution du problème. Pour nous en convaincre, introduisons successivement, dans la construction (195) de ces coefficients A et B, chacune des deux présentes racines dérivées (213)'. La première $x_1 = 17$ de ces racines, en y joignant la susdite (206)' valeur de Q, donnera, par les expressions (195), les valeurs . . . (215)

$$\begin{aligned}A &= (1 - 4.x_1) = 1 - 68 = -67, \quad \text{et} \\ B &= (x_1 - Q) = 17 + 1173 = +1190,\end{aligned}$$

entre lesquelles il n'existe point de diviseur commun. Et la seconde $x_2 = 1156$ de ces racines dérivées (213)' donnera de même, par les expressions (195), les valeurs . . . (215')

$$\begin{aligned}A &= (1 - 4.x_2) = 1 - 4624 = -4623; \quad \text{et} \\ B &= (x_2 - Q) = 1156 + 1173 = +2329,\end{aligned}$$

entre lesquelles il n'existe pas non plus de diviseur commun.

Pour mieux approfondir la différence qui se trouve entre les racines *indépendantes* et les racines *dérivées* des congruences fondamentales (14) ou (85), telle que nous venons de la signaler, il nous reste à faire connaître le véritable principe des dernières, c'est-à-dire, des racines *dérivées*. — Or, ce principe doit être contenu dans l'expression générale (99), et par conséquent dans l'expression élémentaire (93) ou (88) des racines de ces congruences. Et en effet, si l'on dépouille ces expressions de leur principal caractère téléologique, c'est-à-dire, de l'influence du genre k , en y faisant $k = 1$ ou $k = 0$, ce qui a ici le même résultat, l'expression élémentaire (88) se réduira à la forme purement algébrique . . . (216)

$$x = [a + M.i]^{\frac{1}{m}},$$

sous laquelle, par l'influence du nombre arbitraire i , se trouvent données indistinctement, et les racines indépendantes, et les racines dérivées, de la congruence fondamentale . . . (216')

$$x^m \equiv a, \quad (\text{mod. } = M).$$

Et dans cette forme (216'), où il suffit que la quantité $(a + Mi)$ soit une puissance exacte du degré m , on voit que le nombre des racines x demeure indéterminé, et peut même être infini. Par exemple, dans la congruence . . . (217)

$$x^2 \equiv 1, \quad (\text{mod. } = 8),$$

les racines x , d'après leur présente forme algébrique (216'), seront . . . (217')

$$x = [1 + 8.i]^{\frac{1}{2}} = 1 + 2p,$$

en désignant par p un nombre entier quelconque, y compris zéro. Et par conséquent, le nombre de ces racines est infini. — Il faut ici remarquer que notre susdite méthode d'exclusion (159) et (159'), dont le cas le plus particulier (162) était tout ce que la science avait pour résoudre, au moins par tâtonnement, les congruences fondamentales (216'), se fonde encore uniquement sur la présente forme purement algébrique (216') des racines, et par conséquent que l'application de ces méthodes de tâtonnement (159) et (162), en conduisant ainsi indistinctement aux racines indépendantes et aux racines dérivées, ne peut qu'accidentellement faire connaître les racines indépendantes, lesquelles dépend, entre autres grandes questions, notre présente solution du problème de la décomposition des nombres en leurs facteurs. — Mais, revenons à cette solution.

Dans notre deuxième exemple (210), nous avons décomposé le nombre 4693 en ses deux facteurs 13 et 361. Il nous resterait donc, pour la décomposition complète du nombre 314431, pris pour premier exemple, à décomposer le nombre 361; et ce serait là le troisième et dernier des exemples

présents. — Or, suivant la remarque que nous avons faite plus haut, en donnant la théorie de cette décomposition des nombres, il faut, avant d'appliquer les procédés qui y conduisent, examiner, par l'application des règles de l'extraction des racines, si le nombre proposé n'est pas une puissance d'un degré quelconque. Et c'est ainsi qu'on découvrira ici facilement que le dernier nombre en question, le nombre 361, est un carré exact, savoir . . . (218)

$$361 = (19)^2.$$

En résumant donc les résultats (205)', (210), et (218) des trois exemples précédents, nous aurons, pour la décomposition complète du nombre 314431 proposé dans le premier de ces exemples, les facteurs . . . (219)

$$314431 = 67 \times 13 \times (19)^2.$$

Nous avons choisi ce nombre 314431 parce que, comme on vient de le voir, nous avons tout à la fois rencontré, dans sa décomposition, tous les différents cas que nous avons prévus dans la théorie. — Il est sans doute superflu de faire remarquer que les procédés que nous venons de suivre, s'appliqueraient de la même manière à tout autre nombre, quelque grand qu'il puisse être. La seule différence que l'on trouverait, c'est que le travail de ces calculs serait proportionnellement plus grand, comme cela est nécessaire et par conséquent inévitable par la nature même de cette grande question. Mais, ce qu'il faut ici remarquer essentiellement, c'est que, dans le cas présent (219), comme dans tous les autres cas possibles, quelque grands que puissent être les nombres proposés, la découverte des facteurs s'opère toujours d'une manière tout à fait directe, c'est-à-dire, sans aucun tâtonnement quelconque. Et nous pouvons ainsi affirmer que ce grand problème de la décomposition des nombres en leurs facteurs, qui, peut-être à la honte de la science, en rejetant les moyens de tâtonnement, est demeuré insubmersible jusqu'à ce jour, se trouve enfin résolu directement et de la manière la plus complète par l'application de notre présente loi téléologique (15), constituant la troisième et dernière loi fondamentale de la réforme des mathématiques.

Nous allons terminer cette question de la décomposition des nombres par l'examen des cas singuliers provenant encore du genre k et de l'exposant n qui, comme nous venons de le voir, entrent dans sa solution; cas singuliers que nous nous sommes proposé plus haut de signaler également. — Or, pour ce qui concerne le genre k qui, d'après ce que nous savons maintenant, est le caractère distinctif des véritables questions téléologiques dans la Théorie des Nombres, il est manifeste que, dans la présente question de la décomposition des nombres, comme dans toutes les autres, en réduisant le genre k à la valeur de zéro, cette présente question téléologique se trouvera réduite à une question purement algébrique. Et alors, nous retomberons dans les erre-

ments algébriques dans lesquels, jusqu'à ce jour, on a infructueusement traité cette grande question.

En effet, faisant $k = 0$ et même $k = 1$, l'expression (187) donnera, pour le résidu a de la congruence auxiliaire (185), la valeur $a \equiv 1$; et cette congruence sera alors simplement . . . (220)

$$x^k \equiv 1, \pmod{M}.$$

De plus, l'expression (188) donnera alors, pour la quantité auxiliaire Q , la valeur $Q \equiv 1$; et par conséquent, l'expression générale (188) des racines x de la présente congruence auxiliaire (220), sera . . . (221)

$$x = [1 + Mi]^{\frac{1}{k}} + Mj,$$

et se réduira ainsi à la forme purement algébrique (216) de ces racines x des congruences fondamentales (216). Or, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, à la suite de l'exemple (217), il est notoire que, sous la présente forme purement algébrique (221), les racines x de la congruence auxiliaire (220) ne sauraient être découvertes que par nos susdits procédés de tâtonnement (159) et (162). Ainsi, en suivant les principes généraux (189) et (190) de notre résolution du problème en question, principes d'après lesquels les quantités indéterminées x et y , données par l'expression (190), deviendraient égales pour le cas présent de $k = 0$ ou de $k = 1$, et réduiraient la congruence auxiliaire (189) à sa forme présente (220), en suivant, disons-nous, ces principes généraux, l'expression résultante (221) des racines x ne pourrait faire connaître ces racines autrement que par les procédés de tâtonnement (159) et (162). Aussi, en se tenant dans ces errements purement algébriques qui résultent de la valeur $k = 0$ ou $k = 1$ du genre k , n'a-t-on pu, dans la présente question de la décomposition des nombres, s'élever au delà du cas le plus particulier (220) et (221) de notre résolution générale et définitive de cette grande question. Et par conséquent, on n'a pu, jusqu'à ce jour, tenter la solution de cette question que par les procédés de tâtonnement (159) et (162), spécialement par le dernier (162) de ces procédés, qui répond également au cas purement algébrique de $k = 0$ ou de $k = 1$ (*). Bien plus, en observant que, dans ce cas particulier (220) et (221), la valeur de la quantité auxiliaire Q est $Q \equiv 1$, les expressions (195) des susdits coefficients A et B donnent, pour ce cas algébrique de $k = 0$ ou $k = 1$, les valeurs identiques . . . (222)

$$A \equiv (1 - x), \quad \text{et} \quad B \equiv -(1 - x);$$

* Nous ne parlons pas ici de la prétendue méthode par les formes des nombres, parce que, comme elle exige la connaissance des nombres premiers, elle ne mériterait pas même le nom de méthode.

de sorte que ces coefficients, dont le plus grand diviseur commun devrait indiquer l'un des facteurs du nombre proposé M , ne sauraient alors faire connaître, immédiatement par eux-mêmes, ce facteur cherché. Il faudrait donc employer le nombre $(1-x)$ qui forme alors la valeur identique de ces coefficients A et B , et chercher, entre ce nombre $(1-x)$ et le nombre proposé M , le plus grand diviseur commun; ce qui serait, pour ainsi dire, un nouveau tâtonnement.

Toutefois, pour éviter le tâtonnement principal qu'exigerait la détermination (221) des racines x de la congruence particulière (220) à laquelle conduiraient ici les valeurs $k=0$ ou $k=1$ du genre k , on pourrait appliquer immédiatement, à la résolution de cette congruence auxiliaire (220), nos procédés téléologiques, élémentaires (88) ou (95), et même systématique (99). En effet, le procédé élémentaire (88) donnerait ici, pour les racines x de la congruence en question (220), l'expression générale . . . (223)

$$x = \left[\left((1^{1/n})^m \right)^p + M i \right]^{\frac{1}{n}} \times Q^p + M j;$$

en faisant toujours auxiliairement . . . (223')

$$Q = (-1)^{n+1} \cdot n \left[\frac{M}{(1^{1/n})^n} + \pi \right]^{n-1},$$

et en donnant ici au genre k toute valeur arbitraire dans les limites qui lui sont assignées. Mais, sans compter les autres inconvénients qu'il nous reste encore à signaler, cette expression particulière (223) exigerait autant de calculs que l'expression générale (196), et la racine x qu'elle ferait découvrir, ne pourrait servir qu'à la détermination (222) des valeurs identiques des coefficients A et B , qui, sous leur forme générale (195), conduisent directement à la solution de la question. Il serait donc peu convenable de faire ici les mêmes calculs pour arriver aux résultats (222) moins directs que les résultats (195), quand même, comme nous venons de l'annoncer, il n'y aurait pas d'autres inconvénients. — Par exemple, si l'on se proposait de décomposer le nombre 4693, comme dans le deuxième (110) des exemples précédents, on aurait $M=4693$; et faisant $n=3$ et $k=2$, l'expression particulière (223) ferait découvrir facilement, pour la solution de la congruence auxiliaire (220), c'est-à-dire, pour la congruence spéciale . . . (224)

$$x^3 \equiv 1, \quad (\text{mod.} = 4693),$$

les trois racines indépendantes . . . (224')

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1873, \quad \text{et} \quad x_3 = 2458;$$

dont les deux dernières, en vertu des expressions (222), feraient connaître respectivement les valeurs identiques des coefficients A et B , savoir . . . (224)''

$$\begin{array}{ll} A, = -1873, & B, = +1873; \quad \text{et} \\ A, = -2457, & B, = +2457. \end{array}$$

Il faudrait donc chercher, entre l'une ou l'autre de ces valeurs identiques et le nombre proposé 4693, le plus grand diviseur commun; et l'on trouverait effectivement, pour chacune de ces valeurs (224)^{re}, le nombre 13. — Mais, comme nous venons de le dire, ce recours au cas particulier (220), et ici (224), serait inutile et même peu coovenable, puisque, dans le cas général (185) et dans la même question présente (206)^{re}, on obtient, tout à fait par le même calcul, les racines (209)^{re} et (212)^{re} qui donnent respectivement, pour les coefficients A et B, les valeurs différentes (209)^{re} et (212)^{re}, dont le plus grand diviseur commun fait connaître immédiatement le facteur 13 du nombre proposé 4693, sans qu'il soit nécessaire d'essayer des divisions sur ce nombre proposé, comme dans le cas particulier (224) qui donne, pour ces coefficients A et B, les valeurs identiques (224)^{re}.

Ce n'est même pas là le plus grand inconvénient de recourir ainsi, dans notre question présente, au cas particulier (220) qui résulte de la valeur de $k \equiv 0$, c'est-à-dire, de la destruction du caractère téléologique dans cette grande question. En effet, l'inconvénient principal serait alors qu'on ne pourrait prendre arbitrairement, pour l'exposant n de la congruence auxiliaire (220), tout nombre entier, et que l'on n'aurait, pour cet exposant n , qu'une certaine classe de nombres entiers, dépendant du nombre proposé M , lorsque, comme on devrait le supposer, ce nombre M pourrait être un nombre premier. — Nous allons en voir la raison, et fixer cette classe spéciale de nombres n qui dépendraient ici du nombre proposé M .

Si l'on désigne par r l'une des racines x , différente de l'unité, dans la congruence auxiliaire (220) dont il est question, on aurait, par rapport au module M , les congruences . . . (225)

$$r^n \equiv 1; \quad \text{et par conséquent,} \quad r^{2n} \equiv 1,$$

pour un nombre entier et quelconque μ . On aurait donc, du moins pour une solution partielle de cette congruence spéciale (220), la congruence complètement déterminée . . . (225')

$$(r^\mu)^n \equiv 1, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

c'est-à-dire qu'une puissance quelconque μ de la racine r serait également une racine de la congruence en question (220), savoir, de la congruence . . .

$$\dots (226) \quad x^n \equiv 1, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

En désignant donc par $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ certaines racines de cette congruence, et par $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ les résidus des puissances $r, r^2, r^3, \dots, r^n$, on aurait . . . (226')

$x_1 \equiv r \equiv r_1$, $x_2 \equiv r^2 \equiv r_2$, $x_3 \equiv r^3 \equiv r_3$, . . . $x_n \equiv r^n \equiv r_n$,
en observant qu'en vertu de la première des congruences (225), le dernier
 r_n de ces résidus serait égal à l'unité, c'est-à-dire que l'on aurait . . . (226)"

$$r^n \equiv r_n \equiv 1, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

Ainsi, dans l'exemple précédent (224), savoir . . . (227)

$$x^3 \equiv 1, \quad (\text{mod.} \equiv 4693),$$

dans lequel nous avons trouvé, sous la marque (224)', que les deux racines
différentes de l'unité sont 1873 et 2458, si nous faisons d'abord $r \equiv 1873$,
nous aurons effectivement . . . (227)'

$$r^2 \equiv (1873)^2 \equiv 3508129 \equiv 2458, \quad \text{et} \quad r^3 \equiv 1;$$

et si nous faisons ensuite $r \equiv 2458$, nous aurons également . . . (227)''

$$r^2 \equiv (2458)^2 \equiv 6041764 \equiv 1873, \quad \text{et} \quad r^3 \equiv 1.$$

Et il faut encore remarquer essentiellement que, par suite de la relation (226)",
qui indique que le dernier résidu r_n a la valeur $r_n \equiv 1$, les résidus r_{n+1} ,
 r_{n+2} , r_{n+3} , etc., des puissances ultérieures r^{n+1} , r^{n+2} , r^{n+3} , etc., de la ra-
cine r différente de l'unité, auront périodiquement les mêmes valeurs succes-
sives r_1 , r_2 , r_3 , etc., c'est-à-dire que, pour un nombre entier quelconque p ,
y compris zéro, on aura, pour la congruence spéciale (226), la suite pério-
dique des résidus . . . (228)

$$r^{m+1} \equiv r_1, \quad r^{m+2} \equiv r_2, \quad r^{m+3} \equiv r_3, \quad \text{etc.,}$$

jusqu'à $r^{m+p} \equiv r_p \equiv 1.$

Or, c'est cette périodicité des résidus présents r_1 , r_2 , r_3 , etc., qui empêche
que, dans la congruence auxiliaire (226) ou (220) dont il est question, on
ne puisse prendre, pour son exposant n , tout nombre entier, lorsque, comme
on doit la faire dans cette question, on suppose que le nombre proposé M ,
qui forme le module de cette congruence (226), pourrait être un nombre
premier. — Nous allons le prouver en faisant connaître, à cette occasion,
pour caractériser l'exclusion de toute finalité dans les nombres premiers, le
véritable principe téléologique de ces nombres; principe duquel nous dédui-
rons ici, comme cas particuliers, les théorèmes connus qui concernent ces
nombres inertes ou dénués de finalité, et qui, ainsi qu'on peut le prévoir,
nous serviront pour la preuve dont il s'agit.

Dans toutes les véritables questions téléologiques de la Théorie des Nombres,
le genre k de ces questions en est le caractère distinctif, comme nous l'a-
vons déjà fait remarquer. Ainsi, dans la présente question des nombres pre-
miers, pour avoir le véritable principe de ces nombres, en tant qu'il doit
y exclure toute finalité, il faut le découvrir dans son état téléologique; et
dans cet état, il faut, comme critérium téléologique, qu'il implique, dans

son expression, le genre k auquel se rapporte alors, par l'exclusion de finalité, tout nombre premier. Et l'on prévoit de plus à priori que lorsque, dans cette expression du véritable principe dont il s'agit, dans cette expression qui, par là même, sera, du moins négativement, la LOI TÉLÉOLOGIQUE DES NOMBRES PREMIERS, lorsque, disons-nous, on y fera $k = n$, elle se réduira nécessairement au principe purement algébrique des nombres premiers, à ce principe qui, sous le nom de deux théorèmes, différents dans la forme mais identiques dans le fond, est seul connu jusqu'à ce jour. — Or, sans entrer ici dans les déductions ultérieures, que nous produirons dans notre susdit traité de la Théorie des Nombres, si l'on désigne généralement par ϖ tout nombre premier, et par x tout nombre entier non congruent avec le nombre ϖ , et si l'on prend arbitrairement deux nombres entiers quelconques φ et ψ , positifs, négatifs, ou zéro, le véritable principe des nombres premiers, leur négative loi téléologique, constitue, par rapport au genre arbitraire k , la congruence générale . . . (229)

$$(\varphi\varpi + 1)^{k/2} \cdot (\psi\varpi + 1)^{(w-k-\varpi)/2} + (-1)^k \cdot x^{w-1} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = \varpi);$$

ou bien simplement . . . (230)

$$1^{k/2} \cdot 1^{(w-k-\varpi)/2} + (-1)^k \cdot x^{w-1} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = \varpi);$$

en faisant $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Et dans cette loi, comme dans toutes les expressions téléologiques, le genre k reçoit arbitrairement toutes les valeurs que nous lui avons assignées dans notre fondamentale loi téléologique (15). D'ailleurs, dans la présente loi (230), les limites de ces différentes valeurs du genre k se trouvent fixées par cette loi elle-même; car, on y voit que son expression (230) ne présente des déterminations essentiellement distinctes que pour les valeurs de k comprises dans les limites de $k = 0$ et de $k = \frac{\varpi-1}{2}$; limites qui sont précisément celles que, dans notre loi fondamentale (15), nous avons assignées aux valeurs arbitraires de ce genre k .

Or, si l'on fait d'abord $x = 1$, la loi (230) se réduit à la forme spéciale . . . (231)

$$1^{k/2} \cdot 1^{(w-k-\varpi)/2} \equiv (-1)^{k+1}, \quad (\text{mod.} = \varpi);$$

et sous cette forme, comme sous la forme générale (230), elle présente $\frac{\varpi+1}{2}$

déterminations différentes. — Nous nous bornerons ici à signaler, parmi ces déterminations différentes, les deux extrêmes qui correspondent aux limites du genre k , savoir, à $k = 0$ et à $k = \frac{\varpi-1}{2}$. Nous aurons ainsi, d'abord, pour la dernière de ces valeurs de k , la détermination . . . (232)

$$\left(1^{\frac{\varpi-1}{2}}\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{\varpi+1}{2}}, \quad (\text{mod.} = \varpi);$$

c'est-à-dire . . . (232')

$$\left\{ 1.2.3 \dots \frac{\vartheta-1}{2} \right\}^{\vartheta} \equiv (-1)^{\frac{\vartheta+1}{2}}, \quad (\text{mod.} = \vartheta).$$

Par exemple, pour les nombres premiers $\vartheta = 17$ et $\vartheta = 19$, nous aurions

. . . (232)''

$$(1.2.3.4.5.6.7.8)^8 \equiv -1, \quad (\text{mod.} = 17); \quad \text{et}$$

$$(1.2.3.4.5.6.7.8.9)^8 \equiv +1, \quad (\text{mod.} = 19).$$

En effet, on a . . . (232)'''

$$(1^{17})^8 + 1 = 1625702401 = 17 \times 95649553;$$

$$(1^{19})^8 - 1 = 131681894399 = 19 \times 6930626021.$$

Et ensuite, pour la première des susdites valeurs extrêmes du genre k , savoir, pour $k = 0$, nous aurons la détermination . . . (233)

$$1^{(\vartheta-1)^2} \equiv -1, \quad (\text{mod.} = \vartheta);$$

c'est-à-dire . . . (233')

$$\left\{ 1.2.3 \dots (\vartheta-1) \right\} + 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = \vartheta).$$

C'est là le théorème de Wilson, lequel, à cause qu'il répond ainsi à la valeur de $k = 0$, c'est-à-dire, à l'absence de toute finalité, ne forme qu'un théorème purement algébrique, comme nous le prouverons d'ailleurs ci-après.

Reprenons maintenant la loi générale (230), que nous pouvons mettre sous la forme . . . (234)

$$1^{k!} \cdot 1^{(\vartheta-k-1)!} \equiv (-1)^{k+1} \cdot x^{\vartheta-k-1}, \quad (\text{mod.} = \vartheta);$$

et comparons-la avec notre théorème général (80) et (80)', savoir, avec le théorème . . . (235)

$$(x_1, x_2, x_3 \dots x_m) \equiv a \cdot (-1)^{m-1}, \quad (\text{mod.} = M),$$

dans lequel les quantités $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ sont les racines de la congruence générale . . . (235')

$$x^m \equiv a, \quad (\text{mod.} = M).$$

Mais, pour établir cette comparaison, éliminons de ce théorème (235) le résidu a par le moyen de sa congruence correspondante (235)'; et nous aurons, pour le théorème en question, l'expression . . . (236)

$$(x_1, x_2, x_3 \dots x_m) \equiv (-1)^{m-1} \cdot x^m, \quad (\text{mod.} = M);$$

dans laquelle le module M et le degré m de la congruence (235)' sont généralement des nombres quelconques. Ainsi, pour comparer ce théorème (236) avec la loi (234), faisons $M = \vartheta$ et $m = (\vartheta - 1)$; et il deviendra . . .

. . . (237)

$$(x_1, x_2, x_3 \dots x_{\vartheta-1}) \equiv (-1)^{\vartheta} \cdot x^{\vartheta-1}, \quad (\text{mod.} = \vartheta);$$

les racines $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\varpi-1}$, étant alors les racines de la congruence

$$x^{\varpi-1} \equiv a, \quad (\text{mod.} \equiv \varpi),$$

dont le résidu a peut avoir une valeur quelconque. — Or, en observant que, par la nature des factorielles, on a . . . (237)

$$1^{(\varpi-k-1)!} \equiv 1^{k!}, (1+k)^{(\varpi-k-1)!};$$

notre loi (234) se réduira à la forme . . . (238)

$$(-1)^k \cdot (1^{k!})^3 \cdot (1+k)^{(\varpi-k-1)!} \equiv -x^{\varpi-1}, \quad (\text{mod.} \equiv \varpi);$$

c'est-à-dire, à la forme . . . (239)

$$1^{k!} \cdot (-1)^{k!-1} \cdot (1+k)^{(\varpi-k-1)!} \equiv -x^{\varpi-1}, \quad (\text{mod.} \equiv \varpi).$$

De plus, en éliminant le premier membre de notre loi (234) par le premier membre de la congruence spéciale (231), cette loi (234) se réduira en outre à la forme de la simple congruence . . . (239')

$$x^{\varpi-1} \equiv 1, \quad (\text{mod.} \equiv \varpi).$$

Comparons maintenant ces deux expressions (239) et (239') de notre loi générale (234) des nombres premiers, avec les deux théorèmes correspondants (237) et (237'), dans lesquels, pour tout nombre premier plus grand que 2, nous avons $(-1)^{\varpi} \equiv -1$, et dans lesquels le résidu a représente tout nombre entier et par conséquent l'unité; et nous découvrirons, par cette comparaison, que les $(\varpi-1)$ racines x de la congruence (239') à laquelle se réduit ici notre loi (234), se trouvent données par les $(\varpi-1)$ facteurs du premier membre de la congruence (239) à laquelle se réduit également notre loi (234) des nombres premiers. Nous aurons donc, pour la détermination générale de ces $(\varpi-1)$ racines x de la congruence (239'), les congruences spéciales . . . (240)

$$x_1 \equiv +1, \quad x_2 \equiv +2, \quad x_3 \equiv +3, \quad x_4 \equiv +4, \dots, x_k \equiv +k, \\ x_{k+1} \equiv -1, \quad x_{k+2} \equiv -2, \quad x_{k+3} \equiv -3, \dots, x_{\varpi-1} \equiv -k, \\ x_{\varpi-k} \equiv (1+k), \quad x_{\varpi-k+1} \equiv (2+k), \quad x_{\varpi-k+2} \equiv (3+k), \dots, x_{\varpi-1} \equiv (\varpi-k-1);$$

quelle que soit la valeur du genre k . Et par conséquent, d'après les susdites limites de ces valeurs arbitraires du genre k , nous aurons ici également $\frac{\varpi+1}{2}$

déterminations différentes pour ces racines (240) de la congruence (239') à laquelle se réduit notre loi générale (234). — Nous nous bornerons de nouveau à signaler ici, parmi ces déterminations différentes, les deux extrêmes qui répondent aux limites du genre k , savoir, à $k=0$ et à $k=\frac{\varpi-1}{2}$. Nous

aurons ainsi, pour la dernière de ces valeurs de k , la détermination . . . (241)

$$x_1 \equiv +1, \quad x_2 \equiv +2, \quad x_3 \equiv +3, \quad \dots, \quad x_{\frac{\varpi-1}{2}} \equiv +\frac{\varpi-1}{2},$$

$$x_{\frac{\varpi+1}{2}} \equiv -1, \quad x_{\frac{\varpi+3}{2}} \equiv -2, \quad x_{\frac{\varpi+5}{2}} \equiv -3, \quad \dots, \quad x_{\varpi-1} \equiv -\frac{\varpi-1}{2};$$

qui offrirait, dans ce cas extrême, les racines de la congruence (239)' à laquelle se réduit ici notre loi générale (234). Et ensuite, pour la première des susdites valeurs extrêmes du genre k , savoir, pour $k \equiv 0$, où le théorème (239) se réduit à la forme . . . (242)

$$x^{(\varpi-1)/2} \equiv -x^{\varpi-1}, \quad (\text{mod.} \equiv \varpi);$$

les congruences spéciales (240) nous donneront, pour les $(\varpi-1)$ racines x de la congruence générale (239)' en question, c'est-à-dire, pour la congruence . . . (242)'

$$x^{\varpi-1} \equiv 1, \quad (\text{mod.} \equiv \varpi),$$

à laquelle se réduit ici notre loi générale (234) des nombres premiers, les valeurs . . . (243)

$$x_1 \equiv 1, \quad x_2 \equiv 2, \quad x_3 \equiv 3, \quad x_4 \equiv 4, \quad \dots, \quad x_{\varpi-1} \equiv (\varpi-1).$$

C'est là la théorie de Fermat, lequel, à cause qu'il répond ainsi à la valeur de $k \equiv 0$ dans notre négative loi téléologique (234), c'est-à-dire, à l'absence de toute finalité, ne forme aussi qu'un théorème purement algébrique, comme nous allons d'ailleurs le prouver également.

Avant de procéder à cette preuve, nous devons faire remarquer, par les différents résultats que nous venons de tirer de notre loi générale (230) des nombres premiers, que cette loi, malgré l'influence du genre k qui caractérise les questions téléologiques, n'est au fond qu'une loi arithmétique, et n'a ainsi, par cette influence du genre k , qu'une forme téléologique. En effet, tous les résultats différents que nous venons de tirer de cette loi, et

qui, quant à la forme, constituent respectivement les susdites $\frac{\varpi+1}{2}$ déterminations différentes, sont au fond tout à fait identiques, puisqu'ils ne diffèrent que par la substitution de nombres congruents avec ϖ , à la place de ceux qui en sont respectivement les parties constituantes; de sorte que toutes ces déterminations différentes se résument au fond, d'une part, dans le théorème de Wilson, et de l'autre, dans le théorème de Fermat, dans ces deux théorèmes qui, à leur tour, sont identiques dans le fond, par le lien qu'établit entre eux notre théorème général (235) et (235)'. — C'est aussi ce qui devait avoir lieu effectivement dans la loi générale (230) des nombres premiers, parce que ces nombres sont dépourvus de toute finalité, en tant qu'ils ne peuvent être engendrés que par un seul des trois algorithmes primitifs, nommément par le seul algorithme de la soustraction, addition ou soustraction,

c'est-à-dire, en tant qu'ils ne peuvent être engendrés également par aucun autre de ces trois algorithmes primitifs, comme peuvent l'être les nombres composés, dont la génération peut en outre être opérée par l'algorithme de la reproduction, multiplication ou division; ce qui donne, à ces nombres composés, le caractère de finalité, comme résultant ainsi indistinctement du concours final des deux algorithmes opposés et hétérogènes, de la sommation et de la graduation, dont le lien est formé par l'algorithme neutre de la reproduction. En effet, dans cet état d'absence de toute finalité, les nombres premiers ne peuvent, dans leur génération, être régis par une véritable loi téléologique, laquelle, au fond, implique toujours une finalité dans la génération des nombres; ils ne peuvent, tout au plus, être régis que par une NÉGATIVE LOI TÉLÉOLOGIQUE, c'est-à-dire, par une loi qui, avec l'influence du genre k , formant le caractère téléologique, serve précisément à signaler ainsi l'exclusion de toute finalité dans ces nombres premiers. Comme telle, cette véritable loi des nombres premiers n'aura proprement qu'une ENNEA TÉLÉOLOGIQUE, et sera au fond une véritable LOI ALGÈBRE. — Telle est en effet la loi générale (230) que nous venons de découvrir pour les nombres premiers, et qui, par l'influence du genre k , de ce critérium téléologique, ne fait qu'exclure toute finalité, en ramenant toujours, pour toutes les valeurs du genre k , les mêmes résultats que donne cette loi pour la valeur $k = 0$, qui, par ce zéro, signale l'absence de la finalité.

Nous pouvons maintenant, avant de poursuivre cette question générale des nombres premiers, comparer les racines spéciales (243) de la congruence (242)' dont le module est un nombre premier ϖ , avec la forme générale (226)' des racines dans les congruences (226) dont le résidu est l'unité. Et nous tirerons, de cette comparaison, la conclusion que, parmi les racines (243) de la congruence de Fermat (242)', il peut en exister qui, différentes de l'unité, sont telles que les résidus $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{w-1}$, de leurs puissances consécutives $x, x^2, x^3, \dots, x^{w-1}$, sont tous différents. Ce sont là les racines qui, dans toute congruence (226) dont le résidu est égal à l'unité, forment les racines primitives de cette congruence. Et nous concluons de plus, par la considération (228) des résidus périodiques, que, dans la congruence de Fermat (242)' dont il s'agit ici, les résidus des puissances de celles de ses racines (243) qui, quoiqu'elles diffèrent de l'unité, ne sont pas des racines primitives, forment des suites périodiques dans lesquelles l'unité, qui s'y trouvera toujours, correspondra aux puissances $x^a, x^{2a}, x^{3a}, \dots, x^{wa}$ telles que l'on aura . . . (244)

$$wa = (\varpi - 1),$$

c'est-à-dire que l'exposant primitif n sera toujours un sous-multiple exact de l'exposant $(\varpi - 1)$ de la congruence en question (242)'. — Ainsi, pour en revenir à notre précédente question (230) de la décomposition des nombres

en leurs facteurs, on l'on doit toujours supposer que le nombre proposé M pourrait être un nombre premier $\mathfrak{A}$, nous reconnaissons ici que l'exposant n dans la congruence auxiliaire (220), à laquelle se trouve réduite cette grande question (185) et (187), lorsqu'on y fait $k \equiv 0$, ne saurait être tout nombre entier et doit, pour la possibilité de la solution générale de cette congruence auxiliaire (220), former un sous-multiple exact du nombre $(M-1)$, en considérant ainsi le nombre proposé M comme pouvant être un nombre premier. — C'est là ce qu'il nous restait à dire pour signaler les cas singuliers que présente le choix de l'exposant n dans la congruence auxiliaire (220), dont le recours, en outre de ce grave inconvénient, est d'ailleurs tout à fait inutile, comme nous l'avons reconnu plus haut.

Procédons maintenant à la preuve qu'il nous reste à donner que les deux susdits théorèmes (233) et (243), de Wilson et de Fermat, auxquels se ridoit au fond notre loi générale (230) des nombres premiers, ne sont que des théorèmes purement algébriques, et nullement des théorèmes téléologiques. — Pour cela, en considérant toujours le nombre $\mathfrak{A}$ comme un nombre premier, concevons une suite de nombres $n_1, n_2, n_3, \dots, n_x$, dont aucun ne soit congruent avec le nombre premier $\mathfrak{A}$, et désignons par s la somme de ces nombres, c'est-à-dire, faisons . . . (245)

$$s = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_x,$$

où l'indice x qui désigne la quantité de ces nombres, est un nombre quelconque. Prenons maintenant, sur les deux membres de cette égalité (245), la factorielle du degré $\mathfrak{A}$, correspondant à un accroissement $\mu\mathfrak{A}$, dans lequel le facteur μ peut également être un nombre entier quelconque, positif, zéro, et même négatif; et nous aurons, entre ces factorielles respectives, l'égalité . . . (246)

$$(s)^{\mu\mathfrak{A}} = \{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_x\}^{\mu\mathfrak{A}}.$$

Or, en étendant le liocome de Vandermonde à des polynomes quelconques, nous aurons, en vertu de la loi des puissances des polynomes, que nous avons reproduite, à la marque (319)'', dans le second tome de notre *Philosophie de la Technie* (page 236), pour la présente factorielle du polynome qui forme le second membre de l'égalité (246), l'expression . . . (246)'

$$\{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_x\}^{\mu\mathfrak{A}} = 1^{\mu\mathfrak{A}} \cdot Agr. \left\{ \frac{(n_1)^{\mu\mathfrak{A}} \cdot (n_2)^{\mu\mathfrak{A}} \cdot (n_3)^{\mu\mathfrak{A}} \cdot \dots \cdot (n_x)^{\mu\mathfrak{A}}}{1^{m_1} \cdot 1^{m_2} \cdot 1^{m_3} \cdot \dots \cdot 1^{m_x}} \right\};$$

dans laquelle la caractéristique *Agr.* dénote l'agrégat des termes correspondants aux valeurs entières et positives, y compris zéro, des indices $m_1, m_2, m_3, \dots, m_x$, qui satisfont à l'équation . . . (246)''

$$\mathfrak{C} = m_1 + m_2 + m_3 \dots + m_x.$$

Ainsi, à l'exception des cas où chacun de ces indices m_1, m_2, m_3 , etc. devient successivement égal au nombre premier $\mathfrak{C}$, ces indices sont, dans tous les autres cas, plus petits que ce nombre $\mathfrak{C}$. Et par conséquent, dans tous ces derniers cas, le nombre premier $\mathfrak{C}$, qui entre dans la factorielle $1^{\mathfrak{C}}$, formant le facteur général de tous les termes de l'agrégat (246), subsiste toujours et nécessairement. Donc, tous ces termes où les indices $m_1, m_2, m_3, \dots, m_x$ sont tous plus petits que le nombre premier $\mathfrak{C}$, seront divisibles par ce nombre $\mathfrak{C}$. Et l'on voit ainsi, sans qu'il y ait ici besoin d'aucun principe téléologique, que l'égalité (246) se réduit à la congruence

(247)
 $(x)^{\mathfrak{C}} = (n_1)^{\mathfrak{C}} + (n_2)^{\mathfrak{C}} + (n_3)^{\mathfrak{C}} \dots (n_s)^{\mathfrak{C}}, \pmod{\mathfrak{C}};$
 congruence qui ne forme ainsi qu'une loi purement algébrique. — Par exemple, si le nombre premier $\mathfrak{C}$ était $\mathfrak{C} = 5$; et si l'on faisait $n_1 = 1, n_2 = 2, \mu = 1$, et par conséquent $x = 2$ et $s = 3$; on aurait, d'après la présente loi (247), la congruence . . . (248)

$$(2)^{15} - \{(1)^{15} + (2)^{15}\} \equiv 0, \pmod{5};$$

c'est-à-dire . . . (248')

$$3.8.13.18.23 - \{1.6.11.16.21 + 2.7.12.17.22\} \equiv 0, \pmod{5}.$$

En effet, éliminant les facteurs communs, on aura réellement . . . (248'')

$$9.13 - 7.11 = 40 \equiv 0, \pmod{5}.$$

On aura donc ainsi, dans cette congruence (247) de factorielles, une loi générale et purement algébrique des nombres premiers, parce que, d'après la déduction que nous venons d'en donner, cette loi ne subsiste manifestement que pour les seuls nombres premiers. — Or, c'est de cette loi (247) que nous allons déduire, comme simples corollaires, les deux susdits théorèmes de Wilson et de Fermat, pour prouver que ces théorèmes ne sont aussi que de simples relations algébriques, ainsi que nous l'avons déjà reconnu plus haut, en y déduisant ces mêmes théorèmes de notre loi fondamentale (230) des nombres premiers.

Avant tout, observons que, dans le cas le plus particulier où, dans la présente loi générale (247), le facteur arbitraire μ de l'accroissement μx des factorielles est zéro, c'est-à-dire, dans le cas où ces factorielles se réduisent à de simples puissances, la loi générale (247) prend la forme particulière . . . (249)

$$x^{\mathfrak{C}} \equiv n_1^{\mathfrak{C}} + n_2^{\mathfrak{C}} + n_3^{\mathfrak{C}} \dots + n_s^{\mathfrak{C}}.$$

C'est là le théorème de Gauss, qui n'est ainsi, comme toutes les lois qui

régissent les nombres premiers, rien autre qu'une simple relation algébrique, n'ayant aucun caractère téléologique. Toutefois, il faut remarquer que, sous ce point de vue purement algébrique, le présent théorème (249) de Gauss, quoiqu'il ne soit qu'un cas particulier de notre théorème général (247), est néanmoins ici le cas fondamental; car, dans le théorème général (247), l'accroissement $\mu\psi$ des factorielles est toujours un nombre congruent avec le module ψ .

Or, pour en venir à nos susdites déductions, supposons que, dans la loi générale et purement algébrique (247), on ait . . . (250)

$$n_1 = n_2 = n_3 = \text{etc.} = n_s = n;$$

et par conséquent $s = xn$. Cette loi (247) se réduira alors à la forme particulière . . . (251)

$$(xn)^{w/\psi} \equiv x.(n)^{w/\psi}, \quad (\text{mod.} = \psi);$$

c'est-à-dire, à la forme . . . (251')

$$xn. \{ (xn + \mu\psi)^{(w-1)/\psi} - (n + \mu\psi)^{(w-1)/\psi} \} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = \psi).$$

Donc, si le nombre x n'est pas non plus congruent avec le nombre premier ψ , on aura la congruence . . . (252)

$$(xn + \mu\psi)^{(w-1)/\psi} - (n + \mu\psi)^{(w-1)/\psi} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = \psi);$$

qui, en y faisant $\mu = 0$, se réduit à la congruence simple . . . (252')

$$x^{(w-1)} \equiv 1, \quad (\text{mod.} = \psi),$$

constituant le théorème de Fermat. Ainsi, comme nous nous sommes proposé de le prouver, ce théorème, en tant qu'il dérive de la loi purement algébrique (247) des nombres premiers, n'est en réalité qu'une simple relation algébrique. — Quant au théorème de Wilson, si l'on fait attention aux différentes racines (243) de la présente congruence de Fermat, et si l'on y élimine la puissance $x^{(w-1)}$ par notre susdit théorème (237), cette congruence (252') de Fermat se transformera dans la congruence . . . (253)

$$1^{(w-1)} = 1.2.3 \dots (\psi-1) \equiv (-1)^w, \quad (\text{mod.} = \psi),$$

qui, pour tout nombre premier ψ , constitue le théorème de Wilson. Ainsi, ce deuxième théorème, comme simple transformation de celui de Fermat, n'est également qu'une simple relation algébrique; car, notre théorème (237) ou originellement (235) qui sert ici à cette transformation, n'est lui-même qu'une simple relation algébrique, en tant qu'il dérive immédiatement de ce que, dans notre Philosophie des Mathématiques, nous nommons la *théorie des équivalences*, c'est-à-dire, de la théorie sur laquelle se fonde la formation des équations algébriques.

Toutefois, en considérant que ces deux théorèmes, de Fermat et de Wil-

son, sont des parties constituanes de la forme téléologique de notre loi générale (230) des nombres premiers, comme nous l'avons montré plus haut, et considérant de plus que ces deux théorèmes, dont celui de Fermat a été découvert le premier, ne sont que des transformations réciproques de l'un dans l'autre, comme nous venons de le voir, l'honneur d'un premier théorème fondamental pour les nombres premiers appartient à Fermat. Et quoique ce théorème soit le seul, absolument le seul véritable théorème fondamental que la science doive aux savants français, il suffit, par son importance et par sa fécondité, à constater la haute aptitude mathématique de ces illustres savants.

En effet, pour ce qui concerne l'importance du théorème de Fermat, nous venons de le signaler en montrant qu'il est une partie constituante, un élément de la forme téléologique (230) de la véritable loi des nombres premiers. Et pour ce qui concerne la fécondité de ce théorème, il suffit de faire remarquer que presque toutes les relations que les géomètres ont reconnues concernant les nombres premiers, découlent du théorème de Fermat ou du moins peuvent être rapportées à ce théorème. Nous nous bornerons ici à le montrer pour les principales de ces relations, en fixant en même temps les vraies conditions générales de la possibilité ou de l'impossibilité de nos congruences fondamentales (14) ou (45) et (85) dont nous avons donné les résolutions générales (46) et (99).

Pour cela, concevons, par rapport à un nombre premier p , la congruence générale . . . (254)

$$x^m \equiv q, \quad (\text{mod.} = p);$$

et supposons qu'elle est possible ou impossible, suivant que le nombre q , premier ou composé, est ou n'est pas ainsi un résidu par rapport à ce module p . Elevons alors les deux membres de cette congruence à la puissance $(p-1)$, savoir . . . (254')

$$x^{m(p-1)} \equiv q^{(p-1)}, \quad (\text{mod.} = p);$$

et cette nouvelle congruence, par suite de la présente influence du théorème de Fermat, sera toujours possible, en supposant généralement que les nombres q et x ne sont pas congruents par rapport au module p . Désignons maintenant par ω le plus grand diviseur commun des nombres m et $(p-1)$, et par μ le quotient de la division de m par ω . Nous aurons alors la congruence identique . . . (255)

$$\{[x^{p-1}]\}^\mu \equiv \left(\frac{q^{p-1}}{p}\right)^\mu, \quad (\text{mod.} = p).$$

Et par conséquent, en vertu du théorème de Fermat qui donne $(x^{p-1})^p \equiv 1$, nous aurons la congruence toujours possible . . . (255')

$$\left(\frac{p-1}{q}\right)^n - (1)^n \equiv 0, \quad (\text{mod.} = p);$$

laquelle, en y appliquant notre susdite loi fondamentale de la possibilité de la Théorie des Nombres, que nous avons appliquée à l'établissement de l'égalité (191), deviendra . . . (256)

$$\left(\frac{p-1}{q} - 1\right) \times N\left[\frac{p-1}{q} + 1\right]^{(n-1)} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = p);$$

la fonction aleph étant ici, comme dans l'égalité (191), une de nos fonctions alephs algébriques, savoir . . . (256')

$N\left[\frac{p-1}{q} + 1\right]^{(n-1)} = \left(\frac{p-1}{q}\right)^{n-1} + \left(\frac{p-1}{q}\right)^{n-2} + \left(\frac{p-1}{q}\right)^{n-3} + \dots + \left(\frac{p-1}{q}\right)^0$; et comme telle, cette congruence (256) présente les deux congruences distinctes . . . (257)

$$\frac{p-1}{q} - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = p); \quad \text{ou bien}$$

$$N\left[\frac{p-1}{q} + 1\right]^{(n-1)} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = p);$$

dont la première est la condition de la possibilité, et la seconde la condition de l'impossibilité de la congruence proposée et générale (254).

Par exemple, si cette congruence proposée était la congruence du troisième degré (48), savoir . . . (258)

$$x^3 \equiv q, \quad (\text{mod.} = 19);$$

on aurait, pour les résidus q de cette congruence, la formule (53)''', qui, en achevant les calculs que nous en avons faits à la marque (53)'', donnerait, pour ces résidus, correspondant respectivement aux espèces $A \equiv 0$, $A \equiv 1$, $A \equiv 2$, etc., jusqu'à $A \equiv 18$, les valeurs . . . (258)'

8, 12, 11, 11, 18, 0, 1, 8, 8, 7, 11, 7, 1, 18, 7, 12, 1, 18, 12.

Ainsi, les résidus q de cette congruence cubique (258) sont . . . (258)''

$$1, 7, 8, 11, 12, 18;$$

et par conséquent, les non-résidus de cette même congruence (258) sont . . . (258)'''

$$2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17.$$

Or, ayant ici les valeurs $m = 3$ et $p = 19$, on aura, pour le plus grand diviseur commun u des nombres m et $(p-1)$, la valeur $u = 3$. Ainsi, les conditions respectives (257) de la possibilité et de l'impossibilité de la présente congruence (258) seront . . . (259)

$$q^3 - 1 \equiv 0, \quad \text{et} \quad q'' + q' + 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 19).$$

En effet, chacune des valeurs (258)'' du résidu q satisfait à la première de

ces conditions; et chacune des valeurs (258)^m du non-résidu q satisfait à la seconde de ces conditions (259).

Pour un deuxième exemple, soit proposée la congruence quadratique . . . (260)

$$x^2 \equiv q, \quad (\text{mod.} = 17).$$

Nous aurons ici, en vertu de l'expression générale (17), pour le calcul des résidus p , avec le genre $k=2$, la formule . . . (260')

$$q = A(2, h) = -(4h-1)^2 + 17.i;$$

qui donnera, pour ce résidu q , correspondant respectivement aux espèces $h=0$, $h=1$, $h=2$, etc., jusqu'à $h=16$, les valeurs . . . (260'')

16, 8, 2, 15, 13, 13, 15, 2, 8, 16, 9, 4, 1, 9, 1, 4, 9.

Ainsi, les résidus q de cette congruence quadratique (260) sont . . . (261)

1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16;

et par conséquent, les non-résidus q de cette même congruence (260) sont . . . (261')

3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14.

Or, ayant ici les valeurs $m=2$ et $p=17$, on aura, pour le plus grand diviseur commun u des nombres m et $(p-1)$, la valeur $u=2$. Ainsi, les conditions respectives (257) de la possibilité et de l'impossibilité de la présente congruence (260) seront . . . (262)

$$q^2 - 1 \equiv 0, \quad \text{et} \quad q^2 + 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 17).$$

En effet, chacune des valeurs (261) du résidu q satisfait à la première de ces conditions; et chacune des valeurs (261') du non-résidu q satisfait à la seconde de ces conditions (262).

Pour troisième et dernier exemple, soit proposée la congruence cubique . . . (263)

$$x^3 \equiv q, \quad (\text{mod.} = 11);$$

où l'on aurait les valeurs $m=3$, $p=11$, et par conséquent, pour le plus grand diviseur commun u des nombres m et $(p-1)$, la valeur $u=1$.

Ainsi, les conditions respectives (257) de la possibilité et de l'impossibilité de la présente congruence (263) seraient . . . (264)

$$q^3 - 1 \equiv 0, \quad \text{et} \quad 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 11);$$

de sorte que, puisque la seconde de ces conditions ne saurait exister, la congruence proposée (263) n'est jamais impossible, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun nombre q qui, dans cette congruence (263), pourrait être un non-résidu. En effet, d'après la susdite expression générale (17), nous aurons ici, pour le calcul des résidus q , avec le genre $k=2$, la formule . . . (264')

$$q = A(2, h) = +5.(4h-1)^2 + 11.i,$$

qui donnera, pour ce résidu q , correspondant respectivement aux espèces $h = 0, h = 1, h = 2$, etc., jusqu'à $h = 10$, les valeurs . . . (264)

$$6, 3, 10, 0, 1, 8, 5, 9, 4, 7, 2,$$

c'est-à-dire, tous les nombres non congruents avec le module 11; et par conséquent, il n'existe aucun nombre q qui puisse être un non-résidu de la présente congruence (263). — Quant à la condition (264) de la possibilité de cette congruence (263), il est manifeste que chacune des valeurs (264) du résidu q satisfait à cette condition, qui n'est ici autre chose que le théorème de Fermat.

Nous avons donc, dans les deux congruences générales (257), les conditions respectives de la possibilité et de l'impossibilité de toute congruence fondamentale (254), lorsque son module p est un nombre premier. Et par conséquent, lorsque le module M dans les congruences générales (14) ou (85) est un nombre composé, il est manifeste, en vertu de l'expression générale (15) ou (24) du module, que, pour reconnaître la possibilité ou l'impossibilité des congruences proposées qui correspondent à de tels modules composés, il suffit d'appliquer nos présentes conditions générales et respectives (257) à chacun des facteurs premiers de ces modules composés M , conformément à ce que nous avons vu dans les exemples (64) et (67), sur la composition des congruences partielles qui répondent à ces facteurs premiers. — Ainsi, dans tous les cas, quels que soient les modules M , premiers ou composés, nous avons définitivement, dans les deux congruences (257), les conditions respectives de la possibilité et de l'impossibilité de toutes les congruences fondamentales (14) ou (85) dont nous avons plus haut donné la solution générale (88) et (99). Et nous complétons par là la solution de cette grande question.

Appliquons maintenant ces deux conditions fondamentales (257) aux questions de réciprocité des résidus et des modules, à ces questions dont les géomètres se sont occupés récemment et qui, par leur simple dérivation du théorème de Fermat, prouvent la fécondité de ce théorème, comme nous nous sommes proposé de la prouver. — Pour cela, concevons deux nombres premiers quelconques p et q , qui, dans le théorème de Fermat, seraient réciproquement résidu et module l'un de l'autre, c'est-à-dire, deux nombres premiers tels que l'on ait réciproquement . . . (265)

$$q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}; \quad \text{et} \quad p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

En décomposant, par la susdite loi, les deux premiers membres de ces congruences en leurs facteurs respectifs, savoir . . . (265')

$$\begin{aligned} \left(q^{\frac{p-1}{2}} - \sqrt{-1} \right) \cdot \left(q^{\frac{p-1}{2}} + \sqrt{-1} \right) &\equiv 0, & (\text{mod.} = p); & \text{ et} \\ \left(p^{\frac{q-1}{2}} - \sqrt{-1} \right) \cdot \left(p^{\frac{q-1}{2}} + \sqrt{-1} \right) &\equiv 0, & (\text{mod.} = q); \end{aligned}$$

il resterait à savoir avec quel signe il faut, tour à tour, prendre la racine $\sqrt{x}$ pour que les facteurs respectifs de ces congruences réciproques puissent réaliser ces congruences. — Pour le découvrir, il faut remonter à notre forme téléologique (230) de la loi générale des nombres premiers, en y faisant successivement, d'abord, $\varpi = p$, $x = q$, $k = \frac{p-1}{2}$, et ensuite, $\varpi = q$, $x = p$,

$k = \frac{q-1}{2}$. On en déduira ainsi deux congruences générales et distinctes, qui, en y décomposant également leurs premiers membres en leurs facteurs sous-quadratiques, seront . . . (266)

$$\left\{ \frac{p-1}{q^{\frac{1}{2}}} - (-1)^{\frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-1}{4}} \right\} \cdot \left\{ \frac{p-1}{q^{\frac{1}{2}}} + (-1)^{\frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-1}{4}} \right\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = p);$$

$$\left\{ \frac{p-1}{p^{\frac{1}{2}}} - (-1)^{\frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-1}{4}} \right\} \cdot \left\{ \frac{p-1}{p^{\frac{1}{2}}} + (-1)^{\frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-1}{4}} \right\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = q).$$

Et éliminant ici, en vertu de la congruence générale (232), les deux factorielles $\frac{p-1}{q^{\frac{1}{2}}}$, et $\frac{p-1}{p^{\frac{1}{2}}}$, ces deux congruences (266) se réduiront à la forme plus simple mais générale . . . (266')

$$\left\{ \frac{p-1}{q^{\frac{1}{2}}} - (-1)^{\frac{p+1}{4}} \right\} \cdot \left\{ \frac{p-1}{q^{\frac{1}{2}}} + (-1)^{\frac{p+1}{4}} \right\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = p);$$

$$\left\{ \frac{p-1}{p^{\frac{1}{2}}} - (-1)^{\frac{p+1}{4}} \right\} \cdot \left\{ \frac{p-1}{p^{\frac{1}{2}}} + (-1)^{\frac{p+1}{4}} \right\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = q);$$

dont les susdites congruences réciproques de Fermat (265) sont des expressions indéterminées. — Or, dans le système de réciprocité que forment les présentes congruences déterminées (266'), il est manifeste que, pour pouvoir être réalisées à la fois, elles doivent l'être généralement par leurs facteurs opposés, parce que, dans le cas contraire, l'un de leurs facteurs systématiques serait superflu; ce qui est contraire à la nature du théorème de Fermat (265), qui se décompose nécessairement en ses deux facteurs (265'). Donc, pour la réalisation simultanée des deux congruences réciproques (266'), on aura généralement les deux congruences opposées . . . (267)

$$q^{\frac{p-1}{2}} \mp (-1)^{\frac{p+1}{4}} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = p); \quad \text{et}$$

$$p^{\frac{p-1}{2}} \pm (-1)^{\frac{p+1}{4}} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = q).$$

Et il ne reste qu'à déterminer le signe des présentes puissances de (-1) pour les différentes formes générales $(\mu n + p)$ des nombres premiers, en supposant, pour tout nombre variable n , que les nombres μ et p sont constants et que $p < \mu$; détermination qui n'a plus aucune difficulté. — Nous nous bornerons ici à examiner les cas où cette forme est $(4n + 1)$ et $(4n + 3)$, et qui sont précisément les cas dont les géomètres se sont

occupés dans leurs ausdites recherches sur la réciprocité des nombres premiers.

Or, lorsque d'abord les deux nombres premiers p et q sont tous les deux de la forme $(4n+3)$, les deux congruences générales de réciprocité (267) deviennent manifestement . . . (268)

$$q^{\frac{p-1}{2}} \mp 1 \equiv n, \quad (\text{mod.} = p); \quad \text{et} \quad p^{\frac{q-1}{2}} \pm 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = q).$$

Ensuite, lorsque ces deux nombres p et q sont, l'un de la forme $(4n+1)$ et l'autre de la forme $(4n+3)$, les deux congruences générales de réciprocité (267) deviennent encore manifestement . . . (268')

$$q^{\frac{p-1}{2}} \mp 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = p); \quad \text{et} \quad p^{\frac{q-1}{2}} \mp 1 \equiv n, \quad (\text{mod.} = q).$$

Enfin, lorsque les deux nombres p et q sont tous les deux de la forme $(4n+1)$, on aura les puissances . . . (268)''

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{p+1}{2}} &= [(-1)^n]^{\frac{p+1}{2}} = [V(-1)]^{p+1}; \\ (-1)^{\frac{q+1}{2}} &= [(-1)^n]^{\frac{q+1}{2}} = [V(-1)]^{q+1}. \end{aligned}$$

Et prenant alors le radical $\sqrt{-1}$ positivement dans l'une des congruences réciproques (267), et négativement dans l'autre de ces congruences, comme il faut le faire pour compléter l'opposition systématique de ces deux congruences (267), elles deviendront ici de nouveau . . . (268)'''

$$q^{\frac{p-1}{2}} \mp 1 \equiv n, \quad (\text{mod.} = p); \quad \text{et} \quad p^{\frac{q-1}{2}} \mp 1 \equiv n, \quad (\text{mod.} = q).$$

Il faut remarquer que, dans le premier (268) des trois cas présents, une décomposition des nombres $\frac{4 \cdot n1 + 4}{2}$ et $\frac{4 \cdot n2 + 4}{2}$, pareille à la décomposition (268)'' qui a lieu dans le troisième (268)''' de ces cas, donnerait toujours l'unité positive, malgré l'opposition systématique du signe du radical $\sqrt{-1}$ dans les deux congruences opposées (267). — Ainsi, en résumant ces résultats, on aura tout simplement, d'abord, pour le cas où les nombres premiers p et q ont tous les deux la forme $(4n+3)$, les congruences réciproques (268), savoir . . . (269)

$$q^{\frac{p-1}{2}} \mp 1 \equiv n, \quad (\text{mod.} = p); \quad \text{et} \quad p^{\frac{q-1}{2}} \pm 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = q).$$

Et ensuite, pour le cas où les deux nombres premiers p et q n'ont pas tous les deux cette forme $(4n+3)$, on aura, tout aussi simplement, les congruences réciproques et identiques (268)' et (268)'', savoir . . . (269)

$$q^{\frac{p-1}{2}} \mp 1 \equiv 0, \pmod{p}; \quad \text{et} \quad p^{\frac{q-1}{2}} \mp 1 \equiv 0, \pmod{q}.$$

C'est ce simple corollaire (269) et (269)', lequel, comme nous venons de le voir, dérive immédiatement du théorème de Fermat, ou plutôt de notre loi générale (230) des nombres premiers, dont le théorème de Fermat est un des éléments, c'est, disons-nous, ce très-petit corollaire que l'académicien Legendre, qui s'en est aperçu, voulait ériger en théorème, voire même en *théorème fondamental* de toute la Théorie des Nombres. — Ainsi l'honneur de la découverte d'un véritable théorème fondamental dans cette Théorie des Nombres reste à Fermat.

En combinant ce corollaire (269) et (269)' avec nos susdites conditions (257) de la possibilité et de l'impossibilité des congruences fondamentales (254), on peut, dans ces limites purement algébriques où la Théorie des Nombres est demeurée jusqu'à ce jour, en déduire un théorème général de réciprocité dont celui de Gauss est un cas particulier, savoir, lorsque les congruences (254) sont simplement des congruences du second degré. — En effet, toutes les fois que le plus grand diviseur commun u entre le degré m des congruences (254) et les nombres $(p-1)$ et $(q-1)$ des modules et résidus réciproques que forment les nombres premiers p et q dans de telles congruences générales . . . (270)

$$x^m \equiv q, \pmod{p}, \quad \text{et} \quad y^m \equiv p, \pmod{q};$$

toutes les fois, disons-nous, que ce plus grand diviseur u est $u=2$, ce qui a lieu toujours dans le cas particulier de Gauss où $m=2$, nos conditions (257) de possibilité et d'impossibilité de ces congruences générales (270) deviennent respectivement . . . (271)

$$q^{\frac{p-1}{2}} \mp 1 \equiv 0, \pmod{p}, \quad \text{et} \quad p^{\frac{q-1}{2}} \mp 1 \equiv 0, \pmod{q},$$

en attribuant le signe supérieur $+$ à la possibilité et le signe inférieur $-$ à l'impossibilité des congruences en question (270). Et comme telles, les présentes conditions (271), en considérant les résidus q ou p de ces congruences (270) comme étant positifs ou négatifs, et leurs modules p et q comme étant toujours positifs, deviennent identiques avec les susdites corollaires (269) et (269)'; et elles servent alors à indiquer, pour les congruences générales (270), tous les cas de réciprocité des nombres premiers p et q , par le moyen des formes générales $(4n+1)$ ou $(4n+3)$ de ces nombres. — Ainsi, en considérant d'abord que nos présentes conditions (271) sont immédiatement identiques avec le corollaire (269)', nous concluons que toutes les fois qu'au moins l'un de ces deux nombres premiers p et q ne sera pas de la forme $(4n+3)$, les deux congruences réciproques (270) seront telles que, si le nombre q est ou n'est pas résidu dans la première de ces congruences, le nombre p sera ou ne sera pas résidu dans la se-

conde de ces congruences (270). Et considérant ensuite que nos présentes conditions (271), lorsqu'on prend négativement le résidu p dans la seconde des congruences (270) et que l'on suppose que son module q est de la forme $(4n+3)$, deviennent alors également identiques avec le corollaire (269), nous concluons, lorsque d'ailleurs le nombre p est aussi de la forme $(4n+3)$, que si ce nombre q est ou n'est pas résidu dans la première des congruences (270), le nombre p , pris négativement, sera ou ne sera pas résidu dans la seconde de ces congruences. Enfin, dans ce cas du résidu p négatif, lorsque le nombre q serait de la forme $(4n+1)$, nos présentes conditions (271) demeureraient identiques avec le corollaire (269) ; et pourvu que le nombre p soit alors de la forme $(4n+3)$, afin d'exclure la possibilité que le résidu q dans la première des congruences (270) soit également négatif, nous concluons que, dans ce cas, si le nombre $(+q)$ est ou n'est pas résidu dans la première des congruences (270), le nombre $(-p)$ sera ou ne sera pas résidu dans la seconde de ces congruences. — C'est là le théorème de réciprocité de Gauss pour le cas particulier où les congruences réciproques (270) sont du second degré. Et nous venons de reconnaître que ce théorème de réciprocité s'étend généralement à toutes les congruences réciproques (270) dont le degré m est tel que le plus grand diviseur commun entre cet exposant m et les nombres $(p-1)$ et $(q-1)$ est $u=2$.

Or, c'est là à peu près tout ce que, dans la Théorie des Nombres, on a pu découvrir sur la voie purement algébrique qui seule, avant notre présente voie téléologique, était connue des géomètres. Même le théorème de réciprocité que nous venons d'étendre à ses véritables limites, n'est qu'un fragment de nombreux théorèmes qui, sur notre voie téléologique, peuvent s'établir pour des nombres quelconques p et q , par la simple application des deux premières des trois générations téléologiques (15), constituant la loi fondamentale de la Théorie des Nombres. Il suffit pour cela d'attribuer aux nombres p et q , qui y sont représentés par le module M , des formes spéciales . . . (272)

$$M \equiv \{ (1^{1/2})^{2m} \cdot N + R \};$$

dans lesquelles le nombre R est le résidu de la congruence simple . . . (272')

$$M \equiv R, \quad \left(\text{mod.} = (1^{1/2})^{2m} \right);$$

et par conséquent le nombre N le quotient de la division de $(M-R)$ par ce module $(1^{1/2})^{2m}$. En effet, avec cette forme générale (272), attribuée ainsi aux nombres M , les fonctions aplus qui entrent dans la première et dans la seconde des expressions téléologiques (15), pourront être exprimées algébriquement; et par conséquent, les résidus a et les racines x des congruences fondamentales (14) pourront recevoir des expressions algé-

briques, propres à servir à l'établissement général des relations de réciprocité ou de toutes autres relations entre ces nombres. Par exemple, pour les deux congruences du second degré . . . (273)

$$\begin{aligned}(x_p)' &\equiv a_p, & (\text{mod.} = p), & \text{et} \\ (x_q)' &\equiv a_q, & (\text{mod.} = q); & \end{aligned}$$

en y désignant respectivement par a_p et a_q leurs résidus, et par x_p et x_q leurs racines, l'exposant m dans le module de la congruence simple (272)' qui fixe la forme (272) du nombre M ; sera $m = 2$. Et prenant de plus pour le genre k sa valeur la plus simple $k = 2$, attribuons aux nombres présents p et q les formes respectives . . . (273)'

$$p = 16.N_p + 3, \quad \text{et} \quad q = 16.N_q + 5,$$

en désignant respectivement par N_p et N_q les quotients de la division de $(p-3)$ et de $(q-5)$ par 16; quotients que nous nommerons ici les *générateurs* des nombres p et q . — Or, en admettant que ces générateurs N_p et N_q soient des nombres entiers quelconques, y compris zéro, on trouvera, en suivant les règles (11) et (13)', pour les fonctions alephs qui entrent dans la première et dans la seconde de nos *généralisations téléologiques* (15), les expressions générales . . . (274)

$$\begin{aligned}\mathbf{N}\left[\frac{16.N_p + 3}{16}, 3\right]^{(1)} &= 5.N_p + 1, & \mathbf{N}\left[\frac{16.N_q + 3}{4}, 3\right]^{(1)} &= 4.N_q + 1; \\ \mathbf{N}\left[\frac{16.N_q + 5}{16}, 3\right]^{(1)} &= 3.N_q + 1, & \mathbf{N}\left[\frac{16.N_p + 5}{4}, 2\right]^{(1)} &= 4.N_p + 1.\end{aligned}$$

Ainsi, les *généralisations téléologiques* (15) donneront, pour les résidus a_p et a_q , et pour les racines x_p et x_q des présentes congruences quadratiques (273), les expressions algébriques . . . (274)'

$$\begin{aligned}a_p &= (5N_p + 1)(4h - 1)^2, & \text{et} & \quad a_q = (3N_q + 1)(4h - 1)^2, \\ x_p &= (h - 1) - 4N_p; & x_q &= (h + 1) + 4N_q;\end{aligned}$$

la valeur de l'espèce h demeurant arbitraire. — Or, en comparant ces expressions, on y découvre les relations générales suivantes. — D'abord, pour ce qui concerne les résidus a_p et a_q , on voit qu'en y faisant abstraction du facteur arbitraire $(4h - 1)^2$, les coefficients des générateurs N_p et N_q sont réciproquement les résidus 5 et 3 des nombres p et q en question. Ensuite, pour ce qui concerne les racines x_p et x_q , on voit qu'en y faisant également abstraction de leur partie arbitraire h , la somme de ces racines équivalant au quadruple de la différence des générateurs N_p et N_q . Enfin, les congruences elles-mêmes (273) seront . . . (274)''

$$\begin{aligned}(x_p)' - a_p &= (16N_p + 3) \cdot \{N_q - (5h - 2)h\} \equiv 0, & (\text{mod.} = p), \\ (x_q)' - a_q &= (16N_q + 5) \cdot \{N_p - (3h - 2)h\} \equiv 0, & (\text{mod.} = q);\end{aligned}$$

et elles donneront ainsi, pour leurs facteurs supplémentaires . . . (274)'''

$$\{N_p - (5h - 2)h\}, \quad \text{et} \quad \{N_q - (3h - 2)h\},$$

des quantités symétriques en y prenant de nouveau réciproquement les résidus 3 et 5 dans les formes (273)' des nombres p et q . — Par exemple, pour les nombres $p = 275939$ et $q = 17189$, qui ont la forme (273)', savoir . . . (275)

$$p = 275939 = 16.17246 + 3, \quad \text{et}$$

$$q = 17189 = 16.1074 + 5;$$

leurs générateurs N_p et N_q étant ainsi . . . (275)'

$$N_p = 17246, \quad \text{et} \quad N_q = 1074;$$

les congruences quadratiques en question (273) seront . . . (276)

$$(x_p)' \equiv a_p, \quad (\text{mod.} = 275939), \quad \text{et}$$

$$(x_q)' \equiv a_q, \quad (\text{mod.} = 17189);$$

et les formules (274)', en y faisant abstraction de la réciprocité des résidus 3 et 5 dans les formes (275), donneront immédiatement, pour les présents résidus a_p et a_q , et pour les présentes racines x_p et x_q , les valeurs . . . (276)'

$$a_p = 86231.(4h - 1)', \quad \text{et} \quad x_p = \pm (h - 68985);$$

$$a_q = 3223.(4h - 1)', \quad \text{et} \quad x_q = \pm (h + 4297);$$

l'espèce h étant, pour chacune des deux congruences quadratiques (276), un nombre arbitraire. Ainsi, pour $h = 0$, ces deux congruences seraient . . . (276)''

$$(68985)' \equiv 86231, \quad (\text{mod.} = 275939); \quad \text{et}$$

$$(4297)' \equiv 3223, \quad (\text{mod.} = 17189);$$

et il en serait de même pour toute autre valeur de l'espèce h , prise même différemment dans chacune des deux expressions générales (276)'. Enfin, les facteurs supplémentaires (274)''' des deux présentes congruences (276), facteurs qui serviraient à la solution des équations indéterminées correspondantes à ces congruences, savoir, des équations indéterminées . . . (277)

$$(x_p)' - a_p = 275939.z_p, \quad \text{et}$$

$$(x_q)' - a_q = 17189.z_q,$$

seraient . . . (277)'

$$z_p = \{17246 - (5h - 2)h\}, \quad \text{et} \quad z_q = \{1074 - (3h - 2)h\};$$

l'espèce h , qui détermine les quantités a_p et a_q , demeurant toujours arbitraire.

Or, toutes ces relations $(274)'$, $(274)''$, $(274)'''$, considérées comme isolées ou comme réciproques, subsisteront généralement pour tous les nombres p et q , premiers ou composés, qui ont les formes $(273)'$; et elles établiront ainsi autant de théorèmes distincts pour ces nombres. — On conçoit maintenant que, pour d'autres résidus R dans la forme générale (272) des nombres, on obtiendrait, à chaque fois, autant de nouveaux théorèmes pour les congruences quadratiques (273) , lors même que l'on conserverait au genre k sa valeur la plus simple $k = 2$, qui donne, pour le module $(1^{(1)})^{2m}$ de ces formes (272) , lorsque $m = 2$, le nombre 16. Et variant ensuite la valeur du genre k , en le faisant successivement $k = 3$, $k = 4$, $k = 5$, etc., jusqu'à l'infini, on aurait manifestement, toujours pour les seules congruences quadratiques, où $m = 2$, des modules indéfiniment variés $(1^{(1)})^4$ pour la congruence simple $(272)'$ qui fixe la forme (272) des nombres; et l'on obtiendrait ainsi, pour ces formes différentes, combinées avec leurs résidus différents R , une infinité de théorèmes distincts pour ces seules congruences (273) du second degré. Enfin, variant l'exposant m dans le module $(1^{(1)})^{2m}$ des formes (272) , en le faisant successivement $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$, etc., jusqu'à l'infini, on obtiendrait de plus, pour chacun de ces exposants m , correspondant aux congruences des degrés supérieurs au second, une nouvelle infinité de théorèmes distincts; et l'on aurait ainsi, en toute vérité, une infinité d'une infinité de théorèmes distincts, qui formeraient, en quelque sorte, autant de *rébus* ou du moins de *récréations mathématiques* pour la Théorie des Nombres. On pourrait donc, par le moyen de notre loi téléologique (15), en faisant ainsi dépendre les nombres de toutes leurs formes possibles (272) , fabriquer, pour la Théorie des Nombres, une infinité de gros volumes in-4°, pareils à celui de l'illustre académicien Legendre. — Mais, ce que nous devons ici faire remarquer sérieusement, c'est que ce recours à la forme des nombres, par lequel, en absence de lois téléologiques, on a pu, dans des cas peu nombreux et très-bornés, traiter algébriquement quelques questions insignifiantes, devient tout à fait inutile aujourd'hui, lorsque les lois téléologiques, ces véritables lois de la Théorie des Nombres, desquelles, comme nous venons de le voir, dérivent tous ces théorèmes dépendant de la forme des nombres, sont enfin découvertes complètement. Laissons donc là ces questions d'une importance secondaire et même inutiles désormais; et revenons à nos solutions des grands problèmes de la Théorie des Nombres.

Nous avons déjà donné, sous les marques finales (88), (95) et (99), la solution générale des congruences fondamentales (85) du premier ordre, et sous les marques (164) et (165), la solution générale des congruences fondamentales (163) du second ordre. — Il nous reste donc à donner la solution également générale, pour tous les degrés, des congruences composées

ou complètes (4) du premier ordre, et la solution pareille des congruences composées ou complètes de tous les ordres, quels que soient le nombre et le degré des quantités inconnues ou indéterminées qui peuvent entrer dans ces congruences des ordres supérieurs. — Nous allons le faire.

Avant tout, nous allons compléter la solution (164) et (165) des congruences fondamentales (163) du second ordre, et démontrer cette solution en la déduisant de notre loi téléologique (15), de cette loi fondamentale de la Théorie des Nombres, de laquelle seule nous tirons ici la solution de toutes les questions de cette singulière et difficile Théorie. — Or, dans cette congruence fondamentale du second ordre (163), savoir . . . (278)

$$x^2 - a.y^2 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M),$$

pour laquelle nous avons donné, sous la marque (165), les déterminations générales des inconnues x et y , indépendantes l'une de l'autre, on peut encore supposer que l'inconnue x forme un multiple xy de l'inconnue y et qu'elle dépend ainsi de cette dernière. Alors, cette congruence (278) aurait la forme . . . (279)

$$x^2.y^2 - a.y^2 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

et elle se réduirait ainsi à la congruence fondamentale (14) du premier ordre, savoir . . . (279)'

$$x^2 - a \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

en considérant l'inconnue y comme un nombre arbitraire, non congruent avec le module M . Et dans cette solution spéciale de la congruence du second ordre (278), qui est la solution incomplète dont s'est servi Lagrange dans sa méthode des équations indéterminées du second degré, toutes les parties constituantes sont nécessairement régies par les trois générations téléologiques (15); de sorte que le module M , au lieu d'avoir l'expression (164), aurait ici l'expression . . . (280)

$$M = \text{fact.} \left[a.(1^{11})^{12} - \left\{ h.(1^{11})^8 + (-1)^{4+1} \right\}^2 \right];$$

et les racines y et z seraient . . . (280)'

$$y = \text{nombre arbitraire, et}$$

$$z = y \cdot \left\{ h + (-1)^{4+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{11})^8}, \pi \right]^{12-1} + Mj \right\}.$$

Mais, comme nous venons de le voir, en considérant ainsi l'inconnue z comme un simple multiple de l'inconnue y , la congruence du second ordre (278) se réduirait à la congruence fondamentale du premier ordre (14), et il n'y aurait rien de nouveau dans sa solution. Pour former la véritable congruence fondamentale du second ordre, il faut que, dans cette relation (278), les deux inconnues x et y demeurent entièrement indépendantes l'une

de l'autre, comme elles le sont effectivement dans leurs susdites déterminations (165) qui offrent ainsi la solution de cette véritable congruence fondamentale du second ordre (163) ou (278). — Il nous reste à déduire cette solution de notre loi fondamentale (15), comme nous en déduisons ici toutes les autres grandes questions présentes.

Pour cela, formons la quantité . . . (281)

$$N = (-1)^{w+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{1/2})^m}, \pi \right]^{(w-1)};$$

et la première des générations téléologiques (15) nous donnera, pour le résidu a de la congruence fondamentale (14), l'expression . . . (281')

$$a = N \cdot \left\{ A \cdot (1^{1/2})^s + (-1)^{t+1} \right\}^n.$$

Substituant alors cette expression dans la troisième des générations téléologiques (15), nous obtiendrons, pour le module M , l'expression . . . (282)

$$M = \text{fact.} \left[\left\{ N \cdot (1^{1/2})^{sm} - 1 \right\} \cdot \left\{ A \cdot (1^{1/2})^s + (-1)^{t+1} \right\}^n \right].$$

Et observant que, dans le deuxième facteur de cette expression, l'espèce A demeure variable pour tout genre k déterminé, on conçoit que ce deuxième facteur ne saurait concourir à la détermination du module M ; de sorte que cette expression se réduit proprement à celle-ci . . . (282')

$$M = \text{fact.} \left[N \cdot (1^{1/2})^{sm} - 1 \right].$$

Or, en supposant que c'est ce nombre N qui forme le coefficient dans la congruence fondamentale du second ordre (163) ou (278), c'est-à-dire que cette congruence soit . . . (283)

$$x^m - N \cdot y^m \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M),$$

on y voit immédiatement, par la présente expression (281)' du résidu a , formant la première de nos trois générations téléologiques (15), on y voit ainsi, disons-nous, que, si l'on y donne à l'inconnue y la valeur générale et indépendante de l'inconnue x , savoir . . . (284)

$$y = A \cdot (1^{1/2})^s + (-1)^{t+1};$$

cette congruence (283) du second ordre se réduira à la congruence fondamentale du premier ordre . . . (284')

$$x^m - a \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

dont la racine a , en vertu de la seconde des générations téléologiques (15), sera . . . (285)

$$a = A + (-1)^{t+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{1/2})^m}, \pi \right]^{(s-1)} + M/i;$$

et dont le module M , en vertu de la troisième de ces générations téléologiques (15), lorsqu'on y introduira l'expression (281) du présent coefficient N de la congruence proposée (283), recevra la détermination (282). — Et telles sont en effet les expressions générales et indépendantes (164) et (165) que nous avons données pour la solution complète de la congruence fondamentale (163) du second ordre, pour cette solution qui, par l'indépendance mutuelle des inconnues x et y , était seule propre à la solution générale (193) et (195) du grand problème de la décomposition des nombres en leurs facteurs.

Procédons enfin à la solution générale des congruences composées ou complètes de tous les degrés et de tous les ordres. — Et commençons naturellement par celles du premier ordre (4) et d'un degré quelconque m , savoir . . . (286)

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \dots + A_mx^m \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

congruences composées et générales où il s'agit, comme pour la congruence simple (14), de découvrir la génération téléologique du module M et celle des racines x , les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ étant ici des nombres donnés.

Or, en formant, avec un nombre quelconque n , les quantités auxiliaires . . . (287)

$$N_n = (-1)^{n+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{(n)})^{2n}} \right]^{(n-1)}, \quad \text{et}$$

$$H^n = \left[h \cdot (1^{(n)})^n + (-1)^{n+1} \right]^n;$$

nous aurons, en vertu de la première de nos trois générations téléologiques et fondamentales (15), pour le résidu a des congruences simples (14), l'expression . . . (287')

$$a = N_n \cdot H^n + Mj;$$

et par conséquent, nous aurons, en vertu de ces congruences simples (14), pour une puissance quelconque x^n , la congruence . . . (287'')

$$x^n \equiv N_n \cdot H^n, \quad (\text{mod.} = M).$$

Ainsi, en éliminant, par cette relation générale, les puissances de l'inconnue x dans la congruence proposée (286), nous obtiendrons, par rapport au module M , la congruence toute déterminée . . . (288)

$$A_0 + A_1 N_1 H + A_2 N_2 H^2 + A_3 N_3 H^3 \dots + A_m N_m H^m \equiv 0.$$

Et si nous multiplions tous les termes de cette congruence par la factorielle $(1^{(n)})^{2m}$, en observant qu'en vertu de la condition fondamentale (25) ou (26) de nos générations téléologiques (15), on a généralement la congruence . . . (289).

$$(1^{(n)})^{2n} \cdot N_n \equiv 1, \quad (\text{mod.} = M);$$

nous découvrirons que la congruence déterminée (288) se réduit à la forme

$$\begin{aligned} & \dots (290) \\ & A_0.(1^{11})^{m-1} + A_1.(1^{11})^{m-2}.H + A_2.(1^{11})^{m-3}.H^2 + \\ & + A_3.(1^{11})^{m-4}.H^3 + \dots + A_m.H^m \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M); \end{aligned}$$

dans la construction de laquelle n'entre plus le module M . Nous aurons donc, pour la génération téléologique du module M dans la congruence générale (286), l'expression . . . (291)

$$M = \text{fact.} \left\{ A_0.(1^{11})^{m-1} + A_1.(1^{11})^{m-2}.H + A_2.(1^{11})^{m-3}.H^2 + A_3.(1^{11})^{m-4}.H^3 + \dots + A_m.H^m \right\};$$

les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ dans la congruence proposée (286) étant des nombres quelconques, et la quantité auxiliaire H , en vertu de sa formation générale (287), étant . . . (291')

$$H = A.(1^{11})^k + (-1)^{k+1}.$$

Ainsi, en outre des coefficients donnés $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$, cette expression (291) du module M ne contient que le genre k et l'espèce A auxquels se rapportent les racines x de la congruence proposée (286). — Et quant à ces racines x , il est manifeste, par la congruence simple (287)' qui les détermine ici généralement, que leur génération téléologique est identique avec la seconde des trois générations fondamentales (15), c'est-à-dire que, pour un degré quelconque m de la congruence proposée (286), on a toujours . . . (292)

$$x = A + (-1)^{k+1} . N \left[\frac{M}{(1^{11})^k}, \pi \right]^{(n-1)} + Mf;$$

en observant ici que, comme pour les congruences simples (14), cette expression des racines x demeure indépendante du degré m de la congruence composée (286) qu'il s'agissait de résoudre.

Nous avons donc maintenant, dans les présentes générations téléologiques (291) et (292) du module M et des racines x , les lois de la formation et par là même, en procédant par une voie régressive, les principes de la solution des congruences composées ou complètes (286) d'un degré quelconque m . — Par exemple, si l'on avait la congruence complète du troisième degré . . . (293)

$$4 + 3x + 2x^2 + 5x^3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M),$$

donc il s'agirait de découvrir, d'abord, le module M , et ensuite, les racines x correspondant à ce module, on aurait, d'après la formule (291), pour la génération du module M , l'expression générale . . . (293')

$$M = \text{fact.} \left\{ 4.(1^{11})^3 + 3.(1^{11})^2.H + 2.(1^{11}).H^2 + 5.H^3 \right\};$$

dans laquelle le genre k et l'espèce h qui entre dans l'expression (291)' de la quantité auxiliaire H , sont des nombres quelconques. — Or, dans le cas le plus simple où l'on ferait . . . (294)

$$k = 2, \quad h = 0; \quad \text{et par conséquent,} \quad H = -1;$$

la présente expression (293)' donnerait, pour le module M , la valeur . . . (294)'

$$M = \text{fact.} \{ 4.64 - 3.16 + 2.4 - 5 \} = 211;$$

et l'on aurait la congruence . . . (295)

$$4 + 3x + 2x^2 + 5x^3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 211).$$

Quant aux racines x de cette congruence, connaissant les valeurs (294) du genre k et de l'espèce h , par lesquelles on a déterminé le présent module 211, la formule (292) donnera ici immédiatement ces racines, savoir . . . (295)'

$$x = -N \left[\frac{211}{4}, 3 \right]^{(N)} + Mj = -53 + 211.j.$$

En effet, cette valeur de x satisfait réellement à la congruence (295); car, on a . . . (295)''

$$4 + 3.(-53) + 2.(-53)^2 + 5.(-53)^3 = -738922 = -211 \times 3502.$$

On conçoit qu'en donnant au genre k et à l'espèce h d'autres valeurs quelconques, différentes des valeurs simples (294), on obtiendrait ainsi, toujours par le moyen de la formule (293)', une infinité de valeurs distinctes pour le module M de la congruence (293) proposée comme exemple; et pour tous ces modules différents, provenant ainsi de valeurs spéciales de k et de h , la formule (292) donnerait immédiatement, avec ces valeurs de k et de h , les racines x qui résoudraient ces diverses congruences (293). — Ainsi, faisant encore . . . (296)

$$k = 3, \quad h = 1; \quad \text{et par conséquent,} \quad H = 37;$$

on aurait, pour la génération (293)' du module M , la quantité . . . (296)'

$$M = \text{fact.} \{ 4.46856 + 3.1296.37 + 2.36.(37)^2 + 5.(37)^3 \},$$

qui donnerait, pour le module M , une valeur . . . (296)''

$$M = 682313.$$

La congruence proposée serait donc alors . . . (297)

$$4 + 3x + 2x^2 + 5x^3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 682313).$$

Et avec les présentes valeurs (296) du genre k et de l'espèce h , la formule (292) donnerait, pour les racines x de cette congruence, la valeur . . . (297)'

$$x = 1 + N \left[\frac{682313}{36}, 3 \right]^{(v)} + Mj = 132673 + Mj.$$

En effet, cette valeur des racines x satisfait réellement à la présente congruence (297); car, on a . . . (297)''

$$4 + 3.(132673) + 2.(132673)^2 + 5.(132673)^3 = \\ = 11\ 676\ 668\ 808\ 173\ 966 = 682\ 313 \times 17\ 133\ 361\ 182.$$

Et il en serait de même pour toutes les autres valeurs concevables que l'on donnerait au genre k et à l'espèce h .

Quant à la solution générale des congruences composées ou complètes (286), lorsque leur module M serait donné, nous venons de remarquer qu'en procédant par la voie régressive, c'est-à-dire, en déterminant, dans la génération téléologique (291) du module M , le genre k et l'espèce h qui engendrent le module, on obtiendra nécessairement, par la génération téléologique (292) des racines x , avec leurs éléments k et h , les racines qui opèrent la solution des congruences générales (286) dont le module M serait ainsi donné.

— Mais, il ne faut pas perdre de vue que, comme dans les congruences simples (45), les racines x dans les congruences composées (286) ne forment également que des cas singuliers de finalité dans les nombres, et par conséquent qu'elles ne peuvent pas plus être déterminées *a priori*. Comme telles, ces racines, qui dépendent ainsi de leurs éléments k et h , ne sauraient être reconnues qu'*a posteriori*. Mais, par la raison qu'en vertu de leur génération (292), elles existent nécessairement lorsque la congruence (286) est réelle, ces racines x , c'est-à-dire, leurs éléments k et h , doivent pouvoir être déterminées ultérieurement. Et en effet, ces éléments k et h peuvent l'être toujours par la méthode ou le procédé très-simple dont nous allons faire connaître les principes.

Pour cela, formons annuellement, pour un indice quelconque p , la quantité . . . (298)

$$W_p = (1^{(p)} \cdot 1^{(n-p)}) \cdot H' ;$$

et la génération téléologique (291) du module M prendra la forme plus simple . . . (299)

$$M = \text{fact.} \{ A_n \cdot W_n + A_{n-1} \cdot W_{n-1} + A_{n-2} \cdot W_{n-2} + \dots + A_1 \cdot W_1 \}.$$

Or, en considérant cette quantité génératrice comme une fonction $F(k, h)$ des éléments k et h , c'est-à-dire, en faisant . . . (299)'

$$F(k, h) = A_n \cdot W_n + A_{n-1} \cdot W_{n-1} + A_{n-2} \cdot W_{n-2} + \dots + A_1 \cdot W_1,$$

si l'on prend sur cette fonction, par rapport à la variable h , les différentielles consécutives, on trouvera, pour un ordre quelconque μ de ces différentielles, l'expression générale . . . (299)''

$$\frac{d^p F(k, h)}{1^{p(1)} \cdot dh^p} = A_p \cdot W_0 + \frac{\mu+1}{1} \cdot A_{p+1} \cdot W_1 + \frac{(\mu+2)^{p-1}}{1^{p(2)}} \cdot A_{p+2} \cdot W_2 + \\ + \frac{(\mu+3)^{p-1}}{1^{p(3)}} \cdot A_{p+3} \cdot W_3 \dots + \frac{m^{(n-p)-1}}{1^{(n-p)(p)}} \cdot A_n \cdot W_{n-p}.$$

Ainsi, en concevant que, dans la fonction $F(k, h)$, la variable h reçoit un accroissement ou un décroissement d'une unité, on aura . . . (299)^{uv}

$$F(k, h \pm 1) = F(k, h) \pm \frac{dF(k, h)}{1 \cdot dh} + \frac{d^2 F(k, h)}{1^{(2)} \cdot dh^2} \pm \text{etc.}, \text{ etc.};$$

et par conséquent, la forme de cette nouvelle fonction sera . . . (300)

$$F(k, h \pm 1) = B_n \cdot W_n + B_{n-1} \cdot W_{n-1} + B_{n-2} \cdot W_{n-2} \dots + B_0 \cdot W_0;$$

dont les coefficients $B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, \dots, B_0$, en vertu de l'expression générale (299)^{uv} des différentielles de la fonction primitive $F(k, h)$, seront . . . (300)

$$B_n = A_n \pm A_n + A_n \pm A_n + \dots (\pm 1)^n \cdot A_n,$$

$$B_{n-1} = A_n \pm 2A_n + 3A_n \pm 4A_n + \dots (\pm 1)^{n-1} \cdot \frac{m}{1} \cdot A_n,$$

$$B_{n-2} = A_n \pm 3A_n + 6A_n \pm 10A_n \dots (\pm 1)^{n-2} \cdot \frac{m^{(2)-1}}{1^{(2)}} \cdot A_n,$$

$$B_{n-3} = A_n \pm 4A_n + 10A_n \pm 20A_n \dots (\pm 1)^{n-3} \cdot \frac{m^{(3)-1}}{1^{(3)}} \cdot A_n,$$

$$B_0 = (\pm 1)^{n-n} \cdot A_n = A_n.$$

Ainsi, par les simples opérations d'addition et de soustraction, on pourra calculer ces coefficients $B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, \dots, B_0$ de la fonction variée (300) avec les coefficients $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0$, de la fonction primitive (299)^{uv}. Et si de plus on forme des tarifs pour les multiples des quantités $W_n, W_{n-1}, W_{n-2}, \dots, W_0$, on pourra ainsi, par ces simples opérations d'addition et de soustraction, calculer la valeur de la fonction variée (300). En partant donc d'une valeur primitive de la variable h , par exemple, de la valeur $h = 0$, qui, en vertu de leur construction (298), donnerait, pour les quantités W , la valeur générale . . . (301).

$$W_k = (-1)^{(k+1)} \cdot (1^k)^{(n-k)},$$

on pourra, avec une valeur donnée de k , calculer facilement, pour toutes les valeurs de h , positives et négatives, la quantité $F(k, h)$ formant la fonction génératrice (299) du module M . Et l'on pourra ainsi découvrir facilement les éléments en question k et h qui serviraient, par cette formule (299), à engendrer le module donné M .

Quant au genre k , en considérant que cet élément dans nos générations téléologiques est toujours un petit nombre, nous supposons d'abord, dans le procédé que nous venons d'indiquer, sans en dire les raisons, que l'on adopte successivement, pour cet élément, ses valeurs progressives $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$, etc. Mais, pour reconnaître toute l'importance de cette variation des valeurs du genre k , nous devons maintenant faire remarquer essentiellement le véritable sens de cet élément dans nos générations téléologiques, c'est-à-dire, son sens philosophique qui caractérise le présent procédé de la résolution générale des congruences complètes du premier ordre (286).

D'abord, en examinant l'influence de l'élément k dans nos générations téléologiques (15), et spécialement dans la seconde de ces trois générations, qui détermine la racine x dans la congruence fondamentale (14), et qui, par là même, détermine ici généralement, dans l'expression (292), les racines x des congruences composées (286), on découvre que cet élément k est tout à fait arbitraire; car, quelle que soit la valeur de ces racines x , on voit, dans leur expression générale (292), que, pour tout genre k pris arbitrairement, l'espèce A peut toujours être déterminée de manière à produire, par cette expression (292), la valeur des racines x en question. — C'est en reste ce que nous avons déjà fait remarquer plus haut, en faisant reconnaître, sous les marques (56), (56)', etc., jusqu'à (57)', l'identité des résidus a dépendant de différentes valeurs du genre k . — Ainsi, dans notre présent procédé (300) et (300)' de la solution des congruences composées (286), l'élément k demeure nécessairement arbitraire, et ne doit conséquemment recevoir aucune détermination spéciale, provenant de la nature même de ces congruences (286).

Ensuite, considérant cette indétermination absolue du genre k , on concevra facilement que ses valeurs différentes et progressives $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$, etc., étant introduites successivement dans la fonction génératrice (299)', et par conséquent dans ses fonctions variées (300), serviront précisément à faire découvrir, par la méthode (300) et (300)', toutes les valeurs différentes que peuvent recevoir les racines x dans les congruences composées (286). Et par là même, ces valeurs différentes du genre k serviroient ainsi à indiquer les cas où quelques-unes de ces racines x et même toutes ces racines x seraient impossibles; et cela, en ne laissant suener, par la méthode (300) et (300)', aucune fonction variée $F(k, A)$ qui puisse former la fonction génératrice (299)' du module donné M . — Bien plus, on conçoit qu'à mesure que ces valeurs successives de k , introduites ainsi dans la fonction génératrice (299)', ne pourront conduire, par la méthode en question, à une fonction variée et propre à engendrer le module donné M , la probabilité de ce que la congruence proposée (286) ait des racines possibles, diminuera progressivement et même très-rapidement; de sorte que cette méthode (300) et (300)', par l'influence des

valeurs arbitraires et variables du genre k , offrira en même temps la condition de la possibilité ou de l'impossibilité de ces congruences composées (286) du premier ordre. — Toutefois, il faut remarquer que, pour la même valeur arbitraire du genre k , des valeurs différentes de l'espèce A , telles qu'elles s'établissent par l'application progressive de la méthode (300) et (300)', en amenant successivement des fonctions génératrices (299)' propres à engendrer le module proposé M , pourront ainsi faire connaître les différentes valeurs des racines x des congruences en question (286). Mais, en considérant que ces valeurs différentes de l'espèce A devraient alors, en vertu de l'expression générale (292) des racines x , différer entre elles autant que ces racines x elles-mêmes; ce qui exigerait de longues répétitions dans l'application de la méthode (300), on conçoit que la variation des valeurs arbitraires du genre k , qui d'ailleurs peuvent toujours être très-petites, conduit, d'une manière incomparablement plus rapide, au double but, à celui de la connaissance des différentes racines x , lorsque la congruence proposée (286) en a réellement, ou bien à celui de la conviction de ce que les racines problématiques x sont impossibles, lorsque cette congruence (286) n'en a point.

L'exposition détaillée et très-précise que nous venons de faire de cette méthode de la résolution générale des congruences composées (286) de tous les degrés, méthode dont l'application n'exige manifestement qu'un travail mécanique, nous dispense, après tous les exemples que nous avons déjà donnés, de joindre ici également des exemples concernant cette application, que les géomètres pourront maintenant se donner facilement. — Mais, peut-être devons-nous prémunir contre l'idée illusoire que l'on pourrait se former en croyant que l'application de la méthode (300) et (300)' à la solution immédiate de la congruence proposée (286) conduirait plus rapidement à la découverte des racines x de cette congruence générale; application immédiate qu'on pourrait ainsi faire effectivement. Pour détruire cette illusion, il suffit d'examiner le dernier exemple (297) et (297)' de la formation et solution de cette sorte de congruences composées (286); on y voit en effet que, la racine x ayant la valeur $x = 132673$, il faudrait, de cette manière, en passant par toutes les valeurs inférieures, positives et négatives, et l'on ne saurait ici en négliger aucune, il faudrait, disons-nous, exécuter plus de 265000 opérations successives, avant de découvrir la valeur de cette seule racine x . Et il faudrait ensuite exécuter tout autant d'opérations nouvelles, et peut-être même un plus grand nombre encore, pour découvrir les autres racines x de cette congruence (297), si elle en a réellement, ou pour se convaincre qu'elle n'en a pas d'autres. — Les géomètres qui auront approfondi le nouvel et véritable état téléologique des questions de la Théorie des Nombres, comprendront facilement que l'esprit ou, pour nous servir de l'expression de l'illustre académicien Legendre, le *secret* de la méthode que nous venons de faire con-

unir, et généralement le secret de toutes nos méthodes téléologiques, consiste précisément en ce que la recherche des racines x ou d'autres inconnues, qui peuvent être de très-grands nombres, se trouve réduite à la simple recherche des éléments k et h de telles quantités inconnues, lesquels éléments k et h , en outre de ce qu'ils impliquent réciproquement toutes les valeurs que peuvent recevoir ces quantités inconnues, sont, dans leur principe philosophique, de nature à ce que le premier de ces éléments, le genre k , peut toujours former des nombres incomparablement plus petits que le produit des modules simultanés M , ainsi qu'on peut s'en convaincre, dans le cas présent, en examinant la manière dont ces éléments k et h entrent dans la génération téléologique (291) de ce produit des modules simultanés M , qui est manifestement la limite des valeurs des racines x en question.

Nous terminerons cette exposition de la présente méthode pour la résolution générale des congruences composées (286) du premier ordre et de tous les degrés, en faisant remarquer que, par des transformations algébriques, on peut quelquefois amener ces congruences, lorsque leur degré se trouve déterminé, à des formes où elles peuvent recevoir leur solution par des méthodes spéciales. Nous parlerons de ces transformations algébriques dans notre susdit traité de la Théorie des Nombres. Et nous nous bornerons ici à indiquer celle par laquelle les congruences complètes du second degré peuvent être ramenées à la solution (95) ou (99) de nos congruences fondamentales (85). — Pour cela, soit une telle congruence complète et générale du second degré :

$$\dots (302) \quad x^2 + Ax + B \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M),$$

dont le module M et les coefficients A et B sont donnés. Attribuons à l'inconnue x la forme $\dots (302)'$

$$x \equiv z + \xi, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

et transformons ainsi la congruence proposée (302) dans celle-ci $\dots (303)$

$$z^2 + (2\xi + A)z + (\xi^2 + A\xi + B) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

Déterminons enfin la valeur de la quantité ξ par la congruence auxiliaire $\dots (303)''$

$$2\xi + A \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

qui, en vertu de la règle (27) et (28), donnera $\dots (303)'''$

$$\xi \equiv (-1)^w \cdot A \cdot M \left[\frac{M}{2}, \varpi \right]^{(w-1)} + Mi.$$

Et alors, en introduisant cette valeur de ξ dans la congruence transformée (303), cette congruence se réduira à la forme des congruences fondamentales (85), savoir $\dots (304)$

$$z^2 \equiv -(\xi^2 + A\xi + B), \quad (\text{mod.} \equiv M),$$

dont notre méthode (95) ou (99) donnera immédiatement la solution, si, d'après nos conditions (257), la présente quantité $-(\xi^2 + A\xi + B)$ est un véritable résidu quadratique par rapport au module M .

Par exemple, si la congruence complète du second degré était . . . (305)

$$x^2 + 7x + 3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv 11);$$

on aurait $A = 7$, $B = 3$, et $M = 11$. La formule (303)' donnerait, pour la quantité auxiliaire ξ , la valeur . . . (305')

$$\xi = 7.5 + 11.i \equiv 2 + 11.j;$$

de sorte que le susdit résidu dans la congruence simple (304) serait . . . (305'')

$$-(\xi^2 + A\xi + B) \equiv -21 \equiv +1, \quad (\text{mod.} \equiv 11).$$

Ainsi, cette congruence simple (304), sera ici . . . (306)

$$x^2 \equiv 1, \quad (\text{mod.} \equiv 11);$$

et elle donnera immédiatement, pour les racines x , les valeurs . . . (306')

$$x = \pm 1 + 11.j.$$

Et par conséquent, en vertu de la transformation (302)', les deux racines x de la congruence proposée (305) seront . . . (306'')

$$x_1 = 1 + 2 = 3 + 11.j'; \quad \text{et} \quad x_2 = -1 + 2 = 1 + 11.j''.$$

Nous devons ici prévenir que cette solution rapide des congruences complètes du second degré devient souvent très-utile, entre autres pour la détermination de nos susdites conditions (137)' et (139)' qui fixent le nombre des racines réelles dans les congruences fondamentales (14) ou (85), comme nous le verrons ci-après.

Procédons maintenant à la déconverte des lois qui président à la formation, et des principes que suit la solution des congruences composées ou complètes des ordres supérieurs, dans lesquelles entrent plusieurs inconnues x , y , z , etc. Et voyons d'abord celles du second ordre et d'un degré quelconque, dont la forme générale est . . . (307)

$$\left. \begin{aligned} A(0, 0) + A(1, 0).x + A(2, 0).x^2 + \text{etc.} \\ + A(0, 1).y + A(1, 1).xy + \text{etc.} \\ + A(0, 2).y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

congruences où il s'agit de découvrir la génération téléologique du module M et la génération pareille des racines x et y par leurs éléments respectifs k et h , que nous distinguerons par k_1 et h_1 pour les racines x , et par k_2 et h_2 pour les racines y ; les coefficients $A(0, 0)$, $A(1, 0)$, $A(0, 1)$, etc., étant de nouveau des nombres quelconques donnés. — Or, en procédant ici tout à fait de la même manière dont nous venons de procéder pour découvrir,

dans les congruences générales (286) du premier ordre, la génération téléologique (291) du module M et la génération pareille (292) de la racine x , nous parviendrons ici, tout aussi facilement, d'abord, à la découverte de la génération téléologique du présent module M , savoir . . . (308)

$$M = \text{fact.} \left\{ \begin{array}{l} A(0,0).W_1.W_2 + A(1,0).W_1.W_2 + A(2,0).W_1.W_2 + \text{etc.} \\ \quad + A(0,1).W_1.W_2 + A(1,1).W_1.W_2 + \text{etc.} \\ \quad + A(0,2).W_1.W_2 + \text{etc.} \\ \quad + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

dans laquelle, par analogie avec la construction auxiliaire (298), les présentes quantités $(W_1)_i$ et $(W_2)_i$ ont, pour des indices quelconques i_1 et i_2 , et pour des exposants quelconques m_1 et m_2 , correspondant aux plus hautes puissances de x et de y dans la congruence proposée (307), la construction générale . . . (309)

$$\begin{aligned} W_{1m_1} &= (1^{h_1})^{i_1 m_1 - 1} \cdot (H_1)^{i_1}, \\ W_{2m_2} &= (1^{h_2})^{i_2 m_2 - 1} \cdot (H_2)^{i_2}; \end{aligned}$$

les quantités (H_1) et (H_2) , d'après leur formation (291)', étant ici . . . (309')

$$\begin{aligned} H_1 &= h_1 \cdot (1^{h_1})^0 + (-1)^{h_1+1}, \\ H_2 &= h_2 \cdot (1^{h_2})^0 + (-1)^{h_2+1}. \end{aligned}$$

Et nous parviendrons ensuite à la découverte de la génération téléologique des présentes racines x et y , savoir . . . (310)

$$\begin{aligned} x &= h_1 + (-1)^{m_1+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{h_1})}, \pi_1 \right]^{(m_1-1)} + M \cdot j', \\ y &= h_2 + (-1)^{m_2+1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{h_2})}, \pi_2 \right]^{(m_2-1)} + M \cdot j'', \end{aligned}$$

les nombres j' et j'' étant toujours des nombres entiers quelconques, positifs, négatifs, ou zéro.

Telles (308) et (310) sont donc les lois de la formation, et par conséquent, tels sont aussi les principes de la solution des congruences supérieures (307) du second ordre et de degrés quelconques m_1 et m_2 . — Et comme cela doit être, lorsque les coefficients $A(0,1)$, $A(1,1)$, $A(0,2)$, etc., des puissances progressives de la deuxième inconnue y deviennent tous zéro, les présentes lois (308) et (310) se réduisent aux lois (291) et (292) qui président à la formation et à la solution des congruences composées (286) du premier ordre. Bientôt plus, en examinant la présente construction régulière des lois (308) et (310), dans leur accroissement progressif des précédentes lois (291) et (292) du premier ordre, on découvrira facilement que ces lois (308) et (310) du second ordre constituent le type des lois générales pour la forma-

tion et la solution des congruences composées de tous les ordres et de tous les degrés, en y joignant régulièrement, aux coefficients des diverses inconnues dans ces congruences des ordres supérieures, les correspondantes quantités auxiliaires $(W1)_{11}$, $(W2)_{11}$, $(W3)_{11}$, $(W4)_{11}$, etc., formées toujours d'après leur construction uniforme (309) et (309)'. — Nous pouvons donc, dès à présent, considérer comme étant complètement résolues les grandes et difficiles questions des congruences composées de tous les ordres et de tous les degrés, ces questions finales et décisives de la Théorie des Nombres, dont on n'avait pas même osé, jusqu'à ce jour, concevoir le problème dans l'état actuel de la science.

Voici d'abord quelques exemples pour éclaircir ces lois générales. — Soit proposée la congruence complète du second ordre et du second degré . . . (311)

$$\left. \begin{aligned} 5 + 3x + 7x^2 \\ + 2y + 6xy \\ + 4y^2 \end{aligned} \right\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

où il s'agit de déterminer, d'abord, le module M , et ensuite, les racines x et y , correspondant à ce module M . On aurait donc ici les valeurs $mx = 2$ et $my = 2$; et par conséquent, d'après la loi (308), on aurait, pour la génération du module M , l'expression générale . . . (312)

$$M = \text{fact.} \left\{ \begin{aligned} &5.(x^{k_1})^2.(x^{k_2})^2 + 3.(x^{k_1})^2.(x^{k_2})^2.H_1 + 7.(x^{k_1})^2.(x^{k_2})^2 \\ &+ 2.(x^{k_1})^2.(x^{k_2})^2.H_2 + 6.(x^{k_1})^2.(x^{k_2})^2.H_1.H_2 \\ &+ 4.(x^{k_1})^2.(x^{k_2})^2 \end{aligned} \right\}$$

dans laquelle les genres respectifs k_1 , k_2 , et les espèces correspondantes H_1 , H_2 , qui entrent dans les expressions (309)' des quantités (H_1) et (H_2) , sont des nombres quelconques. — Or, dans le cas le plus simple où l'on ferait . . . (313)

$$\begin{aligned} k_1 = 2, \quad k_2 = 3; \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0; \\ \text{et par conséquent,} \quad H_1 = -1, \quad \text{et} \quad H_2 = +1; \end{aligned}$$

la présente expression générale (312) donnerait, pour le module M , les valeurs . . . (313)'

$$M = \text{fact.} \left\{ \begin{aligned} &5.2^2.6^2 - 3.2^2.6^2 + 7.6^4 \\ &+ 2.2^2.6^2 - 6.2^2.6^2 \\ &+ 4.2^4 \end{aligned} \right\} = \text{fact.} \{ 97552 \};$$

c'est-à-dire, les valeurs . . . (313)''

$$M = \text{fact.} \{ 2^4.7.13.67 \}.$$

Ainsi, en y excluant les facteurs 2, 4, 8 et 16, qui sont congruents avec

le genre $kt = 2$, on aurait déjà, avec les valeurs simples (313), pour les modules de la congruence proposée (311), les nombres . . . (313)^m
 $M = 7$, $M = 13$, $M = 67$, et leurs produits combinés.
 En prenant le premier de ces modules, la congruence proposée (311) serait . . . (314)

$$5 + 3x + 2y + 7x^2 + 6xy + 4y^2 \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv 7);$$

et les expressions (310) donneraient, pour les racines x et y , les valeurs . . . (314')

$$x = + (-1)^n \cdot N \left[\frac{2}{4}, \pi_1 \right]^{(n-1)} = -2 + 7 \cdot j',$$

$$y = - (-1)^n \cdot N \left[\frac{2}{36}, \pi_2 \right]^{(n-1)} = +1 + 7 \cdot j''.$$

En effet, avec ces valeurs de x et de y , la congruence (314) se trouve réalisée. — Prenant le second des modules (313)^m, la congruence proposée (311) serait . . . (315)

$$5 + 3x + 2y + 7x^2 + 6xy + 4y^2 \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv 13);$$

et les expressions (310) donneraient, pour les racines x et y , les valeurs . . . (315')

$$x = + (-1)^n \cdot N \left[\frac{13}{4}, \pi_1 \right]^{(n-1)} = +3 + 13 \cdot j',$$

$$y = - (-1)^n \cdot N \left[\frac{13}{36}, \pi_2 \right]^{(n-1)} = +4 + 13 \cdot j'';$$

valeurs qui satisfont effectivement à la congruence (315). — Prenant encore le troisième des modules (313)^m, la congruence proposée (311) serait . . . (316)

$$5 + 3x + 2y + 7x^2 + 6xy + 4y^2 \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv 67);$$

et les expressions (310) donneraient, toujours avec les présentes valeurs (313) des éléments k et h , pour les racines x et y de cette congruence, les valeurs . . . (316')

$$x = + (-1)^n \cdot N \left[\frac{67}{4}, \pi_1 \right]^{(n-1)} = -17 + 67 \cdot j',$$

$$y = - (-1)^n \cdot N \left[\frac{67}{36}, \pi_2 \right]^{(n-1)} = -13 + 67 \cdot j'';$$

valeurs qui satisfont également à cette troisième congruence (316). — Enfin, prenant le produit total $6097 = 7 \cdot 13 \cdot 67$ des trois modules simples (313)^m, la congruence proposée (311) serait . . . (317)

$$5 + 3x + 2y + 7x^2 + 6xy + 4y^2 \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv 6097);$$

et les expressions (310) donneraient, avec les valeurs (313), pour les présentes racines x et y , les valeurs . . . (317')

$$x = + (-1)^{11} \cdot N \left[\frac{6097}{4}, \pi_1 \right]^{(31-1)} = 1524 + 6097 \cdot j',$$

$$y = - (-1)^{11} \cdot N \left[\frac{6097}{36}, \pi_2 \right]^{(31-1)} = 1863 + 6097 \cdot j''.$$

En effet, introduisant ces valeurs dans la dernière congruence (317), on aura réellement . . . (317)''

$$\begin{aligned} & 5 + 3.(1524) + 2.(1863) + 7.(1524)^2 + 4.(1863)^2 + \\ & + 6.(1524).(1863) = 47\,184\,683 = 6097 \times 7739. \end{aligned}$$

On conçoit qu'en donnant aux éléments k_1, k_2 , et A_1, A_2 , d'autres valeurs quelconques, différentes des valeurs simples (313), on obtiendrait, par la formule générale (312), une infinité de formules, analogues à la formule (313)', pour la génération de tous les modules différents M qui peuvent convenir à la congruence (311) du second ordre que nous avons prise pour premier exemple. Et l'on conçoit de même que les expressions générales (310) donneraient alors, avec ces nouvelles valeurs des éléments k_1, k_2 , et A_1, A_2 , les racines x et y correspondants à chacun de ces modules distincts M.

Si l'on proposait, pour deuxième exemple de cette formation des congruences de tous les ordres, la congruence du troisième ordre et du second degré . . . (318)

$$\left. \begin{aligned} & x + 2x + 7x^2 + 17xy \\ & + 3y + 11y^2 + 19xz \\ & + 5z + 13z^2 + 23yz \end{aligned} \right\} \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

en se proposant ainsi de découvrir, d'abord, les différents modules M qui peuvent convenir à cette congruence supérieure, et ensuite, les trois racines x, y, z , qui, pour chacun de ces modules M, réalisent cette même congruence, on aurait ici, en étendant les lois (308) et (310) aux congruences du troisième ordre, d'après ce que nous avons dit plus haut, on aurait, disons-nous, d'abord, les valeurs $m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = 2$. Et si, pour simplifier les expressions, on adopte généralement, pour les factorielles, la notation . . . (319)

$$J(k) = (1^k);$$

la loi (308) donnera, pour la génération des modules M convenant à la congruence proposée (318), l'expression générale . . . (320)

$$M = \text{fact.} \left\{ \begin{aligned} & J(k_1)^4 \cdot J(k_2)^4 \cdot J(k_3)^4 + 2 \cdot J(k_1)^5 \cdot J(k_2)^4 \cdot J(k_3)^4 \cdot H_1 + 7 \cdot J(k_2)^4 \cdot J(k_3)^4 \cdot (H_1)^2 \\ & + 3 \cdot J(k_1)^4 \cdot J(k_2)^5 \cdot J(k_3)^4 \cdot H_2 + 11 \cdot J(k_1)^4 \cdot J(k_3)^4 \cdot (H_2)^2 \\ & + 5 \cdot J(k_1)^4 \cdot J(k_2)^4 \cdot J(k_3)^5 \cdot H_3 + 13 \cdot J(k_1)^4 \cdot J(k_2)^4 \cdot (H_3)^2 \\ & + J(k_1)^5 \cdot J(k_2)^4 \cdot J(k_3)^4 \cdot [17 \cdot J(k_3)^4 \cdot H_1 \cdot H_2 + 19 \cdot J(k_2)^4 \cdot H_1 \cdot H_3 + 23 \cdot J(k_1)^4 \cdot H_2 \cdot H_3] \end{aligned} \right\}$$

dans laquelle les quantités auxiliaires $(H_1), (H_2), (H_3)$, sont formées d'après

leur construction générale (309)', eo ne perdant pas de vue que les éléments k_1 , k_2 , k_3 , et A_1 , A_2 , A_3 appartiennent respectivement aux trois racines x , y , z . — Quant à ces racines x , y , z , la loi (310), étendue également aux congruences du troisième ordre, en y introduisant les éléments que nous venons de signaler, servira immédiatement à déterminer ces racines pour chacun des modules M que donnera ainsi leur présente expression générale (320). — Il suffira donc d'assigner à ces éléments k_1 , k_2 , k_3 , et A_1 , A_2 , A_3 , des valeurs quelconques, comme nous l'avons fait sous la marque (313) pour le premier exemple (311); et l'on obtiendra facilement, d'abord, par la présente expression générale (320), les modules M qui, pour de tels éléments des racines x , y , z , conviendront à la congruence proposée (318), et ensuite, par la loi générale (310), ces racines elles-mêmes x , y , z , qui réaliseront cette congruence proposée du troisième ordre. — Nous pensons qu'après tous les exemples que nous avons déjà donnés, les géomètres pourront eux-mêmes faire ces calculs numériques et pourront ainsi se procurer le plaisir d'accomplir ce deuxième exemple (318), dans lequel, comme on le voit, nous avons pris, pour les coefficients, le commencement de la suite des nombres premiers.

Abordons enfin, pour compléter cette réforme de la Théorie des Nombres, la solution générale de ces congruences des ordres supérieurs et de degrés quelconques m_1 , m_2 , m_3 , etc. — Mais, pour ne pas trop nous écarter du véritable objet de l'ouvrage présent, dont nous nous sommes déjà écarté considérablement, bornons-nous ici à établir les principes de cette solution générale dont nous traiterons spécialement, avec toutes ses applications numériques, dans notre ouvrage sur la Théorie des Nombres qui est annoncé dans le Programme précédent. Toutefois, nous allons établir ces principes avec des développements suffisants pour que, dès aujourd'hui, cette grande question de la résolution des congruences de tous les ordres et de tous les degrés puisse être considérée comme étant accomplie définitivement. Nous en présenterons même, comme exemples, des applications spéciales qui compléteront, s'il en était besoin, l'intelligence de ces principes absolus.

Commençons par spécifier l'application de notre méthode (300) et (300)' en la faisant porter immédiatement sur les puissances des quantités H qui, en vertu de leur construction (291)' et généralement (309)', sont des fonctions de l'espèce k , au lieu de la faire porter, comme nous l'avons fait sous ces marques (300) et (300)', sur les fonctions générales W_k , douées par leur construction (298). — Or, eo nous servant, pour désigner les factorielles, de la notation (319), ces fonctions W_k seront généralement . . . (321)

$$W_k = I(k)^{v(n-k)} \cdot H^r_k$$

et si nous considérons alors la fonction génératrice (299) du module M comme

une fonction du genre k et de la quantité H qui contient l'espèce k , en désignant cette fonction génératrice par $F(k, H)$, son expression (299)' deviendra . . . (322)

$$F(k, H) = A_n.J(k)^{n^m} + A_{n-1}.J(k)^{n^{m-1}}.H + A_{n-2}.J(k)^{n^{m-2}}.H^2 + \\ + A_{n-3}.J(k)^{n^{m-3}}.H^3 . . . + A_m.J(k)^n.H^m.$$

Et la fonction variée (300), rapportée ainsi aux puissances de la quantité H , sera . . . (323)

$$F(k, H \pm \Delta H) = B_n.J(k)^{n^m} + B_{n-1}.J(k)^{n^{m-1}}.H + B_{n-2}.J(k)^{n^{m-2}}.H^2 + \\ + B_{n-3}.J(k)^{n^{m-3}}.H^3 . . . + B_m.J(k)^n.H^m;$$

en désignant par $\pm \Delta H$ l'accroissement ou le décroissement de la quantité H par suite de l'augmentation ou de la diminution d'une unité que reçoit l'espèce k dont cette quantité H est fonction. — Quant aux coefficients $B_1, B_2, B_3, . . . B_m$ de la fonction variée (323), ils se trouvent toujours déterminés, en vertu des formules (300)', par les coefficients $A_1, A_2, A_3, . . . A_m$ de la fonction primitive (322) ou de la congruence générale (286).

Or, en considérant ainsi les quantités W_i comme étant des fonctions des puissances H^i , la fonction génératrice (308) des modules M , prise dans son absolue généralité pour les congruences de tous les ordres, sera manifestement une fonction des genres k_1, k_2, k_3 , etc., et des quantités correspondantes H_1, H_2, H_3 , etc., c'est-à-dire, une fonction de ces éléments qui se rapportent respectivement aux racines inconnues x, y, z , etc. de ces congruences; de sorte qu'en dénotant cette générale fonction génératrice par la caractéristique F , on aura, dans tous les ordres de congruences, pour la génération des modules M , l'expression . . . (324)

$$M = \text{fact.} \left\{ F(k_1, k_2, k_3, \text{etc.}; H_1, H_2, H_3, \text{etc.}) \right\},$$

qui formera la congruence générale . . . (325)

$$F(k_1, k_2, k_3, \text{etc.}; H_1, H_2, H_3, \text{etc.}) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

Et nous pourrions maintenant concevoir facilement la résolution générale de ces congruences de tous les ordres.

Commençons par les congruences (307) du second ordre, pour lesquelles la fonction génératrice (324) formera ici, d'après (325), la congruence particulière . . . (326)

$$F(k_1, k_2; H_1, H_2) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

Distinguons, dans cette fonction génératrice, trois classes de termes, savoir: 1° les termes qui ne contiennent que la quantité H_1 , et dont nous dénoterons la somme par la caractéristique $F^{(1)}$; 2° les termes qui ne contiennent que la quantité H_2 , et dont nous dénoterons la somme par la caractéristique $F^{(2)}$; et 3° les termes qui contiennent ces deux quantités H_1 et H_2 combinées ensemble par l'algorithme de la multiplication, et dont nous dénoterons la

somme par la caractéristique F^n . Nous pourrions alors, par la moyen de trois quantités supplémentaires S_1, S_2, S_3 , décomposer la congruence (326) en trois congruences partielles . . . (327)

$$S_1 + F^{(1)}(k_1, k_2; H_1) \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

$$S_2 + F^{(2)}(k_1, k_2; H_2) \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

$$S_3 + F^{(3)}(k_1, k_2; H_1, H_2) \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

pourvu que ces trois quantités supplémentaires S soient telles qu'elles forment la congruence . . . (328)

$$S_1 + S_2 + S_3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

car, en prenant la somme des trois congruences partielles (327), on retrouvera la congruence totale (326). — On pourra alors appliquer immédiatement, aux deux fonctions $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ des deux premières des congruences partielles (327), notre méthode (300) ou spécialement (323), pour déterminer les valeurs de ces fonctions $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$, correspondant respectivement, pour la fonction $F^{(1)}$, aux valeurs consécutives $A_1 = 0, A_1 = 1, A_1 = 2$, etc., et $A_1 = -1, A_1 = -2$, etc., de l'espèce A_1 qui forme l'élément de la quantité H_1 , et pour la fonction $F^{(2)}$, aux valeurs consécutives $A_2 = 0, A_2 = 1, A_2 = 2$, etc., et $A_2 = -1, A_2 = -2$, etc., de l'espèce A_2 qui forme l'élément de la quantité H_2 . Et l'on pourra ainsi, dans ces deux premières des congruences partielles (327), déterminer les valeurs des quantités supplémentaires S_1 et S_2 , qui correspondront respectivement à ces valeurs consécutives de l'espèce A_1 et de l'espèce A_2 , et qui, pour chacune de ces valeurs de A_1 et de A_2 , serviront respectivement à réaliser les deux premières congruences partielles (327). — En éliminant ensuite, dans la dernière de ces trois congruences partielles (327), d'une part, la quantité H_1 par le moyen de la première de ces congruences (327), et de l'autre part, la quantité H_2 par le moyen de la seconde de ces mêmes congruences (327), on obtiendra, pour résultante, une congruence qui ne contiendra plus ni l'une ni l'autre de ces deux quantités H_1 et H_2 , mais qui contiendra les trois quantités supplémentaires S_1, S_2, S_3 ; de sorte qu'en dénotant par la caractéristique $F^{(3)}$ la fonction que, dans cette résultante, formeront ainsi ces quantités supplémentaires S_1, S_2, S_3 , on aura, pour la relation de ces quantités, la congruence . . . (329)

$$F^{(3)}(k_1, k_2; S_1, S_2, S_3) \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M).$$

Et éliminant ici de plus la troisième S_3 de ces quantités par le moyen de leur congruence de condition (328), c'est-à-dire, introduisant ici pour S_3 sa valeur $-(S_1 + S_2)$, on obtiendra définitivement, pour la relation des deux premières S_1 et S_2 de ces quantités supplémentaires, dont nous venons de

fixer les valeurs, la finale congruence de condition . . . (33o)

$$F^{(6)}(k_1, k_2; S_1, S_2) \equiv 0, \quad (\text{mod. } = M).$$

On aura donc alors, d'abord, par les deux premières des congruences partielles (327), les différentes valeurs des deux quantités supplémentaires S_1 et S_2 , correspondant respectivement aux différentes valeurs des espèces A_1 et A_2 , et ensuite, par la congruence finale (33o), la relation que doivent avoir ces valeurs des quantités S_1 et S_2 , pour qu'elles puissent donner la solution du problème, c'est-à-dire, pour qu'elles fassent découvrir les espèces correspondantes A_1 et A_2 qui appartiennent aux racines cherchées x et y . Et par conséquent, toutes celles de ces valeurs des quantités supplémentaires S_1 et S_2 , qui satisferont à la finale congruence de condition (33o), indiqueront ainsi les différents systèmes de valeurs des espèces A_1 et A_2 qui, comme nous venons de le dire, appartiennent respectivement aux racines x et y . — Connaissant donc ces espèces respectives A_1 et A_2 , et les genres correspondants k_1 et k_2 , que l'on aura pris arbitrairement, mais que l'on aura choisis de manière à rendre tous ces calculs le moins compliqués et le plus prompts possibles, la loi générale (310) fera connaître, avec ces différents systèmes de valeurs respectives k_1, k_2 , et A_1, A_2 , les différents systèmes de valeurs des racines x et y , qui résoudront la congruence proposée (307) du second ordre et de degrés quelconques m_1 et m_2 . — Il n'est même pas nécessaire d'opérer, dans la troisième des congruences partielles (327), l'élimination des quantités H_1 et H_2 par le moyen des deux premières de ces congruences (327). On peut y déterminer immédiatement, avec les valeurs de ces quantités H_1 et H_2 , la valeur de la quantité supplémentaire S_3 . Et alors, la première congruence de condition (328), qui fixe la relation des valeurs des quantités supplémentaires S_1, S_2, S_3 , suffira pour choisir celles de ces quantités qui donnent la solution du problème, comme nous le verrons mieux à l'instant dans l'exposé général de cette méthode.

Nous aurons maintenant à donner la solution des congruences du troisième ordre, contenant les trois racines inconnues x, y, z , conformément à l'exemple (318) et (320) de leur formation. Mais, comme on peut le prévoir déjà, les principes étant ici tout à fait identiques avec ceux que nous avons suivis dans la solution précédente, et même tout à fait identiques avec les principes qui président à la solution générale des congruences de tous les ordres, nous pourrions nous dispenser d'entrer dans de plus amples détails, et nous procéderons immédiatement à donner cette solution générale pour un ordre quelconque p et pour des degrés quelconques $m_1, m_2, m_3, \dots, m_p$.

Nous aurons ainsi, en vertu de l'universelle fonction génératrice (324) des modules M , et par conséquent en vertu de la congruence normale (325) qui en résulte, pour la solution générale en question, la congruence spéciale

. . . (331)

$F(k_1, k_2, k_3, \dots, k_\mu; H_1, H_2, H_3, \dots, H_\mu) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M).$
Et, comme à la marque (327), on pourra, par le moyen de $(\mu + 1)$ quantités supplémentaires $S_1, S_2, S_3, \dots, S(\mu + 1)$, décomposer cette congruence (331) en $(\mu + 1)$ congruences partielles . . . (332)

$$S_1 + F^{(1)}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_\mu; H_1) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

$$S_2 + F^{(2)}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_\mu; H_2) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

$$S_3 + F^{(3)}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_\mu; H_3) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_\mu + F^{(\mu)}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_\mu; H_\mu) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M);$$

$S(\mu + 1) + F^{(\mu+1)}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_\mu; H_1, H_2, H_3, \dots, H_\mu) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M);$
pourvu que ces quantités supplémentaires S satisfassent à la congruence de condition . . . (333)

$$S_1 + S_2 + S_3 \dots + S_\mu + S(\mu + 1) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

Or, par la méthode (300) ou (323) et par les procédés que nous avons indiqués pour les deux premières des congruences partielles (327), les μ premières des présentes congruences partielles (332) feront connaître les différentes valeurs des μ quantités supplémentaires $S_1, S_2, S_3, \dots, S_\mu$, qui correspondront respectivement aux différentes valeurs, positives et négatives, des espèces $k_1, k_2, k_3, \dots, k_\mu$ appartenant aux racines cherchées que nous désignerons ici généralement par $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu$. — Éliminant alors successivement, dans la dernière de ces congruences partielles (332), les quantités $H_1, H_2, H_3, \dots, H_\mu$, par le moyen des μ premières de ces congruences (332), on arrivera à une congruence finale que nous dénoterons par la caractéristique $F^{(\mu+1)}$, et qui ne contiendra plus que les $(\mu + 1)$ quantités supplémentaires S , savoir . . . (334)

$$F^{(\mu+1)}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_\mu; S_1, S_2, S_3, \dots, S(\mu + 1)) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

Et en y éliminant de plus la dernière $S(\mu + 1)$ de ces quantités supplémentaires, par le moyen de leur congruence de condition (333), on obtiendra définitivement, pour la relation des μ premières de ces quantités S , la finale congruence de condition . . . (335)

$$F^{(\mu+1)}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_\mu; S_1, S_2, S_3, \dots, S_\mu) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv M).$$

On aura donc généralement, d'abord, par les μ premières congruences partielles (332), les différentes valeurs des μ premières quantités supplémentaires $S_1, S_2, S_3, \dots, S_\mu$, correspondant respectivement aux différentes valeurs des espèces $k_1, k_2, k_3, \dots, k_\mu$, et ensuite, par la congruence finale (335), la relation que doivent avoir ces valeurs des quantités $S_1, S_2, S_3, \dots, S_\mu$, pour qu'elles puissent donner la solution du problème, c'est-à-dire, pour

qu'elles fassent découvrir les espèces $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\mu$ qui appartiennent respectivement aux racines cherchées $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu$. — Mais, comme nous en avons déjà prévu plus haut, il n'est même pas toujours nécessaire d'opérer, dans la dernière des congruences partielles (33a), l'élimination successive des quantités $H_1, H_2, H_3, \dots, H_\mu$, par le moyen des μ premières de ces congruences (33a); car, cette dernière congruence peut faire connaître immédiatement la valeur de la quantité supplémentaire $S(\mu+1)$ par les valeurs des quantités $H_1, H_2, H_3, \dots, H_\mu$. Et quant à ces valeurs des quantités $H_1, H_2, H_3, \dots, H_\mu$, elles se trouvent, à leur tour, données immédiatement par les μ premières congruences partielles (33a); car, en y déterminant, par l'application de notre susdite méthode (30c) ou (3a3), les valeurs des fonctions $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(\mu)}$, pour en conclure les valeurs des quantités supplémentaires $S_1, S_2, S_3, \dots, S_\mu$, on sait, à chaque fois, à quelles valeurs des espèces $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\mu$ correspondent ces déterminations successives; et par conséquent, on peut, à chaque fois, par les expressions générales (30g)', déterminer les valeurs des quantités en question $H_1, H_2, H_3, \dots, H_\mu$, correspondant ainsi aux différentes valeurs des espèces $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\mu$, et par là même, aux différentes valeurs des quantités supplémentaires $S_1, S_2, S_3, \dots, S_\mu$. On obtiendra donc ainsi, avec les seules valeurs des quantités $H_1, H_2, H_3, \dots, H_\mu$, par la dernière des congruences partielles (33a), la valeur de la quantité supplémentaire $S(\mu+1)$, correspondant à toute combinaison que l'on établira entre les μ premières $S_1, S_2, S_3, \dots, S_\mu$ de ces quantités supplémentaires. Et alors, la simple congruence de condition (333) que doivent remplir ces $(\mu+1)$ quantités supplémentaires S , suffira pour reconnaître tous les systèmes de combinaison que peuvent recevoir les μ premières de ces mêmes quantités, pour être propres à la solution du problème, c'est-à-dire, à la découverte des espèces $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\mu$ qui appartiennent respectivement aux racines cherchées $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu$. Enfin, la loi générale (31o), en y introduisant ces valeurs respectives des espèces $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\mu$, et les valeurs arbitraires des genres correspondants $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\mu$, fera connaître les racines cherchées $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu$, qui résoudront la congruence proposée d'un ordre quelconque μ et de degrés quelconques $m_1, m_2, m_3, \dots, m_\mu$.

En terminant ici la solution des congruences composées de tous les ordres, et par là même la solution de toutes les grandes questions fondamentales de la Théorie des Nombres, nous devons encore une fois caractériser l'esprit de nos méthodes téléologiques, de ces méthodes qui seules pouvaient donner ces solutions difficiles, en rappelant que cet esprit consiste uniquement en ce que, dans la recherche des quantités inconnues qui font l'objet des grandes questions de la Théorie des Nombres, au lieu d'arriver immédiatement à ces quantités elles-mêmes, comme dans toutes les questions purement logiques ou algébriques de

l'Algorithme, où la loi de continuité préside à la génération des quantités inconnues, nos présentes méthodes téléologiques tendent à découvrir d'abord les éléments des quantités inconnues, c'est-à-dire, leur genre k et leur espèce A , parce que ces quantités inconnues qui font l'objet des questions de la Théorie des Nombres, par suite du téléologisme ou de la finalité qui est leur caractère distinctif, échappent à la loi de continuité, et se rangent au contraire et exclusivement sous la loi d'isolement, c'est-à-dire, sous la loi de singularité, où elles ne peuvent être atteintes méthodiquement que par leurs éléments philosophiques, leur genre k et leur espèce A . En effet, comme on le voit dans toutes nos expressions téléologiques des quantités inconnues en question, et principalement dans la seconde des générations téléologiques (15), ainsi que dans la présente expression générale (310) des racines des congruences, les deux éléments k et A de ces quantités inconnues sont toujours, dans leur principe philosophique, de nature à ce que l'un de ces éléments demeure arbitraire; de sorte que, par la libre ou arbitraire détermination de l'un de ces deux éléments k et A , et spécialement du genre k , on peut toujours resserrer à volonté les limites dans lesquelles s'étend numériquement la seconde de ces éléments, pour reconnaître *a posteriori* les cas singuliers parmi lesquels se trouve la détermination téléologique et par conséquent la détermination contingente des quantités cherchées, auxquelles se rapportent ces éléments philosophiques k et A des nombres. — C'est là généralement la grande mélodie téléologique qui résulte de l'application à la Théorie des Nombres de notre troisième et dernière loi fondamentale des Mathématiques. — Ainsi, dans la présente solution générale (332) des congruences composées des ordres supérieurs, on voit que cette solution, qui, lorsqu'on y reconnaît l'influence des éléments téléologiques k et A , paraît d'abord une simple méthode de tâtonnement, comme le croiront peut-être certains illustres académiciens, a essentiellement pour objet de resserrer, par l'influence des éléments arbitraires $k_1, k_2, k_3, \dots, k_p$, les limites des cas singuliers dans lesquels, par suite de leur finalité, peuvent se réaliser les racines cherchées $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$; de sorte que, par suite de cette limitation arbitraire des cas singuliers en question, la recherche des espèces respectives $k_1, k_2, k_3, \dots, k_p$ de ces racines, se trouve, à son tour, réduite à une étendue numérique aussi bornée qu'on peut le désirer, comme on le voit dans les expressions générales (310) de ces racines, où l'étendue numérique, positive ou négative, de l'espèce A peut toujours être réduite à volonté par le genre arbitraire k . — Il en est de même de notre méthode téléologique (300) pour la solution générale des congruences (286) du premier ordre, où l'on peut également, par l'influence de l'élément arbitraire k , resserrer à volonté, dans l'expression générale (292) des racines x , l'étendue numérique, positive ou négative, de l'espèce A , et réduire ainsi à volonté le nombre d'opérations qu'exige cette méthode (300), comme nous

l'avons déjà fait remarquer plus haut. Et il en est de même généralement dans toutes nos méthodes téléologiques, et entre autres, dans notre méthode (95) et (99) pour la solution générale des congruences fondamentales (14) ou (85), dans cette méthode où, par suite de l'élimination (36) de l'espèce k , le genre k conserve la faculté de rendre, par sa détermination arbitraire, les résidus T_1, T_2, T_3 , etc., plus ou moins propres à limiter l'étendue numérique des cas singuliers où, par sa finalité, peut se réaliser la racine cherchée x . — Pour se convaincre, d'une manière infaillible, de cette décisive propriété de nos méthodes téléologiques, consistant à resserrer à volonté les limites des cas singuliers dans lesquels, par la finalité des ombres, peuvent se réaliser les nombres inconnus qui font l'objet des problèmes de la Théorie des Nombres, il suffit de détruire, dans nos méthodes téléologiques, cette finalité des nombres, en y faisant $k=0$ et $k=1$, comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut. En effet, on verra par là que toutes ces méthodes téléologiques, perdant alors tout à coup leur faculté de resserrer indéfiniment les limites des susdits cas singuliers où, par pure contingence, peut se réaliser la finalité des nombres, se réduisent à des procédés purement algébriques, tels que la science les avait jusqu'à ce jour, c'est-à-dire, à des procédés où, n'ayant plus aucun moyen pour limiter les cas singuliers en question, et ne pouvant non plus se diriger ici par la loi de continuité, on est forcé d'entreprendre un tâtonnement illimité pour découvrir les ombres cherchées. Ainsi, dans la présente question des congruences complètes de tous les ordres (286), (307), etc., lorsqu'on donne aux genres k_1, k_2, k_3 , etc., ces valeurs zéro ou l'unité, destructrices de la finalité, les ombres auxiliaires H_1, H_2, H_3 , etc., tels qu'ils sont donnés par les expressions (291)', et généralement (309)', en les rapportant à un indice quelconque v , deviennent $x \equiv x$ (336)

$$\begin{array}{ll} \text{pour } kv = 0, & Hv = kv - 1, \quad \text{et} \\ \text{pour } kv = 1, & Hv = kv + 1; \end{array}$$

et pour ces mêmes valeurs des genres k_1, k_2, k_3 , etc., les racines x_1, x_2, x_3 , etc., telles qu'elles sont données par les expressions (292) et généralement (310), en les rapportant au même indice v , deviennent . . . (336)'

$$\begin{array}{ll} \text{pour } kv = 0, & xv = kv - 1, \quad \text{et} \\ \text{pour } kv = 1, & xv = kv + 1; \end{array}$$

c'est-à-dire que, pour ces valeurs destructrices de la finalité dans les nombres, on a généralement . . . (337)

$$H = x; \quad H_1 = x, \quad H_2 = y, \quad H_3 = z, \quad \text{etc.};$$

de sorte qu'en introduisant, dans les fonctions génératrices (291), (308), etc., du module M , d'une part, les valeurs $kv=0$ ou $kv=1$ des genres k , et de l'autre, les présentes valeurs (337) des nombres auxiliaires H , ces fonctions génératrices du module M se réduisent respectivement aux congruences pro-

posées (286), (307), etc. Et alors, on n'aurait, pour la détermination du module M des congruences, aucun autre moyen que celui de le chercher avec les valeurs elles-mêmes des racines x, y, z , etc. de ces congruences; de sorte que, pour des coefficients donnés dans les congruences, on ne saurait connaître d'avance les modules qui correspondent à de tels coefficients, ainsi qu'on ne peut le faire effectivement dans l'état actuel de la science. Bien plus, les fonctions génératrices (291), (308), etc. du module M se réduisant ainsi aux congruences elles-mêmes (286), (307), etc., lorsque les genres k ont les susdites valeurs destructrices de la finalité dans les nombres, il n'y aurait, pour la détermination des racines x, y, z , etc. de ces congruences dont le module M serait donné, aucun autre moyen, absolument aucun autre que celui d'un tâtonnement illimité avec toutes les valeurs consécutives 1, 2, 3, 4, 5, etc., positives et négatives, adaptées progressivement pour ces racines x, y, z , etc., dans toutes leurs combinaisons possibles; ce qui, lorsque ces racines auraient pour valeurs de grands nombres, serait un procédé absolument impraticable, comme il l'est encore effectivement dans l'état actuel de la science. — On comprendra maintenant comment, par l'introduction de nos éléments téléologiques k et A dans la Théorie des Nombres, de ces éléments dont le premier, par sa valeur arbitraire, peut, dans les expressions générales (292), (310), etc. des racines cherchées x, y, z , etc., resserrer à volonté l'étendue numérique du second A de ces éléments, on comprendra, disons-nous, comment, par cette introduction des éléments k et A , on peut, dans tous les problèmes de la Théorie des Nombres, fixer des limites aux cas singuliers dans lesquels, par la finalité qui est toujours l'objet de ces problèmes, peuvent se réaliser les nombres cherchés, et nommément des limites aussi resserrées que, par la valeur arbitraire du genre k , les admettent, pour l'étendue numérique de l'espèce A , les susdites expressions générales (292), (310), etc. de ces nombres cherchés, lesquels, dans cette détermination téléologique, pour ne pas demeurer tout à fait indéterminés, ont nécessairement de tels éléments philosophiques, constituant leur genre k et leur espèce A , et servant ainsi à déterminer ces cas singuliers dans lesquels, par leur finalité, ces nombres peuvent se réaliser. — Ceux des géomètres qui sauront approfondir ces principes philosophiques de leur science, comprendront facilement que les méthodes téléologiques que nous venons de faire connaître, et qui ne forment proprement qu'une seule et générale méthode téléologique, sont absolues et seront conséquemment à jamais les seules méthodes possibles pour la solution des grands et difficiles problèmes de la Théorie des Nombres.

Nous regrettons de ne pouvoir, par anticipation sur notre susdit traité de la Théorie des Nombres, faire connaître, dans l'ouvrage présent, où nous nous sommes déjà trop écarté de son véritable objet, de ne pouvoir, disons-nous, faire connaître, avec quelques développements, l'application de la présente

solution des congruences à la résolution générale des équations indéterminées de tous les ordres et de tous les degrés. Heureusement, cette application est maintenant une chose tellement facile que, par quelques mots, nous pourrions la faire connaître assez pour que les géomètres, ceux du moins que nous venons de distinguer, puissent se convaincre de ce que cette résolution générale des équations indéterminées se trouve donnée et est accomplie dès aujourd'hui.

Au moment où nous allons commencer l'exposé rapide de cette résolution générale des équations indéterminées de tous les ordres et de tous les degrés, il nous survient une de ces interminables obstacles qui sans cesse s'opposent à nos travaux. Nous sommes donc forcés de renoncer à produire ici cette résolution générale, afin d'arriver le plus tôt possible à la fin de la présente deuxième partie de cet ouvrage. — Ce qui diminuera nos regrets à cet égard, c'est que, d'une part, les principes téléologiques que nous venons de fixer, et les nombreuses applications que nous en avons faites déjà, sont plus que suffisants pour fonder définitivement la présente réforme de la Théorie des Nombres, et de l'autre part, les développements ultérieurs de cette réforme, tels qu'ils seront donnés dans notre susdit traité de la Théorie des Nombres, compléteront, avec de nombreuses applications, cette question maintenant si facile de la résolution des équations indéterminées, qu'il nous restait à produire. Bien plus, pour ne laisser rien à désirer au lecteur, nous allons, en nous renfermant dans les limites qui nous sont maintenant imposées, donner rapidement au moins une idée des principes sur lesquels repose cette grande et dernière question, de manière à ce que, dans le cas malheureux où notre huitième ouvrage annoncé, la Théorie des Nombres, ne devrait plus paraître, les géomètres puissent eux-mêmes, par la solution complète de cette question, accomplir la présente réforme de la Théorie des Nombres.

Il suffit pour cela de remarquer, d'abord, que la résolution des équations indéterminées, par le moyen de nombres entiers, ou du moins par des nombres fractionnaires, ce qui réduit toujours la question à des nombres entiers, forme évidemment une question de fiabilité dans les nombres, c'est-à-dire, une question téléologique, appartenant à la Théorie des Nombres. Il faut ensuite observer que, comme question téléologique, la résolution spéciale des équations indéterminées doit manifestement être rangée sous la question générale de la résolution des congruences. — On comprendra alors facilement que tout ce que requiert de plus la résolution des équations indéterminées, c'est, d'abord, leur transformation algébrique en relation de congruence, et ensuite, le compte qu'il faut ici tenir du facteur complémentaire du module, de ce facteur qui, dans les pures congruences, demeure absolument arbitraire. — Or, l'une et l'autre de

ces nouvelles conditions requises peuvent être remplies très-facilement, comme nous alloos le voir.

Pour ce qui concerne d'abord la transformation algébrique des équations indéterminées, pour en faire des congruences du même ordre et du même degré, sans parler ici de certains artifices algébriques par lesquels on peut opérer cette transformation, nous dirons généralement que, dans toute équation indéterminée, d'un ordre et d'un degré quelconque . . . (338)

$$\begin{aligned} 0 = & (1) + (2).x + (5).x^2 + (8).xy + (11).x^2 + (14).x^2y + (17).xyz + \text{etc.} \\ & + (3).y + (6).y^2 + (9).xz + (12).y^2 + (15).xy^2 + \text{etc.} \\ & + (4).z + (7).z^2 + (10).yz + (13).z^2 + (16).x^2z \\ & + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} \end{aligned}$$

dans laquelle les coefficients sont désignés par (1), (2), (3), (4), etc., il existe toujours, lorsque l'équation est complète, un terme qui contient le produit de toutes les inconnues x, y, z , etc., tel que le serait ici le terme (8). xy , si l'équation n'était que du second ordre, ou le terme (17). xyz , si elle était du troisième ordre, et ainsi de suite dans tous les ordres ultérieurs. — Or, en désignant généralement par $M(x, y, z, \text{etc.})$ ce terme spécial, que nous nommerons le **TERME DOMINANT** de l'équation, et si nous dénotons de plus par $F(x, y, z, \text{etc.})$ la fonction que forment tous les autres termes d'une équation indéterminée et générale (338) d'un ordre μ et d'un degré quelconque m , cette équation sera . . . (339)

$$0 = F(x, y, z, \text{etc.}) + M(x, y, z, \text{etc.}) ;$$

et elle pourra immédiatement être transformée dans la congruence du même ordre μ et du même degré m , savoir . . . (340)

$$F(x, y, z, \text{etc.}) \equiv 0, \quad (\text{mod. } \equiv M).$$

Il est sans doute superflu de faire remarquer que, si l'équation proposée (338) ne contenait pas le terme dominant en question, il faudrait la transformer en une autre, en y introduisant, à la place des inconnues x, y, z , etc., de nouvelles inconnues ξ, v, ζ , etc., moyennant les relations . . . (341)

$$\begin{aligned} x &= \omega_1 + \alpha_1.\xi + \beta_1.v + \gamma_1.\zeta + \text{etc.}, \\ y &= \omega_2 + \alpha_2.\xi + \beta_2.v + \gamma_2.\zeta + \text{etc.}, \\ z &= \omega_3 + \alpha_3.\xi + \beta_3.v + \gamma_3.\zeta + \text{etc.}, \\ &\text{etc., etc.} \end{aligned}$$

dans lesquelles les coefficients $\omega_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, etc.; $\omega_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, etc.; $\omega_3, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, etc.; seraient des nombres arbitraires, que l'on pourrait d'ailleurs preodre de manière à opérer, dans l'équation transformée, une réduction quelconque des autres termes, lorsque cela serait possible. — Et dans le cas où l'équation proposée (338) serait d'un degré m inférieur à son ordre μ , cas où la présente transformation (341) ne saurait amener le terme dominant, celui qui contiendrait le produit ($\xi.v.\zeta$, etc.) de toutes les nouvelles

inconnues, il faudrait d'abord préparer l'équation proposée (338) pour l'élever au degré μ équivalant à son ordre, en multipliant tous les termes de cette équation par une puissance suffisante de l'une, de plusieurs, ou de toutes ses inconnues x, y, z , etc.; ce qui ne saurait en rien altérer la nature de cette équation proposée (338), puisque ses inconnues x, y, z , etc., ne sont ici jamais supposées égales à zéro.

Or, après avoir ainsi transformé une équation générale et complète (339) en sa congruence correspondante (340) du même ordre et du même degré, la solution de cette congruence pourra immédiatement être opérée par l'application des méthodes (331), (332), etc., que nous venons de faire connaître pour la résolution générale des congruences de tous les ordres et de tous les degrés. Et l'on obtiendra ainsi, par la loi générale (310), les inconnues x, y, z , etc. de cette congruence (340); inconnues qui auront la forme . . . (342)

$$\begin{aligned}x &= X_1 + M.j_1, \\y &= Y_1 + M.j_2, \\z &= Z_1 + M.j_3, \\&\text{etc., etc. ;}\end{aligned}$$

dans laquelle les quantités X_1, Y_1, Z_1 , etc. se trouveront déterminées numériquement, et les quantités j_1, j_2, j_3 , etc. seront des nombres arbitraires, positifs, négatifs, ou zéro.

Mais, ces présentes valeurs (342) des inconnues x, y, z , etc., qui seront bien celles qui résoudreont la congruence (340) dans laquelle se trouvera transformée l'équation indéterminée (339), ne seront pas encore les valeurs des inconnues x, y, z , etc. de cette équation proposée elle-même. En effet, dans la congruence transformée (340) le facteur complémentaire du module M , c'est-à-dire, le quotient de la division de la fonction $F(x, y, z, \text{etc.})$ par le module M , demeure absolument arbitraire. Et il n'en est pas de même dans l'équation proposée (339), où ce même quotient, c'est-à-dire, le facteur complémentaire du nombre M , forme la quantité déterminée $-(x.y.z.\text{etc.})$. Il faut donc, pour rendre les valeurs (342) des inconnues x, y, z , etc. de la congruence (340) telles qu'elles soient en même temps les valeurs des inconnues x, y, z , etc. de l'équation proposée (339), il faut, disons-nous, dans les expressions (342), déterminer les nombres arbitraires j_1, j_2, j_3 , etc., de manière à ce que ces valeurs (342) deviennent identiques avec celles des inconnues en question x, y, z , etc. de l'équation (339). Et pour cela, il suffit d'introduire ces expressions (342) des quantités x, y, z , etc., à la place de ces mêmes quantités dans l'équation proposée (339). Il en résultera, entre les quantités arbitraires j_1, j_2, j_3 , etc., une équation indéterminée dont nous démontrerons la fonction par la caractéristique Φ , savoir . . .

$$\dots (343) \quad 0 = \Phi(j_1, j_2, j_3, \text{etc.}),$$

qui sera du même ordre μ et du même degré m que la primitive équation proposée (33g). Il semblerait donc, au premier aspect, que l'on n'a rien gagné, puisque, pour arriver maintenant à la détermination des nombres j_1, j_2, j_3 , etc., il faudrait résoudre une équation indéterminée du même ordre et du même degré que l'équation (33g) proposée primitivement. Mais, en considérant, d'une part, que ces nombres j_1, j_2, j_3 , etc., en tant qu'ils concourent à la solution de la congruence (34o), sont absolument indéterminés, et de l'autre part surtout, que, précisément parce que les valeurs (34a) des racines x, y, z , etc. de cette congruence (34n) rendent ainsi divisible par M l'équation entière (33g), ces valeurs (34a) forment déjà une première détermination des valeurs des racines x, y, z , etc. de l'équation (33g) elle-même, en considérant, disons-nous, cette double propriété des valeurs (34a), on comprendra que l'une de ces valeurs, n'importe laquelle, pourra déjà, par une détermination quelconque de son nombre arbitraire j , en le faisant surtout égal à zéro, former la racine correspondante dans l'équation (33g), pourvu que l'on détermine ensuite les nombres arbitraires j des autres des valeurs en question (34a) de manière à ce que, introduites dans l'équation (33g), ces valeurs puissent la réaliser, c'est-à-dire, de manière à ce que l'équation résultante (343), en y donnant une valeur quelconque à l'un des nombres arbitraires j_1, j_2, j_3 , etc., puisse, par une détermination correspondante des autres de ces nombres arbitraires, subsister réellement. Ainsi, cette équation résultante (343), en y faisant égal à zéro, ou égal à tout autre nombre déterminé, un des nombres arbitraires j_1, j_2, j_3 , etc., dont elle est fonction, se réduira, pour la détermination des autres de ces nombres arbitraires, à une équation indéterminée de l'ordre $(\mu - 1)$, c'est-à-dire, d'une unité plus petit que l'ordre μ de l'équation proposée (33g). Et l'on conçoit en effet que, sans cette réduction, qui se trouve ainsi fondée sur une première détermination des racines de l'équation (33g) par les valeurs (34a), la solution de l'équation proposée (33g) serait absolument impossible; ce qui est absurde.

Ayant ainsi obtenu l'équation (343) d'un ordre inférieur d'une unité, on pourrait maintenant procéder, absolument de la même manière, à la solution de cette équation indéterminée (343) d'un ordre inférieur; et l'on obtiendrait une nouvelle équation résultante qui, à son tour, serait d'un ordre inférieur d'une unité que la première résultante (343), et par conséquent d'un ordre inférieur de deux unités que l'équation proposée (33g). Et procédant toujours de la même manière, on parviendrait à une équation du premier ordre, c'est-à-dire, à une équation déterminée qui ne contiendrait plus qu'une seule inconnue et que l'on pourrait résoudre par l'application de notre méthode (3ou) ou (3a3), en y faisant $k = 0$ ou $k = 1$, et par conséquent H égal à la quantité inconnue en question.

Mais, quoique ce procédé soit parfaitement satisfaisant en théorie, et même

parfaitement applicable en pratique, on peut, par des déterminations ultérieures des racines de l'équation proposée (33g), obtenir immédiatement une équation résultante (343) d'un ordre inférieur qui sera plus petit de deux, de trois, etc. unités que ne l'est l'ordre de l'équation proposée (33g). Il suffit pour cela de transformer ultérieurement cette même équation proposée en d'autres congruences, en prenant, pour les modules de ces congruences nouvelles, les coefficients des autres termes, différents du terme dominant, et de combiner ensuite les diverses racines correspondantes de manière à ce que, par une convenable détermination de leurs nombres arbitraires f , elles deviennent identiques et servent ainsi à rendre l'équation proposée (33g) divisible à la fois par tous ces coefficients qui formeront ces modules successifs. En effet, les racines combinées de ces différentes congruences recevront ainsi des degrés ou détermination de plus en plus élevés, pour former les racines de l'équation proposée elle-même; et elles pourront alors, prises en nombre égal au degré de leur détermination combinée, servir immédiatement pour constituer ces racines de l'équation, pourvu qu'on détermine de nouveau les nombres arbitraires f des autres de ces racines combinées de manière à ce qu'elles satisfassent à l'équation proposée (33g). Et alors, l'équation résultante (343) qui servira à cette détermination des nombres arbitraires restant encore indéterminés, sera manifestement une équation indéterminée d'un ordre plus petit d'autant d'unités qu'en aura le degré de détermination des racines combinées en question.

Ainsi, prenant, pour le module de la seconde congruence dans laquelle on transformerait ultérieurement l'équation proposée (33g), le terme qui, dans cette équation supposée complète, n'est multiplié par aucune des inconnues x , y , z , etc., c'est-à-dire, le terme que l'on nomme **TERME INDÉPENDANT**, et que nous désignerons ici par N , cette équation proposée, en denotant par la caractéristique f la fonction que forment tous les autres termes, sera . . .

$$\dots (344) \quad 0 = f(x, y, z, \text{etc.}) + N;$$

et elle pourra être transformée dans la nouvelle congruence . . . (345)

$$f(x, y, z, \text{etc.}) \equiv 0, \quad (\text{mod.} \equiv N).$$

Appliquant alors de nouveau à la solution de cette congruence nos susdites méthodes (331), (33a), etc., la loi générale (310) nous donnera, pour les racines x , y , z , etc. de cette deuxième congruence, les valeurs qui auront la forme . . . (346)

$$\begin{aligned} x &= X_2 + N.i_1, \\ y &= Y_2 + N.i_2, \\ z &= Z_2 + N.i_3, \\ &\text{etc., etc.;} \end{aligned}$$

dans laquelle les quantités X_2 , Y_2 , Z_2 , etc. se trouveront de nouveau déter-

minées numériquement, et les quantités i_1, i_2, i_3 , etc. seront encore des nombres arbitraires, positifs, négatifs, ou zéro. — Il faut ici remarquer que, dans la solution de cette deuxième congruence (345), les équations partielles (332), à l'exception de la dernière, seront les mêmes que les premières μ équations partielles (332) qui serviront à la solution de la première congruence (340); de sorte que les premières μ quantités supplémentaires $S_1, S_2, S_3, \dots$ S_μ et leurs espèces correspondantes $A_1, A_2, A_3, \dots A_\mu$ seront déjà connues, et qu'il ne restera qu'à connaître, par la différence des termes $M.(x.y.z.\text{etc.})$ et N , la dernière $S(\mu+1)$ de ces diverses quantités; ce qui rendra la présente solution (346) de la deuxième congruence (345) éminemment facile. Et il en serait de même des susdites congruences ultérieures, en prenant toujours, pour leurs modules respectifs, les termes qui font partie de la dernière des équations partielles (332).

Or, les présentes racines (346) de la deuxième congruence (345), en tant qu'elles rendraient l'équation proposée (339) divisible par N , comme elle doit l'être, forment de nouveau, et à leur tour, une ~~seconde~~ ^{seconde} détermination des racines x, y, z , etc. de cette équation proposée, tout comme la forment d'abord les racines (342) de la première congruence (340). Ainsi, en combinant les racines correspondantes (342) et (346) de manière à ce que, par une convenable détermination de leurs respectifs nombres arbitraires j et i , elles deviennent égales, les racines combinées qui en résulteront, seront manifestement telles qu'en les introduisant dans l'équation proposée (339), elles rendront cette équation divisible, tout à la fois, et par le nombre M et par le nombre N ; et elles formeront alors manifestement un ~~deuxième~~ ^{deuxième} ~~usé~~ ^{usé} ~~de~~ ^{de} ~~détermination~~ ^{détermination} des racines elles-mêmes x, y, z , etc. de cette équation proposée. — Quant à la combinaison en question des racines correspondantes (342) et (346), si l'on désigne généralement par ξ_1 et ξ_2 deux de ces racines, elles auront la forme générale . . . (347)

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A + M.j, & \text{et} \\ \xi_2 &= B + N.i;\end{aligned}$$

de sorte que leur égalité formera l'équation . . . (348)

$$0 = A - B + M.j - N.i,$$

qui donnera, pour la détermination respective des nombres arbitraires j et i , les deux congruences . . . (348')

$$\begin{aligned}M.j + (A - B) &\equiv 0, & (\text{mod.} = N); & \text{et} \\ N.i - (A - B) &\equiv 0, & (\text{mod.} = M).\end{aligned}$$

Nous aurons donc, en vertu des règles (27) et (28), les déterminations . . . (349)

$$j = (-1)^w \cdot (A - B) \cdot N \left[\frac{N}{M}, \varpi \right]^{(w-1)} + Np, \quad \text{et}$$

$$i = (-1)^{w+1} \cdot (A - B) \cdot N \left[\frac{M}{N}, \pi \right]^{(w-1)} + Mg;$$

dans lesquelles p et q sont de nouveaux nombres arbitraires. Et alors, les racines générales (347), étant combinées ainsi, deviendront . . . (350)

$$\xi_1 = A + (-1)^w \cdot (A - B) \cdot M \cdot N \left[\frac{N}{M}, \varpi \right]^{(w-1)} + MNp, \quad \text{et}$$

$$\xi_2 = B - (-1)^w \cdot (A - B) \cdot N \cdot N \left[\frac{M}{N}, \pi \right]^{(w-1)} + MNq,$$

et comme telles, ces racines, en y faisant $p = q$, se trouveront égales; car, en vertu de notre condition fondamentale (26), on a toujours . . . (351)

$$(-1)^w \cdot M \cdot N \left[\frac{N}{M}, \varpi \right]^{(w-1)} + (-1)^w \cdot N \cdot N \left[\frac{M}{N}, \pi \right]^{(w-1)} = -1;$$

ce qui, pour $p = q$, donne . . . (351')

$$\xi_1 - \xi_2 = 0.$$

Les racines combinées (342) et (346) seront donc . . . (352)

$$x = X_1 + (-1)^w \cdot (X_1 - X_2) \cdot M \cdot N \left[\frac{N}{M}, \varpi \right]^{(w-1)} + MN.p_1,$$

$$y = Y_1 + (-1)^w \cdot (Y_1 - Y_2) \cdot M \cdot N \left[\frac{N}{M}, \varpi \right]^{(w-1)} + MN.p_2,$$

$$z = Z_1 + (-1)^w \cdot (Z_1 - Z_2) \cdot M \cdot N \left[\frac{N}{M}, \varpi \right]^{(w-1)} + MN.p_3,$$

etc., etc.;

les nombres p_1, p_2, p_3 , etc. étant arbitraires. — Or, comme telles, ces valeurs (352), étant introduites dans l'équation proposée (339), à la place de ses racines x, y, z , etc., rendraient cette équation divisible par le produit MN des deux coefficients M et N ; et par conséquent, comme nous l'avons dit déjà, elles formeront un deuxième degré de détermination de ces racines x, y, z , etc. en question. Ainsi, deux quelconques de ces quantités (352), en donnant à leurs respectifs nombres arbitraires p une valeur déterminée, zéro ou toute autre, pourront déjà constituer les racines correspondantes dans l'équation proposée (339), pourvu qu'on détermine ensuite les nombres arbitraires p des autres de ces quantités (352) de manière à ce que, étant introduites dans l'équation (339), elles puissent la réaliser. Si nous dénotons donc par la caractéristique φ la fonction que formeront les nombres arbitraires p_1, p_2, p_3 , etc.; lorsqu'on aura introduit, dans l'équation proposée (339), les quantités (352) à la place des racines x, y, z , etc., nous obtiendrons, pour la détermination générale des nombres arbitraires p_1, p_2, p_3 etc., l'équa-

tion résultante . . . (353)

$$0 = \varphi(p_1, p_2, p_3, \text{etc.});$$

qui, en y donnant à deux quelconques des nombres p_1, p_2, p_3 , etc., des valeurs déterminées, zéro ou toutes autres, ne sera plus que de l'ordre $(\mu - 2)$, c'est-à-dire, d'un ordre plus petit de deux unités que l'ordre μ de l'équation proposée (33g).

Et continuant à transformer ainsi cette équation (33g) en de nouvelles congruences, par rapport aux modules formés successivement avec les coefficients des termes qui, d'après notre méthode générale (331), (332), etc. de la résolution des congruences, appartiennent à la dernière des congruences partielles (332), on obtiendra, pour les racines cherchées x, y, z , etc., de nouvelles déterminations qui, étant combinées avec leurs déterminations précédentes (352), toujours d'après la règle (350) de ces combinaisons, donneront les degrés ultérieurs, troisième, quatrième, etc., de cette détermination progressive des racines x, y, z , etc. en question. Et par conséquent, l'équation résultante (353), en y faisant zéro ou en y déterminant à volonté un nombre pareil des quantités inconnues, se réduira ainsi progressivement aux ordres inférieurs $(\mu - 3)$, $(\mu - 4)$, etc., jusqu'à ce que l'on parvienne à une telle équation résultante qui ne sera plus que du premier ordre, c'est-à-dire, qui ne contiendra plus qu'une seule inconnue que l'on déterminera, d'après ce que nous venons de dire, par l'application de notre méthode (300) ou (323), en y faisant $k = 0$ ou $k = 1$, et par là même H égal à la quantité inconnue en question. — On conçoit facilement que, par suite de ce procédé de la résolution des équations indéterminées d'un ordre μ , il se trouvera, en quelque sorte virtuellement, introduites $(\mu - 1)$ quantités arbitraires, provenant de la valeur zéro ou de la détermination arbitraire qu'on donnera successivement à un, à deux, à trois, etc. des nombres arbitraires qui forment les inconnues dans les successives équations résultantes (343), (353), etc. Et l'on conçoit de plus qu'il doit en être ainsi, sinon effectivement, du moins virtuellement, puisque l'équation indéterminée (33g) est supposée de l'ordre μ , et qu'elle ne peut déterminer qu'une seule de ses μ quantités inconnues. — Il ne faut pas perdre de vue que, dans toutes les congruences (340), (345), etc., dans lesquelles on transformera ainsi l'équation proposée (33g), on aura toujours, pour la solution de ces congruences successives, les mêmes premières μ congruences partielles (332), qui seules exigent quelque travail pour leur solution; de sorte que toutes les résolutions des congruences successives (340), (345), etc., ne formeront proprement, dans ce qu'il y a d'essentiel, qu'une seule solution générale; ce qui rend éminemment facile l'application pratique de la présente méthode de la résolution générale des équations indéterminées de tous les ordres et de tous les degrés.

Nous n'avons plus ici ni le temps ni l'espace nécessaires pour appliquer ces principes généraux à la solution de quelques équations indéterminées d'ordres supérieurs, et pour offrir en même temps, par cette application, des exemples de notre méthode générale (331), (332), etc. de la solution des congruences de tous les ordres, ainsi que nous nous le sommes proposé plus haut. Heureusement, l'exposé, tout à la fois, et rigoureusement précis, et absolument général que nous venons de faire de ces principes, suffira sans doute, non-seulement pour donner une idée de cette résolution générale des équations indéterminées, comme nous nous sommes ici bornés à la donner, mais de plus pour faire connaître complètement toute cette vaste et difficile solution, au point que les géomètres qui l'auront approfondie, pourront eux-mêmes en faire immédiatement toute application pratique, et pourront même, s'ils ont de plus approfondi les susdits principes philosophiques, notamment les principes téléologiques de cette grande question, être convaincus que la résolution générale des équations indéterminées de tous les ordres et de tous les degrés se trouve enfin donnée complètement et, ce qui est plus, qu'on ne saura jamais donner aucune autre résolution générale de ces singulières et difficiles équations. — Toutefois, pour le besoin actuel de la science, nous devons au moins appliquer ici ces principes généraux à la résolution des équations indéterminées qui ont la forme . . . (354)

$$z^n - N.y^n = M.x^n;$$

forme à laquelle peuvent être réduites toutes les équations indéterminées du second ordre et d'un degré quelconque n , comme on peut le concevoir facilement. — D'jà, Lagrange a réduit ainsi l'équation indéterminée du second degré à deux inconnues r et s , savoir, l'équation . . . (355)

$$0 = Ar^2 + Brs + Cs^2 + Dr + Es + F;$$

en formant, avec les coefficients A, B, C , etc., de cette équation, les quantités auxiliaires . . . (355')

$$P = BD - 2AE, \quad Q = D^2 - 4AF,$$

$$N = B^2 - 4AC; \quad \text{et } M = P^2 - NQ;$$

et en introduisant, à la place des inconnues r et s , les nouvelles inconnues . . . (356)

$$p = Ns + P, \quad \text{et } q = 2Ar + Bs + D;$$

provenant des relations . . . (356')

$$q^2 = Ns^2 + 2Ps + Q, \quad \text{et}$$

$$p^2 = Nq^2 + P^2 - NQ,$$

qui indiquent que les nouvelles inconnues p et q , lesquelles déterminent les inconnues primitives r et s par les équations du premier degré (356), peuvent être prises positivement et négativement. En effet, par ces transformations pu-

rement algébriques, l'équation proposée (355) se réduit d'abord à la forme

$$p^2 - N.q^2 = M. \quad (357)$$

En considérant les nombres p et q comme pouvant être fractionnaires, savoir

$$p = \frac{x}{u}, \quad \text{et} \quad q = \frac{y}{u}, \quad (357')$$

l'équation (357) devient ensuite . . . (358)

$$x^2 - N.y^2 = M.u^2,$$

et reçoit ainsi notre forme générale (354). — On conçoit que, par des transformations pareilles, on pourra réduire à cette même forme générale (354), toute équation indéterminée à deux inconnues x et y , d'un degré quelconque n , à la condition que les équations intermédiaires qui serviroient à faire connaître ces inconnues primitives x et y par le moyen des nouvelles inconnues p et q , c'est-à-dire, les équations analogues aux présentes équations intermédiaires (356), soient généralement du degré $(n-1)$; de sorte que l'on aura alors à résoudre en outre deux équations déterminées de ce degré $(n-1)$. — Quoi qu'il en soit, voici l'application de nos principes généraux (340), (345), etc., à la résolution de l'équation indéterminée (354) du second et même du troisième ordre et d'un degré quelconque n , savoir . . . (359)

$$x^2 - N.y^2 = M.z^2.$$

Il faut d'abord déterminer les inconnues x et y de manière à ce que cette équation soit divisible par le coefficient M . Et pour cela, nous aurons la congruence . . . (360)

$$x^2 - N.y^2 \equiv 0, \quad (\text{mod. } M);$$

dont nous avons donné la solution générale sous la marque (165), solution d'après laquelle les racines x et y auront la forme . . . (360')

$$x = A + M.j_1, \quad \text{et} \quad y = P + M.j_2.$$

Il faut ensuite déterminer, dans l'équation proposée (359), les inconnues x et z de manière à ce que cette équation soit divisible par le coefficient N . Et pour cela, nous aurons la deuxième congruence . . . (361)

$$x^2 - M.z^2 \equiv 0, \quad (\text{mod. } N);$$

dont la même susdite solution générale (165) fera connaître les inconnues x et z , sous la forme . . . (361')

$$x = B + N.i_1, \quad \text{et} \quad z = Q + N.i_2.$$

Combinant alors les valeurs (360') et (361') de la même inconnue x , d'après la règle (350) de cette combinaison, on obtiendra, pour le deuxième degré de détermination de cette inconnue, l'une ou l'autre des deux expressions

(362)

$$z = A + (-1)^w \cdot (A - B) \cdot M \cdot N \left[\frac{N}{M}, \varpi \right]^{w-1} + MN \cdot p,$$

$$z = B - (-1)^v \cdot (A - B) \cdot N \cdot N \left[\frac{M}{N}, \pi \right]^{v-1} + MN \cdot p;$$

dans lesquelles on pourra conséquemment faire le nombre p égal à zéro ou égal à tout autre nombre à volonté. — Ainsi, en faisant auxiliairement . . .

(363)

$$\zeta = (-1)^w \cdot M \cdot N \left[\frac{N}{M}, \varpi \right]^{w-1} = (-1)^{w+1} \cdot N \cdot N \left[\frac{M}{N}, \pi \right]^{v-1} - 1;$$

on aura, pour les trois racines z , y , u de l'équation (359), les trois déterminations . . . (364)

$$z = A + \zeta \cdot (A - B) + MN \cdot p;$$

$$y = P + Mj, \quad \text{et} \quad u = Q + Ni;$$

dans lesquelles les deux nombres j et i demeureront encore indéterminés. Et par conséquent, d'après nos principes (343), (353), etc., en introduisant ces valeurs dans l'équation proposée (359), on obtiendra, pour la détermination de ces deux nombres j et i , l'équation résultante . . . (365)

$$\{A + \zeta \cdot (A - B) + MN \cdot p\}^n - N \cdot (P + Mj)^n = M \cdot (Q + Ni)^n;$$

laquelle, ne contenant plus que les deux inconnues j et i , se trouvera réduire à une équation du second ordre et du même degré n que l'est l'équation proposée (359) du troisième ordre. On pourra donc, par les mêmes principes, résoudre maintenant cette équation résultante (365) du second ordre, et la réduire ainsi à une équation du premier ordre, c'est-à-dire, à une équation déterminée qui ne contiendra plus qu'une seule inconnue, et que l'on pourra alors résoudre par l'application convenable de notre susdite méthode (300) ou (323), suivant sa réduction (336) à (337), comme nous l'avons dit plus haut. — Toutefois, en considérant que la présente équation (365) contient en outre deux nombres arbitraires k et k' , qui, en vertu de nos expressions (165) de la résolution des congruences (163), sont contenus respectivement, le premier k dans les nombres A et P , provenant de la solution de la première (360) des deux congruences instrumentales, et le deuxième k' dans les nombres B et Q , provenant de la solution de la seconde (361) de ces congruences instrumentales, on pourra, par une détermination convenable de ces nombres arbitraires k et k' , tenir compte de la détermination en question des nombres indéterminés j et i qui entreient encore dans cette même équation (365). Et l'on pourra ainsi résoudre immédiatement cette équation finale (365) du second ordre, sans avoir besoin de la réduire ultérieurement à une équation du premier ordre, comme nous le montrerons mieux ci-après.

Dans le cas où l'équation proposée (359) serait seulement du second ordre, savoir . . . (366)

$$z^* - N.y^* = M;$$

un aurait, à la place de la congruence (361) du second ordre, la simple congruence fondamentale du premier ordre . . . (367)

$$z^* \equiv M, \quad (\text{mod.} \equiv N);$$

que l'on résoudrait par notre méthode générale, élémentaire (95), ou systématique (99). Et la racine z aurait de nouveau, comme à la marque (361)', la forme . . . (367)'

$$z = B + N.i;$$

qui, étroit combinée avec l'expression (360)' de la même racine z , conduirait encore au deuxième degré (362) de détermination de cette racine z . Ainsi, en considérant comme égale à l'unité la susdite troisième inconnue u , on aurait ici, d'après les expressions générales (364), pour les deux présentes inconnues z et y , les valeurs . . . (368)

$$z = A + \zeta.(A - B) + MN.p, \quad \text{et} \quad y = P + M.j;$$

où il n'y aurait plus d'indéterminé que le seul nombre j ; car, le nombre p qui demeure absolument arbitraire, peut recevoir la valeur zéro ou toute autre valeur à volonté. Et par conséquent, l'équation résultante (365), qui servirait à la détermination du nombre encore indéterminé j , serait ici . . . (369)

$$\{A + \zeta.(A - B) + MN.p\}^* - N.(P + M.j)^* \equiv M;$$

et c'est à la solution de cette équation, en nombres entiers j , que l'on devrait appliquer notre susdite méthode (300) ou (323), en y faisant $k = 0$ ou $k = 1$, et par conséquent $H = f$. Mais cette équation résultante (369) présente immédiatement, pour sa solution, la condition générale . . . (370)

$$y^* = (P + M.j)^* = \frac{\{A + \zeta.(A - B) + MN.p\}^* - M}{N};$$

c'est-à-dire que, pour toute valeur arbitraire de p , les valeurs de A , B , et ζ doivent être telles que le dernier membre de cette égalité forme une puissance exacte du degré n , en observant que, par suite de la double détermination (368) de l'inconnue z , ce dernier membre de la présente égalité (370) est toujours un nombre entier. Et observant de plus que, par suite de notre solution générale (165) de la présente congruence (360), le nombre A qui, dans l'expression (368), concourt à constituer la valeur de la racine z , contient, comme élément arbitraire, l'espèce A de cette racine, et la contient nommément dans son premier degré, on reconnaîtra facilement que le dernier membre de l'égalité (370) formera toujours une fonction rationnelle de cette espèce A au degré n ; de sorte que cette égalité (370) aura généralement la forme . . . (371)

$$y^* = (P + M.j)^* = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1.A + \mathfrak{A}_2.A^2 + \mathfrak{A}_3.A^3 + \dots + \mathfrak{A}_n.A^n;$$

les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ étant tous des nombres entiers. C'est donc à cette fonction rationnelle de k qu'il faudra appliquer notre méthode (300) ou (323), en y faisant les susdites réductions (336) à (337), pour découvrir quels sont les nombres entiers k qui rendent puissance exacte du degré n cette fonction rationnelle, formant le dernier membre de la présente égalité finale (371). Et les racines de ces puissances exactes du degré n seront manifestement les valeurs des racines $(P + Mj)$ du second membre de cette même égalité; et par conséquent, en vertu des expressions (368), auxquelles ces valeurs correspondent, elles seront immédiatement les valeurs de la seconde y des deux inconnues x et y , dont la première x se trouvera donnée par la première de ces expressions (368), en y introduisant la valeur correspondante de l'espèce k . — On conçoit que, dans le cas où, pour des valeurs quelconques du nombre arbitraire p , qui entrera dans les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, et principalement pour la valeur $p = 0$, qui servira ainsi de criterium exclusif, on ne pourrait satisfaire à l'égalité finale (371) par aucun nombre k , l'équation proposée (366) du second ordre et du degré n ne pourra être résolue par des nombres entiers.

Il faut ici remarquer que, dans le cas où l'une ou l'autre des deux précédentes congruences instrumentales (360) et (361) ne pourrait être résolue par l'application de notre méthode générale (163) et (165), ce serait une preuve que cette congruence spéciale, par exemple, la seconde (361), ne pourrait être résolue par deux nombres différents de l'unité, puisque, d'après l'expression générale (165) de ces deux nombres s et u , ils pourraient, par l'influence de leur espèce arbitraire k , former des nombres différents de l'unité. Il faudrait donc, dans ce cas, considérer comme étant égal à l'unité le nombre y , dans la première (360), ou le nombre u , dans la seconde (361) de ces congruences, suivant que cette première ou cette seconde congruence ne pourrait être résolue par notre méthode (165); et alors, ce cas exceptionnel rentrerait exactement dans le problème de la résolution de l'équation (366) du second ordre, problème que nous venons de résoudre. — Et quant au criterium spécial par lequel on reconnaîtrait que l'une de ces congruences instrumentales (360) ou (361) ne peut ainsi être résolue par deux nombres différents de l'unité, il consisterait en ce que le nombre x , donné par nos susdites congruences auxiliaires (168) ou (182)', ne serait pas, d'après les égalités (169)' ou (183)', un résidu $f(k)$ des factorielles correspondantes.

En terminant cet exposé de la résolution générale des équations indéterminées de la forme (366), nous devons faire observer une circonstance bien essentielle. C'est que cette solution, telle qu'elle est donnée par l'égalité finale (371), se réduit à la question de rendre rationnelle la quantité radicale . . .

(372)

$$\left[\lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3 k^2 + \lambda_4 k^3 \dots + \lambda_n k^{n-1} \right]^{\frac{1}{n}};$$

question qui se rattache notoirement à la solution des équations indéterminées de la forme (366). — Or, si les valeurs du nombre k , par lesquelles doit être résolue cette dernière question, étaient absolument illimitées, cette solution serait, au moins pour la moitié, aussi difficile que la solution elle-même de l'équation (366), en cherchant à la résoudre par des essais combinés de tous les nombres x et y . Mais, il n'en est pas ainsi avec le nombre k auquel se trouve réduite la question finale (372); et c'est là précisément le caractère distinctif, nommément le caractère téléologique, de notre présente solution de ce grand problème; car, ce nombre k a d'abord une limite fixe qu'il ne saurait dépasser sans revenir périodiquement à ses valeurs primitives; et en outre, il peut recevoir des limites de plus en plus resserrées. En effet, comme on le voit dans l'expression (165) de la racine s , dont ce nombre k forme l'espèce, ses valeurs, prises positivement et négativement, ne sauraient dépasser la moitié du module M , comme nous l'avons déjà dit en assignant les valeurs à ce nombre dans notre fondamentale loi téléologique (15). De plus, pour une valeur quelconque que, dans les expressions (165), peut recevoir la racine s , on peut toujours, par un choix convenable du genre k , puisque la solution auxiliaire (182) à (183)' présente toujours plusieurs ou du moins deux valeurs de ce nombre k , diminuer l'étendue numérique de l'espèce k , dans laquelle étendue se réalise la racine s , comme nous l'avons également fait remarquer déjà plus haut. Ainsi, dans le choix entre les différents nombres k , que peuvent donner les égalités (169)' ou (183), lesquelles, dans la méthode (165), déterminent ce nombre k , se trouve toujours une diminution, plus ou moins considérable, de l'étendue numérique des valeurs du nombre k en question; de sorte que de très-petites valeurs de k peuvent alors résoudre la question finale (372). Mais, sans même avoir égard à ce choix du nombre k , quelle que soit sa valeur, la première des expressions (165) montre que, pour toute valeur de la racine s , la limite absolue du nombre k en question, pris positivement et négativement, est toujours plus petite que la moitié du module M , de ce module qui domine manifestement toute la question, et qui fixe conséquemment la grandeur des nombres appartenant à cette question; de sorte que l'application de notre méthode (300) ou (323), appropriée ici par les susdites réductions (336) à (337), conduira toujours, de la manière la plus prompte possible, à la solution de ce problème, par la raison qu'il ne saurait généralement exister aucune limite plus resserrée que celle qui est ainsi formée par le nombre téléologique k . — On ne nous demandera pas sans doute quelles sont, à leur tour, les limites des nombres auxquels, dans nos équations résultantes (343), (353), etc., aboutit notre résolution générale des équations indéterminées, parce que ces nombres y sont les racines des équations rationnelles et bien déterminées, dans lesquelles les limites de ces racines sont toujours connues, positivement et négativement.

Ainsi, considérée dans sa généralité, la présente résolution (343), (353), etc., des équations indéterminées de tous les ordres, qui constitue manifestement leur solution absolue, se trouve maintenant éclaircie complètement et constatée positivement par son application à la résolution générale (365) et (370) des équations fondamentales (359) du second et même du troisième ordre et d'un degré quelconque n . — Il ne nous reste qu'à signaler un cas singulier qui se présente dans cette dernière résolution générale (370) et qui peut la simplifier considérablement.

Pour cela, en observant qu'en vertu de la seconde des expressions (362), ou bien en vertu de la seconde des constructions (363) de la quantité auxiliaire ζ , on a toujours . . . (373)

$$A + \zeta.(A - B) = B + (\zeta + 1).(A - B),$$

on reconnaît que la solution (370) en question peut généralement être mise sous la forme . . . (374)

$$y^* = (P + Mj)^* = \frac{[(\zeta + 1).(A - B) + MN.p + B]^n - M}{N}.$$

Mais, comme on le voit dans cette seconde des constructions (363) de la quantité ζ , la somme $(\zeta + 1)$ est toujours divisible par le nombre N ; de sorte que, dans le développement du trinôme qui est ici contenu dans les crochets [. . .], tous les termes, à l'exception du dernier B^n , seront tous divisibles immédiatement par le nombre N . Quant au dernier terme B^n de ce développement de la puissance n , il formera, avec le dernier terme $-M$ du numérateur de cette expression (374), une quantité r , savoir . . . (375)

$$r = \frac{B^n - M}{N},$$

qui, en vertu de la solution (367)' de la congruence instrumentale (367), sera toujours un nombre entier. Ainsi, il est immédiatement manifeste que le deuxième membre de l'équation finale (374) sera toujours un nombre entier. — Or, dans le cas singulier où le présent nombre r formerait une puissance exacte du degré n , savoir . . . (376)

$$r = s^n;$$

l'équation finale (374), en y faisant $p = 0$, et en y déterminant le nombre arbitraire A de manière à ce que la différence $(A - B)$ des deux valeurs (360)' et (367)' de s , soit zéro , se trouverait résolue nécessairement dans l'égalité . . . (376)'

$$y = P + M.j = s;$$

et le nombre A qui détermine les valeurs (360)' des quantités A et P dans les expressions (368) des racines s et y , se trouverait donné par l'égalité . . . (376)'

$$A - B = 0.$$

Il est manifeste que, hors ce cas singulier (376), l'égalité finale (374) ne pourrait se réaliser qu'accidentellement par les valeurs de la différence $(A - B)$, correspondantes aux valeurs du nombre téléologique k , prises positivement et négativement, dans la limite de la moitié du module M . Et dans cette vue, pour pouvoir y appliquer notre susdite méthode (300) ou (323), appropriée à cette fin, on peut mettre cette égalité (374) sous la forme . . . (377)

$$y' = a_0 + a_1(A - B) + a_2(A - B)^2 + \dots + a_n(A - B)^n;$$

où le premier coefficient a_0 , lorsque $p = 0$, formera toujours le susdit (375) nombre r ; et où tous les coefficients $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ seront toujours des nombres entiers, quelle que soit la valeur du nombre absolument arbitraire p .

Quant à la variété des solutions que la question peut recevoir, elle dépend manifestement de la variété des valeurs que l'on peut attribuer à ce nombre absolument arbitraire p dans les égalités finales (370) ou (374). En effet, pour chacune de ces valeurs de p , on peut, par les procédés que nous venons d'indiquer, chercher la valeur de l'indéterminée k , qui, avec la valeur correspondante de l'indéterminée j , soit alors propre à résoudre ces égalités finales (370) ou (374). Et pour chaque système de ces valeurs de k et de j , correspondant ainsi à la valeur arbitraire de p , les expressions (368) feront connaître le système correspondant des valeurs des inconnues x et y . Toutefois, lorsqu'on connaîtra un seul de ces systèmes de valeurs de x et de y , spécialement le système principal de ces valeurs qui correspond à $p = 0$, on pourra facilement, sans avoir besoin de résoudre de nouveau les égalités finales (370) ou (374), déterminer les autres systèmes de ces valeurs des inconnues x et y , par la forme générale (368) de ces valeurs. En effet, désignant par Z et Y ce système principal des valeurs des inconnues x et y , on aura généralement, d'après la forme (368) de ces inconnues, pour leurs valeurs, les expressions . . . (378)

$$x = Z + MN.p, \quad \text{et} \quad y = Y + M.j;$$

dans lesquelles p est toujours un nombre absolument arbitraire, et j un nombre indéterminé. Et introduisant ces expressions dans l'équation proposée (366), on aura, pour la détermination du nombre j , correspondant ainsi à toute valeur du nombre arbitraire p , l'équation . . . (378')

$$(Z + MN.p)^n - N.(Y + M.j)^n = M.$$

Mais, l'équation proposée (366) se trouve réalisée par les valeurs Z et Y des inconnues x et y , c'est-à-dire, on a . . . (378'')

$$Z^n - N.Y^n = M.$$

Donc, soustrayant l'une de l'autre ces deux équations (378)' et (378)'', on

obtiendrait finalement, pour la détermination du nombre j , l'équation

$$\begin{aligned} & \dots (379) \\ p \cdot \left\{ \frac{n}{1} \cdot Z^{n-1} \cdot (MNp)^0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot Z^{n-2} \cdot (MNp)^1 \dots + Z^n \cdot (MNp)^{n-1} \right\} = \\ & = j \cdot \left\{ \frac{n}{1} \cdot Y^{n-1} \cdot (Mj)^0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot Y^{n-2} \cdot (Mj)^1 \dots + Y^n \cdot (Mj)^{n-1} \right\}; \end{aligned}$$

dans laquelle le nombre p serait toujours absolument arbitraire. Toutefois, pour que cette équation (379) puisse avoir des racines j , qui soient des nombres entiers, il faut, d'après l'équation primitive (378)', que le nombre arbitraire p remplisse la condition

$$p^N = \frac{(Z + MN \cdot p)^n - M}{N};$$

c'est-à-dire que le second membre de cette égalité, lequel sera toujours un nombre entier, forme de plus une puissance exacte du degré n . Et alors, sans avoir besoin de résoudre la présente équation finale (379), il suffira de former ainsi, par les différentes valeurs du nombre arbitraire p , des puissances exactes du degré n avec le second membre en question de l'égalité (380), pour avoir la valeur de l'inconnue y , formant le premier membre de cette égalité, et par conséquent, pour avoir, à l'aide du nombre correspondant p , la valeur de l'inconnue z , donnée par les expressions (378). — Nous pouvons sans doute nous dispenser de faire remarquer que cette solution de la présente égalité définitive (380) se fera en tout par les mêmes moyens que la solution analogue des égalités finales (370) ou (374), à la seule exception que le nombre arbitraire p n'aura ici aucune limite, précisément pour qu'il puisse ainsi indiquer toute l'infinité de solutions dont l'équation proposée (366) pourrait être susceptible.

Nous avons donc maintenant, dans tous ses principes et dans toutes ses conséquences, la résolution générale (365) et (370) ou (374) des équations indéterminées (359) du troisième ordre et d'un degré quelconque n . Et nous pouvons en tirer la triste vérité que, jusqu'à ce jour, cette solution des équations indéterminées n'a pas encore été donnée complètement, pas même pour les équations du second degré, comme le croient généralement les géomètres. En effet, pour n'en citer qu'un exemple, la solution que Lagrange a donnée de ces équations (358) du second degré

$$z^2 - N \cdot y^2 = M \cdot u^2,$$

implique trois défauts essentiels que voici. — D'abord, pour la solution de la première congruence instrumentale (360), qui est inévitable dans cette question, Lagrange suppose que l'inconnue z a la forme

$$z = sy - Mq;$$

les nombres s et q demeurant indéterminés, supposition qui établit que, dans la congruence instrumentale (360), l'inconnue z est purement un multiple s de

l'inconnue y . Et alors, quand même il pourrait donner la solution de la congruence résultante du premier ordre . . . (38a)

$$x^2 - N \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

il n'obtiendrait, pour la congruence en question (36a), que la solution partielle que nous avons donnée sous les marques (279) à (280)', et nullement la solution complète (284) et (285), où les inconnues x et y demeurent indépendantes l'une de l'autre. — Ensuite, la solution de la congruence (38a) du premier ordre, à laquelle se trouvait ainsi ramenée la question, n'a pu être donnée, ni par Lagrange, ni par aucun géomètre, d'une manière autre que par des procédés de tâtonnement. C'est en effet, comme nous l'avons vu plus haut, seulement aujourd'hui que ces congruences du premier ordre (38a), non-seulement pour le second degré, mais pour un degré quelconque m , ont reçu leur solution générale et définitive dans nos expressions, élémentaires (88), (95), et systématique (99). — Enfin, pour tenir compte de la seconde congruence instrumentale (361), qui est également inévitable dans cette question, Lagrange, sans le savoir, est forcé de recourir à de nombreuses transformations algébriques qui, lorsque les nombres proposés M et N seraient très-grands, deviendraient pour ainsi dire inexécutables dans la pratique.

Nous pensons que, par tous ces développements, les géomètres comprendront que l'application que nous venons de faire de notre résolution générale (343), (353), etc., des équations indéterminées de tous les ordres, à la solution des équations (359) du second et même du troisième ordre, se fonde principalement sur la résolution générale des deux congruences instrumentales (36a) et (361), dont la première est toujours du second ordre, et dont la seconde, lorsqu'elle n'admet pas de solution pareille, est seulement du premier ordre. Et ils ont vu que ces résolutions des congruences fondamentales du premier et du second ordre se trouvent données complètement dans la présente réforme de la Théorie des Nombres, notamment, dans les expressions (95) et (99) pour les congruences (85) du premier ordre, et dans les expressions (165) pour les congruences (163) du second ordre. Nous avons même rendu immédiatement praticable la première (95) de ces résolutions par l'emploi des résidus des puissances des nombres, pour lesquelles nous avons présenté la table (148). Et il ne nous reste qu'à rendre également praticable la seconde (165) de ces résolutions, par l'emploi des résidus des factorielles, en vertu des conditions (182) à (183)' desquelles dépendent ces résidus. A la vérité, nous avons déjà présenté, sous la marque (181), le commencement d'une table pour calculer les résidus des carrés des factorielles, d'après les conditions (166) à (169)'. Mais, en outre que les résidus de ces carrés exigeraient de très-grands chiffres, comme nous l'avons déjà fait remarquer alors, les conditions (182) à (183)' qui établissent les résidus immédiats des factorielles elles-mêmes, lesquelles peuvent être exprimées par des chiffres praticables, ont de plus l'avantage de fixer toujours, par la congruence auxiliaire (182)', plusieurs ou du moins deux va-

leurs différentes pour sa racine x et par conséquent pour le genre cherché k . Nous allons donc, pour compléter ces grandes questions, et pour ne laisser rien à désirer aux géomètres, joindre une table de ces valeurs immédiates des factorielles, jusqu'à l'exposant $k = 70$; table que nous devons également aux soins de M. L. Augé, et qui sera plus que suffisante pour tous les calculs ordinaires. Mais, pour éviter de trop grands chiffres, cette table ne présentera proprement que les factorielles partielles qui, par le produit de leurs résidus respectifs, donneront facilement, par rapport à tout module donné M , le résidu de la factorielle totale qui aura, au-dessous du nombre 70 formant ici la limite, un exposant quelconque k , comme nous le dirons à l'instant. — Voici cette table . . . (383)

TABLE DES FACTORIELLES.

k	$(1)^{k!}$	$(11)^{k!}$	$(21)^{k!}$	$(31)^{k!}$
1	1	11	21	31
2	2	132	462	992
3	6	1716	10626	32736
4	24	24024	255024	1113024
5	120	360360	6375600	38955840
6	720	5765760	165765600	1402410240
7	5040	98017920	4475671200	51889178880
8	40320	1764322560	125318793600	1971788797440
9	362880	33522128640	3634245014400	76899763100160
10	3628800	670442572800	109027350432000	307599524006400

k	$(41)^{k!}$	$(51)^{k!}$	$(61)^{k!}$
1	41	51	61
2	1722	2652	3782
3	74046	140556	238266
4	3258024	7590024	15240024
5	146611080	417451320	991186560
6	6744109680	23377273920	65418312960
7	316973154960	1332504613440	4383026968320
8	15214711438080	77285267579520	298045833845760
9	745520860465920	4559830787191680	2056516253357440
10	37176043023216000	273589847231500800	1439561377475020800

Or, en vertu de la nature des factorielles, on a notamment . . . (384)

$$t^{(k)} = t^{a_1} \cdot (1 + a_1)^{a_2} \cdot (1 + a_1 + a_2)^{a_3} \cdot (1 + a_1 + a_2 + a_3)^{a_4} \times \\ \times \dots (1 + a_1 + a_2 + a_3 \dots + a(m-1))^{a_m};$$

les exposants partiels $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ étant tels que l'on ait . . .
 . . . (385)

$$k = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_m.$$

Si l'on fait donc . . . (386)

$$a_1 = 10, \quad a_2 = 10, \quad a_3 = 10, \dots, a(m-1) = 10; \quad \text{et} \\ a_m = k - (m-1) \cdot 10;$$

on aura, pour tout exposant k , le produit de factorielles . . . (387)

$$t^{(k)} = t^{10} \cdot 11^{10} \cdot 21^{10} \cdot 31^{10} \dots (1 + (m-1) \cdot 10)^{a_m};$$

et l'on pourra, avec ces factorielles partielles, telles qu'elles sont données dans la présente table (383), calculer toute factorielle dont l'exposant k n'excèdera pas le nombre 70, pris pour limite dans cette table. — De plus, si nous dénotons par $R_0, R_1, R_2, \dots, R_m$, les résidus pris par rapport à un module donné M , dans les congruences partielles . . . (388)

$$t^{(1)} \equiv R_0, \quad t^{(11)} \equiv R_1, \quad (1 + a_1)^{a_2} \equiv R_2, \dots \\ \dots (1 + a_1 + a_2 \dots + a(m-1))^{a_m} \equiv R_m;$$

nous aurons généralement la congruence . . . (388')

$$R_0 \equiv R_1 R_2 R_3 \dots R_m;$$

et nous pourrions calculer le résidu R_k de la factorielle totale $(t^{(k)})$ par les résidus $R_1, R_2, R_3, \dots, R_m$ des factorielles partielles qui la composent. Et par conséquent, en donnant aux exposants $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, les susdites valeurs (386), les présentes congruences partielles (388) seront . . .
 . . . (389)

$$t^{10} \equiv R_1, \quad 11^{10} \equiv R_2, \quad 21^{10} \equiv R_3, \quad 31^{10} \equiv R_4, \\ \dots (1 + (m-1) \cdot 10)^{(2-(m-1) \cdot 10)} \equiv R_m;$$

et elles serviront, d'après la précédente expression (388'), à calculer le résidu R_k de la factorielle totale $(t^{(k)})$ par la congruence . . . (390)

$$R_1 R_2 R_3 \dots R_m \equiv R_k, \quad (\text{mod.} = M).$$

Nous pouvons nous dispenser, ce nous semble, d'indiquer les moyens pour faciliter ces calculs. Et nous nous bornerons à faire remarquer que, par le calcul facile de ces résidus des factorielles, à l'aide de la table (383), notre solution générale (165) des congruences fondamentales du second ordre, de

laquelle dépend la résolution des équations indéterminées (359) du troisième ordre, se trouve maintenant rendue éminemment praticable.

Voici enfin quelques exemples numériques de cette résolution générale des équations indéterminées (359) du second et même du troisième ordre et d'un degré quelconque n . — Soit proposée, pour premier exemple, une telle équation du troisième degré . . . (391)

$$z^3 - 17.y^3 = 1087.u^3;$$

où il s'agit de découvrir directement les trois nombres entiers z , y , u , ou du moins, en considérant u comme égal à l'unité, les deux nombres entiers z et y , qui puissent résoudre cette équation. — En la comparant à l'équation générale (359), nous aurons ici, pour la première des deux congruences instrumentales (360) et (361), la congruence spéciale . . . (392)

$$z^3 - 17.y^3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 1087).$$

Or, c'est là précisément la congruence que, sous la marque (170), nous avons prise pour un des exemples de l'application de notre méthode générale (165) à la résolution de ces congruences fondamentales du second ordre (163). Et nous y avons trouvé, sous la marque (172), pour les racines z et y , les valeurs . . . (392')

$$\begin{aligned} z &= h - 27a + 1087.j', \\ y &= 4h - 1 + 1087.j''. \end{aligned}$$

Nous aurons donc ici, pour les susdits (360)' nombres A , P , et M , les valeurs . . . (393)

$$A = (h - 27a), \quad P = (4h - 1), \quad \text{et} \quad M = 1087;$$

le nombre h , qui forme l'espèce de ces racines, étant arbitraire. — Et nous aurons ensuite, pour la seconde des congruences instrumentales (360) et (361), la congruence spéciale . . . (394)

$$z^3 - 1087.u^3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 17).$$

Et pour la solution de cette congruence, afin de pouvoir, par la relation (182)', découvrir le résidu $f(k)$ de la factorielle (183) qui servira à cette solution, nous aurons ici, d'après (167), pour le nombre ξ qui conduit à ce résidu $f(k)$, la valeur . . . (395)

$$\xi = (-1)^{w+v} \cdot \kappa \left[\frac{17}{1087}, \varpi \right]^{(w-1)} = -1;$$

qui, d'après (182)', sera le résidu dans la congruence . . . (395')

$$x^4 \equiv -1, \quad (\text{mod.} = 17);$$

dont la racine x doit, d'après (183), former le résidu $f(k)$ en question. Or, cette racine x est $\pm \sqrt{-1}$; et par conséquent, l'égalité (183) serait ici . . . (395'')

$$\pm \sqrt{-1} = f(k),$$

Il n'existe donc pas de valeur pour le nombre k qui, par les expressions (165), puisse résoudre, avec des nombres z et u différents de l'unité et indépendants l'un de l'autre, la deuxième congruence instrumentale (394) dont il est question. Il faut alors, d'après ce que nous avons prescrit pour ce cas, considérer le nombre u comme égal à l'unité; et dans ce cas, la congruence instrumentale (394) se réduira à la congruence du premier ordre . . .

$$\dots (396) \quad z^3 - 1087 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 17);$$

c'est-à-dire, à la congruence . . . (396')

$$z^3 + 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 17);$$

dont la racine z , sans que l'on ait besoin d'appliquer à sa recherche le procédé (88) ou (95), est manifestement . . . (396')

$$z = -1 + 17.i.$$

Nous aurons donc ici, d'après l'expression générale (367)', les valeurs . . .
 . . . (397)

$$B = -1, \quad \text{et} \quad N = 17;$$

Or, avec les valeurs présentes $M = 1087$ et $N = 17$, on a . . . (398)

$$N \left[\frac{N}{M}, \psi \right]^{(w-1)} = 1, \quad \psi = 4; \quad \text{et} \quad N \left[\frac{M}{N}, \pi \right]^{(x-1)} = 64, \quad \pi = 3;$$

et par conséquent, en vertu des expressions (363), on aura, pour la quantité auxiliaire ζ , les valeurs identiques . . . (398')

$$\zeta = 1087.1, \quad \text{et} \quad \zeta = 17.64 - 1 = 1087.$$

Ainsi, d'après (368), les valeurs des inconnues cherchées z et y , seront . . .
 . . . (399)

$$z = (h - 271) + 1087.(h - 271) + 17.1087.p,$$

$$y = (4h - 1) + 1087.f;$$

c'est-à-dire, . . . (399')

$$z = 1088.(h - 271) - 1 + 17.1087.p,$$

$$y = (4h - 1) + 1087.f;$$

comme on aurait pu les déduire immédiatement de la relation (373). Et par conséquent, l'égalité finale (370) ou (374), dans le cas principal où $p = 0$, donnera pour l'inconnue y , l'expression . . . (400)

$$y^3 = \frac{\{1088.(h - 271) - 1\}^3 - 1087}{17};$$

et c'est par cette expression, réduite à la forme (371) ou à la forme (377), qu'il faudrait, par l'application de la méthode (300) ou (323), appropriée à cette fin, chercher la valeur de l'indéterminée h qui ferait un cube exact du second membre de cette égalité. Et d'abord, il faudrait examiner si le susdit

cas singulier (375) et (376) ne se présente pas ici. Pour cela, en vertu de l'expression (375), on aurait ici, pour le nombre problématique r de ce cas singulier, la valeur . . . (401)

$$r = \frac{(-1)^3 - 1087}{17} = -64 = (-4)^3,$$

qui se trouve effectivement former un cube exact de (-4) . On aura donc, par suite de l'égalité (376''), pour le nombre indéterminé h , la valeur $h = 271$. Et par conséquent, en vertu des expressions (368), on aura finalement, dans le cas principal où $p = 0$, pour les inconnues cherchées x et y , les valeurs . . . (402)

$$x = -1, \quad \text{et} \quad y = -4.$$

Et en effet, ces valeurs résolvent l'équation proposée (391) du troisième degré; car, on a réellement . . . (403')

$$(-1)^3 - 17 \cdot (-4)^3 = 1087.$$

Pour avoir les autres solutions de cette même équation indéterminée (391), il suffit d'introduire, dans l'égalité finale (380) qui doit généralement servir pour cette recherche, à la place des quantités Z et Y , les présentes valeurs (402) des inconnues x et y , correspondant au cas principal où $p = 0$. Et nous obtiendrons ainsi, pour la détermination générale des inconnues x et y , correspondant à des valeurs quelconques du nombre arbitraire p , l'égalité . . . (403)

$$y^3 = \frac{(-1 + 17 \cdot 1087 \cdot p)^3 - 1087}{17};$$

c'est-à-dire l'égalité . . . (404)

$$y^3 = A_0 + A_1 \cdot p + A_2 \cdot p^2 + A_3 \cdot p^3;$$

en faisant . . . (404')

$$A_0 = -64,$$

$$A_1 = + 3 \cdot 1087 = + 3261,$$

$$A_2 = - 3 \cdot 17 \cdot (1087)^2 = - 60\ 260\ 019,$$

$$A_3 = + (17)^3 \cdot (1087)^3 = + 371\ 181\ 630\ 367;$$

et en observant que, d'après (378), ces inconnues générales x et y , correspondant ainsi à des valeurs quelconques du nombre arbitraire p , seront ici . . . (405)

$$x = -1 + 17 \cdot 1087 \cdot p, \quad \text{et} \quad y = -4 + 1087 \cdot p.$$

Il ne reste donc qu'à déterminer, dans les égalités finales (403) ou (404), celles des valeurs de p qui rendent le second membre de ces égalités un cube exact. Et pour cela, afin de procéder méthodiquement, il faut maintenant, comme nous l'avons dit plus haut, appliquer au second membre de ces égalités

(403) ou (404) notre méthode (300) ou (323), en dénotant par $F(p)$ la fonction de p que forme ce deuxième membre, savoir . . . (406)

$$F(p) = A_0 + A_1 \cdot p + A_2 \cdot p^2 + A_3 \cdot p^3.$$

En effet, d'après les susdites réductions (336) à (337) que reçoit cette méthode (323) lorsqu'on l'applique à de simples équations, dont l'inconnue serait x , on aurait ici, en faisant $k=0$ ou $k=1$, et par conséquent $H=p$, pour la fonction variée $F(p \pm 1)$, l'expression . . . (407)

$$F(p \pm 1) = B_0 + B_1 \cdot p + B_2 \cdot p^2 + B_3 \cdot p^3;$$

les coefficients B_0, B_1, B_2 et B_3 , d'après leur détermination générale (300', étant ici . . . (407')

$$B_0 = A_0 \pm A_1 + A_2 \pm A_3,$$

$$B_1 = A_1 \pm 2 \cdot A_2 + 3 \cdot A_3,$$

$$B_2 = A_2 \pm 3 \cdot A_3,$$

$$B_3 = A_3.$$

Et, comme nous l'avons dit en produisant cette méthode, on pourra, par de simples additions et soustractions des coefficients précédents, calculer les coefficients suivants, pour passer de la valeur de la fonction $F(p)$ à la valeur de la fonction suivante $F(p \pm 1)$, surtout lorsqu'on partira de la valeur initiale $p=0$, qui, dans notre cas présent (404), donne, pour la fonction en question $F(p)$, la valeur $F(0) = -64$. Ainsi, en désignant généralement par $B(p)_0, B(p)_1, B(p)_2$ et $B(p)_3$ le système de ces coefficients qui, dans leur formation progressive, répondront à la valeur $F(p)$ de la fonction primitive (406), le nombre p ayant une valeur quelconque, positive ou négative, et même zéro, valeur zéro avec laquelle ces coefficients représenteront leur système primitif A_0, A_1, A_2 et A_3 , tel qu'il est ici déterminé par les valeurs (404)', les expressions (407)' prendront la forme générale . . . (408)

$$B(p \pm 1)_0 = B(p)_0 \pm B(p)_1 + B(p)_2 \pm B(p)_3,$$

$$B(p \pm 1)_1 = B(p)_1 \pm 2 \cdot B(p)_2 + 3 \cdot B(p)_3,$$

$$B(p \pm 1)_2 = B(p)_2 \pm 3 \cdot B(p)_3,$$

$$B(p \pm 1)_3 = B(p)_3.$$

Et par conséquent, lorsqu'on partira de la valeur initiale $p=0$, comme nous l'avons déjà dit, on aura immédiatement, pour la fonction en question $F(p)$, la valeur . . . (409)

$$F(p) = B(p)_0;$$

de sorte que, par de simples additions et soustractions de ces coefficients progressifs (408), on parviendra à cette valeur de la fonction $F(p)$, en passant par toutes ses valeurs antérieures, ce qui est indispensable dans notre présente question, et ce qui ne pourrait être obtenu qu'avec beaucoup de travail par une évaluation immédiate de cette fonction (406), surtout lorsque le nombre p serait très-grand. — Ainsi, pour notre exemple (404), en partant des va-

leurs (404)', nous obtiendrons, suivant la règle (408), les systèmes progressifs des coefficients B, savoir . . . (410)

$$\begin{array}{ll}
 B(+1)_1 = + & 371\ 121\ 373\ 545, & B(-1)_1 = - & 371\ 241\ 893\ 711, \\
 B(+1)_2 = + & 1\ 113\ 424\ 374\ 324, & B(-1)_2 = + & 1\ 113\ 665\ 414\ 400, \\
 B(+1)_3 = + & 1\ 113\ 484\ 631\ 082, & B(-1)_3 = - & 1\ 113\ 605\ 151\ 120, \\
 B(+1)_4 = + & 371\ 181\ 630\ 367, & B(-1)_4 = + & 371\ 181\ 630\ 367; \\
 B(+2)_1 = + & 2\ 969\ 212\ 009\ 318, & B(-2)_1 = - & 2\ 969\ 694\ 089\ 598, \\
 B(+2)_2 = + & 4\ 433\ 938\ 527\ 589, & B(-2)_2 = + & 4\ 454\ 420\ 607\ 741, \\
 B(+2)_3 = + & 2\ 227\ 029\ 522\ 183, & B(-2)_3 = - & 2\ 227\ 150\ 042\ 221, \\
 B(+2)_4 = + & 371\ 181\ 630\ 367; & B(-2)_4 = + & 371\ 181\ 630\ 367; \\
 B(+3)_1 = + & 10\ 021\ 361\ 689\ 457, & B(-3)_1 = - & 10\ 022\ 446\ 369\ 927, \\
 & \text{etc., etc.;} & & \text{etc., etc.}
 \end{array}$$

Et par conséquent, en vertu de l'expression générale (409), nous aurons immédiatement, pour notre présent exemple (404)', les valeurs . . . (411)

$$\begin{array}{ll}
 F(+1) = + & 371\ 121\ 373\ 545; & F(-1) = - & 371\ 241\ 893\ 711; \\
 F(+2) = + & 2\ 969\ 212\ 009\ 318; & F(-2) = - & 2\ 969\ 694\ 089\ 598; \\
 F(+3) = + & 10\ 021\ 361\ 689\ 457; & F(-3) = - & 10\ 022\ 446\ 369\ 927; \\
 & \text{etc., etc.;} & & \text{etc., etc.}
 \end{array}$$

Or, aucun de ces derniers nombres ne forme un cube exact, comme le demande l'égalité (403) ou (404); et par conséquent, en vertu des expressions (405) des inconnues cherchées x et y , il n'existe, entre les limites correspondant à $p = +3$ et $p = -3$, c'est-à-dire, entre les limites de $+55436$ et de -55438 , aucune valeur pour l'inconnue x , autre que la valeur (402), qui puisse servir à la solution de l'équation proposée (391) du troisième degré.

— On pourrait manifestement, avec la même facilité, poursuivre les calculs précédents (410) et arriver ainsi à telles autres limites aussi grandes que l'on voudrait pour l'inconnue x , afin de s'assurer qu'entre ces limites, cette inconnue x peut ou ne peut recevoir une valeur propre à la solution de l'équation proposée (391). Et notre présente méthode (403) ou (404) offre ainsi l'avantage de pouvoir, dans des limites données pour les inconnues x et y , quelque grandes que ces limites, positives et négatives, puissent être, résoudre complètement le problème. — Toutefois, il faut, avant tout, résoudre entièrement l'égalité finale (400), qui correspond au cas principal où $p = 0$, en y cherchant, toujours par notre méthode (300) ou (323), les valeurs de A qui, prises positivement et négativement, au-dessous de leur limite absolue que forme ici la moitié du module 1087, rendraient le deuxième membre de cette égalité (400) un cube exact. Et alors; si cela était possible, les expressions (368) donneraient, avec ces différentes valeurs de A , les différents systèmes de valeurs des inconnues x et y , correspondant au cas principal où le nombre absolu-

ment arbitraire p est zéro, c'est-à-dire, les différents systèmes parmi lesquels nous nous sommes borné à déterminer ici celui que nous avons produit à la marque (402). Il est sans doute superflu d'ajouter que, pour ces autres systèmes de valeurs des inconnues z et y , s'il en existait, il faudrait, d'après l'égalité finale (380), résoudre, toujours par notre méthode (300) ou (323), des égalités analogues à nos présentes égalités (403) ou (404), qui feraient connaître, pour des limites quelconques données, s'il existe ou s'il n'existe pas de telles valeurs ultérieures.

Soit proposée, pour deuxième exemple, l'équation indéterminée du second ordre et du cinquième degré . . . (412)

$$z^5 - 13.y^5 = 17,$$

où il s'agit de découvrir directement, s'il en existe, les deux nombres inconnus z et y . — En comparant cette équation numérique à l'équation générale (366), ou immédiatement à l'équation générale (359), dans laquelle la troisième inconnue u serait égale à l'unité, nous aurons ici, pour la première des deux congruences instrumentales (360) et (361), la congruence spéciale . . . (413)

$$z^5 - 13.y^5 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 17);$$

congruence qu'il faudra résoudre par notre méthode générale (165), afin de découvrir d'abord les deux nombres z et y indépendants l'un de l'autre, qui formeront ainsi une première détermination des inconnues cherchées dans l'équation proposée (412). — Or, d'après (167), nous aurons ici la congruence auxiliaire . . . (414)

$$13.\xi - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 17);$$

qui, par l'expression (167'), donnera, pour ξ , la valeur . . . (414')

$$\xi = (-1)^4 . N \left[\frac{17}{13}, 3 \right]^{(1)} + 17.i = 4 + 17.i.$$

Nous aurons donc, en vertu de la relation (182), pour le nombre x qui, par l'égalité (183), forme le résidu $f(k)$ de la factorielle cherchée, la congruence . . . (415)

$$x^{17} \equiv 4, \quad (\text{mod.} = 17).$$

Et par l'application du procédé (88) ou (95), nous trouverons, pour la racine x de cette congruence, les valeurs . . . (415')

$$x = \pm 2 + 17.j.$$

Ainsi, l'égalité (183) sera . . . (416)

$$f(k) = \pm 2;$$

c'est-à-dire que le nombre cherché k , qui entrera dans la solution (165) de la présente congruence instrumentale (413), sera l'exposant de la factorielle dont

la résidu, par rapport au module 17, est $+2$ ou -2 . Or, en prenant, par rapport à ce module 17, les résidus des factorielles qui sont données dans la table (383), nous trouverons . . . (417)

$$\begin{aligned} (1^{11}) &\equiv 2, & (1^{11}) &\equiv 6, & (1^{11}) &\equiv 7, & (1^{11}) &\equiv 1, & (1^{11}) &\equiv 6, \\ (1^{11}) &\equiv 8, & (1^{11}) &\equiv 13, & (1^{11}) &\equiv -2, & \text{etc.} \end{aligned}$$

Ainsi, sans chercher des valeurs ultérieures, nous aurons, pour le nombre k en question, les deux valeurs . . . (417')

$$k = 2, \quad \text{et} \quad k = 9.$$

Et avec la première de ces deux valeurs, les expressions (165) nous donneront, pour les deux racines z et y de la congruence instrumentale (413), les valeurs . . . (418')

$$\begin{aligned} z &= h + 4 + 17.j^2, \\ y &= 4h - 1 + 17.j^2; \end{aligned}$$

dans lesquelles le nombre h , qui forme l'espèce de ces racines, demeure arbitraire. — Il faut ici remarquer que, si l'on avait pris la seconde des deux valeurs (417') de k , savoir, $k = 9$, les expressions (165) auraient donné, pour les racines z et y de la congruence (413), les valeurs . . . (419)

$$\begin{aligned} z &= h' - 4 + 17.j^2, \\ y &= 4.h' + 1 + 17.j^2; \end{aligned}$$

car, ayant, par rapport au module (17), les congruences . . . (420)

$$(1^{11}) \equiv +2, \quad \text{et} \quad (1^{11}) \equiv -2;$$

on aura également la congruence . . . (420')

$$(1^{11})^2 \equiv (1^{11})^2, \quad (\text{mod.} = 17).$$

Mais, les dernières valeurs (419) des racines z et y en question, ne diffèrent de leurs valeurs précédentes (418) que par leurs espèces respectives h' et h , qui sont arbitraires; car, si l'on établit la relation $h' - h = 8$, ces dernières valeurs (419) se réduisent aux premières (418), et réciproquement. — En général, lorsque les deux racines $+x$ et $-x$ de la congruence (182') deviennent, par l'égalité (183), les résidus $f(k_1)$ et $f(k_2)$ de deux factorielles différentes, par rapport à un module donné M , savoir . . . (421)

$$(1^{k_1}) \equiv +x, \quad \text{et} \quad (1^{k_2}) \equiv -x;$$

on aura toujours, par rapport à ce module M , les congruences . . . (421')

$$(1^{k_1}) + (1^{k_2}) \equiv 0, \quad \text{et} \quad (1^{k_1})^2 \equiv (1^{k_2})^2.$$

Et si l'on suppose que l'exposant k_2 est plus grand que l'exposant k_1 , on aura . . . (421'')

$$(1^{k_2})^2 \equiv M.i + (1^{k_1})^2;$$

le nombre i étant positif; et par conséquent, on aura toujours . . . (422)

$$(-1)^{w_1} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{h_1})^k}, \varpi_1 \right]^{(w_1-1)} = (-1)^{w_2} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{h_2})^k}, \varpi_2 \right]^{(w_2-1)};$$

parce que les indices ϖ_1 et ϖ_2 auront toujours la relation $\varpi_2 = \varpi_1 + 2$. Si nous désignons donc simplement par $N(1)$ la première de ces deux fonctions alephs, et par $N(2)$ la seconde de ces fonctions, les expressions (165) donneront, pour les racines x et y de la congruence générale (163), les deux systèmes de valeurs . . . (423)

$$x = h_1 + (-1)^{w_1+h_1} \cdot N(1) + M.f', \quad x = h_2 + (-1)^{w_2+h_2} \cdot N(2) + M.f', \\ y = h_1 \cdot (1^{h_1})^k - (-1)^{h_1} + M.f''; \quad y = h_2 \cdot (1^{h_2})^k - (-1)^{h_2} + M.f'',$$

en ne perdant pas de vue que l'on a . . . (423')

$$N(1) = N(2)_1 \quad \text{et} \quad (1^{h_1})^k = (1^{h_2})^k, \quad (\text{mod.} = M).$$

Et les valeurs de ces deux systèmes ne différeront que par leurs espèces respectives h_1 et h_2 , qui sont arbitraires. En effet, lorsque les deux exposants h_1 et h_2 sont tous les deux pairs ou impairs, les expressions de ces deux systèmes (423) sont identiques; et lorsque l'un de ces exposants h_1 et h_2 est pair et l'autre impair, ces expressions (423) peuvent être rendues identiques, en établissant, entre les deux espèces h_1 et h_2 , la relation . . . (424)

$$h_2 - h_1 = + 2 \cdot (-1)^{w_1+h_1} \cdot N(1) = - 2 \cdot (-1)^{w_2+h_2} \cdot N(2);$$

car, en éliminant, par cette relation, l'une ou l'autre des espèces h_1 ou h_2 dans leurs systèmes respectifs (423), et en ayant d'ailleurs égard à la relation fondamentale (25) de nos présentes fonctions alephs, ces deux systèmes (423) deviendront identiques. — Ainsi, en considérant que les valeurs des racines x et y sont nécessairement identiques, les deux systèmes (423) de leurs expressions ne diffèrent, dans le dernier cas, que par la différence ($h_2 - h_1$) de leurs espèces respectives, différence dont nous venons de reconnaître la valeur (424), et qui peut alors être assez considérable. Il est donc constaté que les limites de l'espèce h dans les expressions générales (165) peuvent être plus petites que la moitié du module M , comme nous l'avons dit en accusant ces limites pour l'évaluation de la quantité radicale (372). Mais, ce sont surtout les 2*n* racines différentes x dans la susdite congruence auxiliaire (182) qui, en donnant, par l'égalité (183), des valeurs différentes pour l'exposant h des factorielles, conduisent à des valeurs différentes de l'espèce h , et assignent ainsi, à ce nombre h , des limites différentes, parmi lesquelles il peut y en avoir qui soient de beaucoup plus petites que la moitié du module M , ainsi que nous l'avons annoncé à l'occasion de l'évaluation en question de la quantité radicale (372).

Revenons à notre présent exemple (412); et bornons-nous aux expressions (418) des racines x et y de la première congruence instrumentale (413). — Nous aurons ainsi, pour les quantités A et P de l'expression générale (360)' de ces racines, les valeurs . . . (425)

$$A = h + 4, \quad \text{et} \quad P = 4h - 1.$$

Et quant à la deuxième congruence instrumentale (361), nous aurons, en vertu de sa réduction (367), la simple congruence du premier ordre . . . (426)

$$x^3 \equiv 17, \quad (\text{mod.} \equiv 13);$$

ou bien . . . (426')

$$x^3 \equiv 4, \quad (\text{mod.} \equiv 13);$$

pour la solution de laquelle, en faisant ici $h = 2$, notre procédé élémentaire (95) donnera l'expression . . . (427)

$$x = [T_p]^{\frac{1}{3}} \cdot (-3)^r + 13.j;$$

dans laquelle . . . (427')

$$T_p \equiv 4.(1024)^3 \equiv 4.(10)^3, \quad (\text{mod.} \equiv 13).$$

Ainsi, en formant, d'après (147), à l'aide de la table (148), par rapport au module $M \equiv 13$, les résidus des puissances des nombres naturels . . . (427)''

$1, \equiv 1, \quad 2, \equiv 6, \quad 3, \equiv 9, \quad 4, \equiv 10, \quad 5, \equiv 5, \quad 6, \equiv 2, \quad 7, \equiv 11, \quad 8, \equiv 8, \quad 9, \equiv 3, \quad 10, \equiv 4, \quad 11, \equiv 7, \quad 12, \equiv 12, \quad 13, \equiv 0, \text{ etc. ;}$
résidus qui confirment notre susdit cas (263) et (264), où, d'après les conditions (257), il n'existe pas de nombres qui soient non-résidus pour la cinquième puissance des nombres par rapport au module 13; on trouvera facilement que la présente racine cherchée x est . . . (428)

$$x = 10.$$

Nous aurons donc, pour la quantité B dans l'expression générale (367)', la valeur . . . (429)

$$B = 10.$$

Enfin, avec les valeurs $M \equiv 17$ et $N \equiv 13$, données dans l'exemple présent (412), nous trouverons, pour les expressions (363) de la quantité auxiliaire ζ , les valeurs . . . (430)

$$(-1)^r \cdot N \left[\frac{13}{17}, \omega \right]^{(r-1)} = 3, \quad \text{et} \quad (-1)^r \cdot N \left[\frac{12}{13}, \pi \right]^{(r-1)} = 4;$$

qui nous donneront, pour cette quantité auxiliaire ζ , les valeurs identiques . . . (430')

$$\zeta = 17.3 \equiv 51, \quad \text{et} \quad \zeta = 13.4 - 1 \equiv 51.$$

Nous aurons donc, avec les valeurs (425), (429), et (430) des quantités A , P , B , et ζ , pour la solution du problème que présente notre deuxième exemple (412), en vertu de nos égalités finales (370) ou (374), l'expression générale . . . (431)

$$y^5 = \frac{\{52.A - 302 + 13.17.P\}^5 - 17}{13};$$

qui, dans le cas principal où $P = 0$, se réduit à l'expression . . . (432)

$$y^5 = \frac{32.(26.A - 151)^5 - 17}{13}.$$

Il ne reste donc qu'à déterminer le nombre arbitraire A de manière à ce que cette expression de l'inconnue y soit une cinquième puissance exacte, en observant qu'en vertu des expressions générales (368), le nombre A qui remplirait cette condition, ferait en même temps connaître la valeur de l'inconnue z , savoir . . . (433)

$$z = 2.(26.A - 151).$$

Ei, pour procéder méthodiquement dans cette détermination du nombre A en question, qui doit rendre l'expression (432) une cinquième puissance exacte, il faudrait la réduire à la forme (371) et y appliquer ensuite la susdite méthode (300) ou (323), comme nous l'avons fait pour l'égalité (403) et (404). Mais, en considérant que, dans l'exemple présent (412), la limite absolue des nombres A , pris positivement et négativement, est, d'après les expressions (418), la moitié du module 17, on peut immédiatement évaluer l'expression (432) avec ces petits nombres A .

Or, pour aucun de ces nombres A , l'expression (432) en question ne peut devenir une cinquième puissance exacte. — Et nous en concluons immédiatement que l'équation proposée (412) ne peut, pour aucune autre valeur du nombre arbitraire P , être résolue par des nombres entiers, c'est-à-dire que cette équation indéterminée du cinquième degré est absolument non résoluble par des nombres entiers.

Il resterait à savoir si cette équation (412) peut au moins être résolue par des nombres fractionnaires. Et nous ferons ici de cette question un troisième et dernier exemple de la présente résolution générale des équations indéterminées de la forme (359). — Mais, avant d'y procéder, nous allons, comme nous l'avons annoncé plus haut, montrer comment cette résolution générale, telle que nous l'avons opérée d'abord par l'équation résultante (365), peut immédiatement être accomplie par l'influence des deux nombres arbitraires A_1 et A_2 , qui, en vertu de la solution des deux congruences instrumentales (360) et (361), entrent dans cette équation résultante (365) et peuvent y tenir compte des deux nombres indéterminés j et l qui s'y trouvent encore.

Pour cela, observons que, par suite de notre solution (165) de la première

(360) de ces deux congruences instrumentales, les nombres A et P ont les valeurs . . . (434)

$A = A_1 + N_1$, et $P = A_1.(1^{A_1})^s - (-1)^{A_1}$;
en faisant ici auxiliairement . . . (434)'

$$N_1 = (-1)^{A_1 + A_2} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{A_1})^s}, \pi_1 \right]^{(A_1 - A_2)}$$

Et par suite de cette même solution (165) de la seconde (361) des deux congruences instrumentales dont il s'agit, les nombres B et Q ont les valeurs . . . (435)

$B = A_2 + N_2$, et $Q = A_2.(1^{A_2})^s - (-1)^{A_2}$;
en faisant encore auxiliairement . . . (435)'

$$N_2 = (-1)^{A_1 + A_2} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{A_2})^s}, \pi_2 \right]^{(A_1 - A_2)}$$

Introduisant donc ces valeurs dans l'équation en question (365), et suppléant aux nombres indéterminés f et l , qui s'y trouvent, par une détermination convenable des présents nombres arbitraires A_1 et A_2 , on déduira, de cette équation résultante (365), la solution immédiate de l'équation générale (359) du troisième ordre et d'un degré quelconque n . En effet, on obtiendra ainsi immédiatement, dans le cas principal où $p = 0$, pour l'inconnue y , l'expression finale . . . (436)

$$y^n = \frac{\{(\zeta + 1).(A_1 + N_1) - \zeta.(A_2 + N_2)\}^n - M.(A_2.(1^{A_2})^s - (-1)^{A_2})^n}{N};$$

et par conséquent, en vertu des expressions générales (364), pour les deux autres inconnues z et u , les expressions spéciales . . . (437)

$$z = (\zeta + 1).(A_1 + N_1) - \zeta.(A_2 + N_2),$$

$$u = A_2.(1^{A_2})^s - (-1)^{A_2}.$$

Il ne reste donc qu'à déterminer les nombres arbitraires A_1 et A_2 de manière à ce que la première (436) de ces expressions, qui formera toujours un nombre entier, soit en outre une puissance exacte du degré n , en ne perdant pas de vue qu'en vertu des solutions respectives des deux congruences instrumentales (360) et (361), par notre procédé général (165), les deux nombres arbitraires A_1 et A_2 , en les prenant positivement et négativement, ont, pour limites absolues, le premier A_1 la moitié du module M , et le second A_2 la moitié du module N , et qu'ils ont de plus des limites spéciales, beaucoup plus resserrées, que leur donne la susdite congruence (182) dont les racines x forment les résidus $f(k)$ des factorielles servant à déterminer, pour nos

On pourra donc évaluer ces coefficients en nombres entiers pour chacune des valeurs successives du nombre arbitraire A_2 , prises positivement et négativement, dans leur limite absolue $\frac{1}{2} \cdot N$. Et l'on aura ainsi autant de systèmes différents de ces coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$. — Or, c'est avec chacun de ces systèmes différents qu'il faudra ensuite évaluer la présente expression (438)' de y^n pour toutes les valeurs du nombre arbitraire A_1 , prises de même positivement et négativement, dans leur limite absolue $\frac{1}{2} \cdot M$. Et c'est à cette évaluation progressive qu'il faudra appliquer notre méthode (300) ou (323), dans sa réduction (336) à (337)', en dénotant généralement par $F(A_1)$ la fonction que forme le polynôme (438)', savoir . . . (439)

$F(A_1) = A_0 + A_1 \cdot A_1 + A_2 \cdot (A_1)^2 + A_3 \cdot (A_1)^3 \dots + A_n \cdot (A_1)^n$;
et en transformant successivement cette fonction $F(A_1)$ en ses fonctions consécutives $F(A_1 \pm 1)$ par le moyen de l'expression . . . (439)'

$F(A_1 \pm 1) = B_0 + B_1 \cdot A_1 + B_2 \cdot (A_1)^2 + B_3 \cdot (A_1)^3 \dots + B_n \cdot (A_1)^n$;
dans lesquelles les coefficients $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ sont donnés généralement par nos expressions (300)'. — Il est sans doute superflu d'ajouter ici que l'on procédera, dans cette évaluation progressive (439) et (439)', en tout conformément aux procédés que nous avons suivis dans notre exemple (406) à (411).

Quant aux autres systèmes de valeurs des inconnues x, y, u , qui peuvent également résoudre l'équation générale (359), et qui correspondent, pour le nombre absolument arbitraire p , à ses valeurs différentes de sa valeur principale $p = 0$, la solution que, dans ce cas spécial, nous avons donnée plus haut, à la marque (380), pour les équations indéterminées (366) du second ordre, s'applique également à nos présentes équations (359) du troisième ordre. En effet, désignant par Z, Y, U , les valeurs que l'on aura obtenues par les expressions précédentes (436) et (437)', correspondant au cas principal où $p = 0$, on aura d'abord, en vertu des expressions générales (364), pour les nouvelles inconnues x, y, u , les valeurs . . . (440)

$$x = Z + MN \cdot p, \quad y = Y + M \cdot j, \quad u = U + N \cdot i;$$

et en vertu de l'équation résultante (365), pour la détermination des nombres indéterminés p et i , l'expression générale . . . (441)

$$y^n = \frac{(Z + MN \cdot p)^n - M \cdot (U + N \cdot i)^n}{N};$$

dans laquelle il faudra, par la combinaison successive des nombres p et i , toujours à l'aide de notre méthode (300) ou (323), chercher à rendre cette expression une puissance exacte du degré n , en observant qu'elle formera toujours, pour toutes les valeurs des nombres p et i , des nombres entiers. — Nous pouvons également ici, comme à la suite de la solution (380), nous

dispenser de faire remarquer que la solution de la présente égalité (441) se fera en tout par les mêmes moyens que la solution analogue de l'égalité précédente (436), à la seule exception que les nombres indéterminés p et i n'auront ici aucune limite, précisément pour qu'ils puissent, à leur tour, indiquer ainsi toute l'infinité de solutions que peut recevoir l'équation proposée (359). — Nous nous bornerons ici, afin de compléter l'intelligence de cette grande question, à faire remarquer que, pour tenir compte du nombre arbitraire i dans notre expression finale (436), correspondant au cas principal où $p = 0$, nous y faisons concourir les deux nombres arbitraires h_1 et h_2 , qui, précisément par ce concours dans les expressions (437) des deux inconnues z et u , rendent nulle l'influence spéciale du nombre arbitraire i dans la solution de la seconde des deux congruences instrumentales (360) et (361), lorsque cette solution est aperçue par de telles valeurs (437) des inconnues z et u , comme elle l'est effectivement dans notre expression finale (436). Toutefois, si l'on voulait, dans cette expression finale (436), tenir compte directement du nombre i en question, ce qui serait absolument inutile, on pourrait, dans la présente dernière expression (441), après y avoir également fait $p = 0$, introduire successivement, à la place des quantités Z et U , tous les systèmes de valeurs (437) des inconnues z et u , et, pour chacun de ces systèmes, chercher, toujours par notre méthode (300) ou (323), à résoudre ou à réaliser cette dernière égalité (441), en rendant son deuxième membre puissance exacte du degré n , par les différentes valeurs du nombre i , prises positivement et négativement, depuis $i = \pm 1$, jusqu'aux valeurs que l'on fixerait pour les limites dans la solution de ce problème. Mais, comme nous venons de le dire, ce serait un travail absolument inutile, parce qu'il ne pourrait conduire à des résultats différents de ceux que donne immédiatement la susdite solution (438) à (439)' de notre expression finale (436).

Telles (436) à (441) sont donc définitivement les expressions générales qui donnent la solution complète de l'équation indéterminée (359) du troisième ordre et d'un degré quelconque n , savoir, de l'équation . . . (442) :

$$z^n - N.y^n = M.n^n.$$

Et nous pouvons facilement déduire de ces expressions (436) à (441), les expressions également générales qui donnent la solution pareille de l'équation indéterminée (366) du second ordre et d'un degré également quelconque n , savoir, de l'équation . . . (443)

$$z^n - N.y^n = M,$$

dans laquelle entrent seulement les deux inconnues z et y . En effet, d'après (367), il suffit de remarquer que, dans ce cas, la seconde des congruences instrumentales (360) et (361), se réduit à la simple congruence du premier.

ordre . . . (444)

$$z^2 - M \equiv 0, \quad (\text{mod} = N);$$

de sorte qu'en désignant ici par (N_2) la racine z de cette congruence, telle que cette racine est donnée par nos procédés (88) ou (95), savoir . . . (444)

$$(N_2) = [T_p]^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ (-1)^{n+1} \cdot N \left[\frac{N}{(1!)^2}, \pi \right]^{(n-1)} \right\}^{\frac{1}{2}} + N.f;$$

nous aurons, pour le cas présent (443), dans les expressions (435) des quantités B et Q , les valeurs . . . (445)

$$A_2 = 0, \quad A_2 = 1; \quad \text{et par conséquent, } B = (N_2), \quad \text{et } Q = 1.$$

Substituant donc ces valeurs dans les expressions (436) et (437), nous obtenons, pour la solution de l'équation (443), où il n'existe que deux inconnues z et y , les expressions générales . . . (446)

$$y^2 = \frac{\{(\zeta + 1) \cdot (h + N_1) - \zeta \cdot (N_2)\}^2 - M}{N},$$

$$z = (\zeta + 1) \cdot (h + N_1) - \zeta \cdot (N_2);$$

dans lesquelles n'entre plus que le seul nombre arbitraire h , qu'il faudra déterminer, toujours par notre susdite méthode (300) ou (323), de manière à ce que le second membre de la première de ces expressions soit une puissance exacte du degré n , en observant que, par suite de notre solution (165), qui introduit ici ce nombre h , sa limite absolue, en le prenant positivement et négativement, est la moitié du module M , et en observant de plus que, par suite de la congruence (182), qui fixe, dans notre solution (165), le genre k et par conséquent, pour des racines déterminées z et y , l'espèce h , la limite spéciale de cette espèce h peut devenir beaucoup plus resserrée, comme nous l'avons déjà dit plus haut. — Et pour ce qui concerne les autres systèmes de valeurs des inconnues z et y dans l'équation (443), correspondant à des valeurs du nombre absolument arbitraire p , différentes de sa valeur principale $p = 0$, à laquelle se rapportent les expressions (446), nous aurons ici immédiatement, en vertu des expressions (440) et (441), les expressions également générales . . . (447)

$$y^2 = \frac{(Z + MN.p)^2 - M}{N}, \quad \text{et}$$

$$z = Z + MN.p;$$

en désignant par z la valeur que donnent la seconde des expressions précédentes (446), et en observant que, par des valeurs convenables du nombre absolument arbitraire p , il faut, toujours à l'aide de notre méthode (300) ou

(3a3), rendre puissance exacte du degré n la première des présentes expressions (447). Et il ne faut pas perdre de vue que ces valeurs du nombre p n'ont ici aucune limite, pour pouvoir, dans ce cas, servir à découvrir tous les systèmes de solutions différentes que peut recevoir la présente équation (443).

Nous obtenons ainsi, par ce résumé que nous venons de faire de notre théorie précédente, d'abord, dans les expressions (436) à (441), la solution complète des équations indéterminées (442) du troisième ordre et d'un degré quelconque n , et ensuite, dans les expressions (446) à (447), la solution également complète des équations indéterminées (443) du second ordre et de même d'un degré quelconque n . On pourra donc, sans avoir besoin de recourir à notre théorie téléologique de la résolution des équations indéterminées, opérer immédiatement, par les présentes expressions générales que nous venons de nommer, la résolution complète des équations (442) et (443), auxquelles, comme nous l'avons dit plus haut, peuvent être ameoées, par de simples transformations algébriques, toutes les équations indéterminées du second ordre, qui seules peuvent constituer un besoin actuel de la science.

Soit maintenant proposée, pour le susdit troisième et dernier exemple, l'équation indéterminée complète du cinquième degré . . . (448)

$$x^5 - 13.y^5 = 17.z^5,$$

formant l'accomplissement de l'équation (412) que nous nous sommes proposée pour le deuxième exemple, et que nous avons résolue par les expressions (432) et (433), par lesquelles nous avons reconnu que cette équation (412) ne pouvait être résolue par des nombres entiers x et y , lorsqu'on y considèrerait ainsi le nombre u comme égal à l'unité. Et introduisant ici ce nombre u qui, d'après ce que nous avons vu à l'occasion des équations (357) et (358) du second degré, peut former le dénominateur commun des nombres x et y dans l'équation (412), nous parviendrons, par la solution de l'équation présente (448), si toutefois cette solution est possible, à résoudre, au moins par des nombres fractionnaires, cette équation (412) qui ne peut recevoir de solution par des nombres entiers x et y .

Or, pour la solution de la présente équation (448), nous avons déjà résolu, sous la marque (418), la première (413) de ses congruences instrumentales. Et nous aurons ainsi, par suite de cette solution (418), pour les valeurs (434) des quantités A et P , les nombres . . . (449)

$$A_1 + N_1 = A_1 + 4, \quad \text{et} \quad A_1.(1^{14})^5 - (-1)^5 = 4.A_1 - 1.$$

De plus, par les déterminations (430) et (430)', nous avons déjà la valeur du nombre ζ qui entre dans nos expressions générales (436) à (438), savoir . . . (450)

$$\zeta = 51.$$

Il ne nous reste donc ici, pour obtenir la solution de la présente équation (448), qu'à résoudre sa deuxième congruence instrumentale (361), savoir . . . (451)

$$z^3 - 17.u^3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 13);$$

ou bien simplement . . . (451)'

$$z^3 - 4.u^3 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 13);$$

qui nous fera connaître les valeurs (435) des quantités B et Q, c'est-à-dire, des nombres $(A_2 + B_2)$ et k_2 qui entrent encore dans les expressions générales (436) à (438), donnant la solution dont il s'agit. Or, pour la solution de cette dernière congruence instrumentale (451)', nous aurons, d'après (167), la congruence auxiliaire . . . (452) :

$$4.\xi - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = 13);$$

pour laquelle l'expression (167)' nous donnera la valeur . . . (452)'

$$\xi = (-1)^3 . N \left[\frac{13}{4}, 2 \right]^{(1)} + 13.i = -3 + 13.i.$$

Nous aurons donc, en vertu de la relation (182)', pour le nombre x qui, par l'égalité (183), forme le résidu $f(k)$ de la factorielle dont l'exposant k entre dans les expressions (165), la congruence . . . (452)''

$$x'' \equiv -3, \quad (\text{mod.} = 13).$$

Et par l'application de notre procédé (88) ou (95), nous trouverons, pour la racine x de cette congruence, la valeur . . . (452)'''

$$x = \pm 2 + 13.f;$$

Ainsi, l'égalité (183) nous donnera, pour le résidu $f(k)$ de la factorielle cherchée, la valeur . . . (453)

$$f(k) = \pm 2.$$

Et prenant, par rapport au présent module 13, les résidus des factorielles dans la table (383) de M. Augé, nous trouverons . . . (453)'

$$(1!) \equiv 2, \quad (2!) \equiv 6, \quad (4!) \equiv -2, \text{ etc.}$$

Nous aurons donc, pour le genre cherché k_2 , les nombres . . . (454)

$$k_2 = 2, \quad \text{et} \quad k_2 = 4.$$

Et comme ces nombres sont pairs tous les deux, les expressions (165), d'après ce que nous avons remarqué à l'occasion des formules (423), nous donneront, pour les inconnues x et u dans la seconde congruence instrumentale (451) ou (451)' qu'il s'agissait de résoudre, les valeurs identiques . . . (455)

$$z = k_2 + 3 + 13.f',$$

$$u = 4.A_2 - 1 + 13.f''.$$

Nous aurons ainsi, pour les valeurs (435) des quantités B et Q, les nombres . . . (456)

$A_2 + B_2 = A_2 + 3$, et $A_2 \cdot (1^{13})^2 - (-1)^{13} = 4 \cdot A_2 - 1$. Substituant donc ces valeurs et les valeurs précédentes (449) et (450) dans les expressions générales (436) et (437), nous obtiendrons, pour les trois inconnues x , y , u de l'équation indéterminée (448) du cinquième degré, qui forme notre dernier exemple, les expressions . . . (457)

$$y^3 = \frac{\{55 + 52 \cdot A_1 - 51 \cdot A_2\}^3 - 17 \cdot (4 \cdot A_2 - 1)^3}{13},$$

$$x = 55 + 52 \cdot A_1 - 51 \cdot A_2,$$

$$u = 4 \cdot A_2 - 1;$$

dans lesquelles les deux nombres arbitraires A_1 et A_2 , qui ont respectivement, pour leurs limites absolues, la moitié de leurs correspondants modules 17 et 13, doivent être déterminés de manière à ce que la première de ces expressions forme des cinquièmes puissances exactes. Et pour cette détermination des nombres A_1 et A_2 , en y appliquant notre méthode (300) ou (323), on aura ici, d'après les expressions générales (438)' et (439), le polynôme . . . (458)

$y^3 = F(A_1) = A_0 + A_1 \cdot A_1 + A_2 \cdot (A_1)^2 + A_3 \cdot (A_1)^3 + A_4 \cdot (A_1)^4 + A_5 \cdot (A_1)^5$; dans lequel les coefficients A_0 , A_1 , A_2 , etc., qui seront toujours des nombres entiers, se trouveront déterminés par les formules (438) et (438)". En effet, les quantités auxiliaires (438), en y substituant les présentes valeurs (449), (450), et (456), seront ici . . . (459)

$$R = 52 \cdot (1 - A_2) + (3 + A_2) = 55 - 51 \cdot A_2,$$

$$S = 20 + 65 \cdot (A_2) + 230 \cdot (A_2)^2 - 830 \cdot (A_2)^3 +$$

$$+ 1675 \cdot (A_2)^4 - 1339 \cdot (A_2)^5,$$

$$T = 4,$$

$$U = \frac{(55 - 51 \cdot A_2)^3 - (3 + A_2)^3}{52 \cdot (1 - A_2)}.$$

Et avec ces quantités auxiliaires, qui, pour toute valeur du nombre arbitraire A_2 , formeront toujours des nombres entiers, les expressions générales (438)" feront connaître les coefficients A_0 , A_1 , A_2 , etc., du polynôme présent (458), savoir . . . (460).

$$A_0 = S + 4 \cdot (1 - A_2) \cdot U,$$

$$A_1 = 20 \cdot (55 - 51 \cdot A_2),$$

$$A_2 = 2080 \cdot (55 - 51 \cdot A_2)^2,$$

$$A_3 = 108160 \cdot (55 - 51 \cdot A_2)^3,$$

$$A_4 = 2812160 \cdot (55 - 51 \cdot A_2)^4,$$

$$A_5 = 292\,464\,464.$$

On pourra donc, pour toutes les valeurs du nombre arbitraire A_2 , prises positivement et négativement, dans leur susdite limite 6, évaluer facilement ces coefficients. Et alors, pour chaque système de ces coefficients A_1, A_2, A_3 , etc., on pourra, tout aussi facilement, d'après les formules (43g) et (43g'), conformément aux procédés que nous avons suivis dans l'exemple (406) à (412), passer de la valeur de la fonction $F(A_1)$ à la valeur des fonctions suivantes $F(A_1 \pm 1)$, pour toutes les valeurs du nombre arbitraire A_1 , prises de même positivement et négativement, dans leur susdite limite 8. On parviendra donc, par ces procédés de simples additions et soustractions, à reconnaître, pour quelles valeurs des nombres arbitraires A_1 et A_2 , la fonction (458), c'est-à-dire, la première des expressions (457), deviendra une cinquième puissance exacte, dont la racine sera ainsi la valeur de l'inconnue y , et dont les nombres A_1 et A_2 donneront, par les deux dernières de ces expressions (457), les deux autres inconnues x et u . Ou bien, si, par aucune de ces valeurs des nombres A_1 et A_2 , limitées respectivement par les nombres 8 et 6, on ne peut rendre cinquième puissance exacte la fonction (458) ou la première des expressions (457), ce sera une preuve que l'équation proposée (448) du troisième ordre et du cinquième degré ne peut recevoir de solution par trois nombres entiers x, y, u , et par conséquent, que l'équation (412) du second ordre et également du cinquième degré ne peut même recevoir de solution par des nombres fractionnaires x et y .

Nous laissons aux géomètres, nos contemporains, du moins à ceux qui, d'après la susdite déclaration des académiciens de Paris, faite dans le journal français le *National*, partagent avec eux l'impuissance de comprendre nos ouvrages mathématiques, nous leur laissons, à ces géomètres, le soin d'achever nos présents calculs numériques, dont nous venons d'indiquer les procédés détaillés, et qui manifestement n'exigent plus qu'un travail purement mécanique. Nous leur procurerons ainsi, l'un ou l'autre, le plaisir de comprendre enfin nos travaux, s'il est vrai réellement qu'ils ne les comprennent pas, ou bien le plaisir de nous apprendre à nous, sinon les méthodes pour des pareilles solutions, qu'ils avouent ne pas connaître, du moins les principes philosophiques qu'ils pourraient avoir de leur science, et d'après lesquels ils sont en état de prévoir si les géomètres des siècles à venir pourront résoudre ces grands problèmes. Et à cette occasion, nous devons ici rappeler ce que Lagrange, dans un avertissement qu'il fit précéder à sa susdite solution des équations indéterminées du second degré, pensait alors sur cette question. Voici ses propres paroles : « A l'égard des équations indéterminées des degrés supérieurs au second, on n'a encore que des méthodes particulières pour les résoudre dans quelques cas; et il est à présumer que, pour ces sortes d'équations, la résolution générale devient impossible passé le second degré, comme elle paraît l'être passé le quatrième pour les équations déterminées. » Si ces paroles avaient été proférées par

quelqu'un de ces illustres académiciens qui, sans avoir jamais pu découvrir rien, ont appris, bien ou mal, les vérités découvertes par de vrais savants, et qui, avec ces vérités étrangères, exploitent leurs nations respectives, nous comprendrions facilement que ces savants par brevet fixent ainsi à la science l'horizon de leur propre intelligence. Mais, lorsqu'un homme de génie comme Lagrange, à qui la science doit une découverte fondamentale et quelques découvertes assez majeures, s'exprime ainsi sur l'avenir des mathématiques, nous sommes forcés d'en chercher la raison ailleurs que dans sa propre impuissance scientifique. Et cette raison, nous la découvrons facilement dans la présente ignorance absolue des véritables principes philosophiques sur lesquels repose cette grande science des mathématiques, de ces principes infaillibles par lesquels un géomètre, tel que Lagrange, n'aurait pas manqué de mieux prévoir l'avenir de sa science. — Postérieurement, ce grand géomètre a modifié son opinion, du moins pour les équations déterminées, en disant qu'on ne saurait décider si les équations des degrés supérieurs au quatrième peuvent ou ne peuvent être résolues. Or, dans le troisième et dans le cinquième des ouvrages qui sont annoncés par notre Programme précédent, et déjà même dans la troisième partie de l'ouvrage présent, où nous donnerons, par anticipation, la solution complète de l'équation déterminée du cinquième degré, nous espérons que nous ferons cesser cette indécision des géomètres à l'égard des équations déterminées, en même nous venons de la faire cesser, ce nous semble, dans cette deuxième partie de l'ouvrage présent, à l'égard des équations indéterminées. Pour bien convaincre les géomètres sur la solution de ces dernières équations, nous nous bornerons ici à leur rappeler, d'une manière irréfutable, nos deux grandes lois (308) et (310) qui, comme ils l'ont vu, régissent la solution générale des congruences de tous les ordres et de tous les degrés, cette solution des congruences de laquelle, comme ils ne peuvent plus en douter, s'ils ont compris les principes philosophiques de la présente réforme de la Théorie des Nombres, dépend absolument et exclusivement la résolution des équations indéterminées. Quel que soit en effet le mode de l'application de ces lois (308) et (310), celui que nous venons d'indiquer ou tout autre, lors même qu'on se bornerait à déterminer à posteriori, par des essais méthodiques, les éléments A_1, A_2, A_3 , etc., et A_1, A_2, A_3 , etc., qui servent ainsi à engendrer les modules donnés M et par conséquent les racines cherchées x, y, z , etc., il devient maintenant incontestable que, par la découverte de ces deux grandes lois (308) et (310), la science possède actuellement les moyens pour la solution des équations indéterminées de tous les ordres et de tous les degrés.

Nous terminerons cette réforme de la Théorie des Nombres par la détermination de la multiplicité des racines dans les congruences fondamentales (14) ou (85), de cette multiplicité qu'il importe de connaître dans notre présente

solution générale (436) à (441) des équations indéterminées (359) du troisième ordre et d'un degré quelconque n . En effet, nous avons vu que les différentes racines x d'une telle congruence fondamentale (182)' nous font découvrir, par l'égalité (183), les différents résidus $f(k)$ des factorielles dont les exposants k doivent servir, dans nos expressions générales (165), à la solution des deux congruences instrumentales (360) et (361); de sorte qu'autant qu'il y a de racines dans cette congruence auxiliaire (182)', autant il y a d'exposants différents k et par conséquent de nombres arbitraires h pour cette solution des congruences (360) et (361). Or, comme nous le savons déjà, ces nombres arbitraires h ont respectivement, pour leurs limites absolues, les modules M et N des congruences (360) et (361) en question; et par conséquent, dans cette multiplicité de leurs valeurs, ces nombres h , se trouvant à chaque fois déterminés par la valeur de la fonction aleph qui entre avec eux dans les expressions (165), reçoivent ainsi des limites spéciales, beaucoup plus resserrées que leurs susdites limites absolues M et N , nommément des limites d'autant plus resserrées que la valeur de leur correspondante fonction aleph est plus grande. Il importe donc de connaître les différentes valeurs de ces fonctions alephs, et en principe les différentes racines x de la congruence auxiliaire (182)', par lesquelles on découvre les exposants k des factorielles qui concourent à la construction des fonctions alephs dans les expressions générales (165). — Il faut ici remarquer que ces différentes limites des nombres arbitraires h sont manifestement les limites absolues de ces nombres, et par conséquent les limites absolues des cas singuliers dans lesquels, d'après notre présente théorie téléologique, peuvent se réaliser les cas de finalité des nombres qui font l'objet des problèmes dans la solution des équations indéterminées. Aussi, chercherait-on vainement à resserrer davantage ces limites par des artifices algébriques, quels qu'ils puissent être, par exemple, par des transformations des équations proposées (359) en vue d'y diminuer progressivement les modules réciproques M et N , comme le fait Lagrange, sans le savoir, dans sa susdite solution des équations indéterminées (358) du second degré, par des transformations, disons-nous, qui, sortant ainsi de l'état absolu de la question, exigeraient nécessairement beaucoup plus d'opérations que notre méthode directe, sans parler des solutions partielles de congruences accessoires auxquelles conduiraient ces transformations, et qui le plus souvent seraient, non-seulement difficiles, mais même impossibles.

Or, pour la présente détermination de la multiplicité des racines dans les congruences fondamentales (14) ou (85) qu'il nous reste ainsi à faire connaître, nous observerons que nous en avons déjà fixé les conditions sous les marques (137)'' et (139)' pour de telles congruences dans lesquelles le résidu a est un nombre quelconque. Mais, pour en signaler les principes immédiats, il faut fixer ces conditions pour les congruences fondamentales (14) lorsque leur ré-

sidu a est égal à l'unité. Et dans cette vue, notre loi générale (308), réduite d'abord à la loi (291) du premier ordre, et ensuite, en y faisant $A_0 = 1$, $A_{-1} = -1$, et $A_n = A_{n-1} = A_{n-2} = \dots = A_{-n} = 0$, c'est-à-dire, en la réduisant à son état primitif, où elle forme la troisième génération téléologique (15), nous aurons, dans la congruence fondamentale . . . (461)

$$x^m \equiv 1, \quad (\text{mod.} = M);$$

pour la génération du module M , l'expression . . . (462)

$$M = \text{fact.} [(1^{11})^m - H^m];$$

dans laquelle, d'après (291)', le nombre H est . . . (462')

$$H = A \cdot (1^{11})^j + (-1)^{j+1}.$$

Et par conséquent, en appliquant, à la décomposition de la fonction génératrice (462) en ses deux facteurs, notre susdite loi algébrique de la Théorie des Nombres, qui nous a conduit à l'égalité (191); nous obtiendrons ici, pour la détermination du nombre H , deux congruences distinctes, savoir, d'abord, lorsque le degré m est un nombre impair, les deux congruences . . . (463)

$$(1^{11})^m - H \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M), \quad \text{et} \\ (1^{11})^{m-1} + H \cdot (1^{11})^{m-2} + H^2 \cdot (1^{11})^{m-3} \dots + H^{m-1} \equiv 0;$$

et ensuite, lorsque le degré m est un nombre pair, les deux congruences . . . (464)

$$(1^{11})^m - H^1 \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M); \quad \text{et} \\ (1^{11})^{m-2} + H \cdot (1^{11})^{m-4} + H^2 \cdot (1^{11})^{m-6} \dots + H^{m-2} \equiv 0.$$

Il suffit donc, par le moyen de ces congruences, en prenant pour le genre arbitraire k un nombre quelconque, de déterminer la quantité inconnue H , qui, par son expression (462)', fera connaître l'espèce A correspondant au genre adopté k . Et alors, avec ces nombres connus k et A , la loi générale (310), ou bien la loi particulière (291), qui se rapporte ici au cas (286) des congruences du premier ordre, où il n'existe qu'une seule inconnue x , fera connaître cette inconnue.

Ainsi, pour la première des deux congruences (463), qui répondent au cas où le degré m de la congruence proposée (461) est un nombre impair, en y introduisant la valeur (462)' de H , on aura, pour la détermination de l'espèce A , la congruence . . . (465)

$$(1^{11})^j \cdot (1 - A) + (-1)^j \equiv 0, \quad (\text{mod.} = M);$$

qui, suivant les règles (27) et (28), donnera, pour la quantité $(1 - A)$, la valeur . . . (465')

$$1 - h = (-1)^{w+j} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{(j)})^2}, \psi \right]^{(w-1)} + M \cdot j.$$

Introduisant donc cette valeur de h dans la loi (292), nous obtiendrons, pour l'une des racines congruentielles de l'unité, correspondant au module M , la valeur . . . (466)

$$x = 1 + M \cdot j;$$

comme cela doit être généralement. Et pour avoir, par rapport au même module M , les autres racines congruentielles de l'unité, s'il en existe, il faut résoudre la deuxième des congruences (463), qui, d'après la loi (286), forme ici une congruence du premier ordre et du degré $(m-1)$, et qui, par conséquent, doit être résolue suivant notre procédé général de la solution de telles congruences (286), c'est-à-dire, par notre méthode générale (300).

Et c'est de la même manière qu'il faut procéder pour le cas (464) où le degré m de la congruence proposée (461) est un nombre pair, en observant que, dans ce cas, la première et la seconde des deux congruences (464) donneront toujours deux valeurs identiques, l'une positive et l'autre négative, pour l'inconnue H , et par conséquent que la première de ces congruences (464), suivant le procédé présent (465) et (465)', donnera alors, pour deux des racines congruentielles de l'unité, correspondant au module M , les deux valeurs . . . (467)

$$x = \pm 1 + M \cdot j;$$

comme cela doit être également.

Il est sans doute superflu d'ajouter ici que, lorsque, par le procédé susdit, on aura résolu les secondes des deux présentes congruences respectives (463) et (464); et que l'on aura ainsi obtenu des valeurs quelconques $(H) + M$ pour les inconnues H de ces congruences, on aura, en vertu de leur expression (462)', la congruence . . . (468)

$$A \cdot (1^{(j)})^2 - (-1)^2 \equiv (H), \quad (\text{mod.} = M);$$

qui, suivant les règles (27) et (28), donnera, pour l'espèce A , correspondant à chacune de ces valeurs (H) , la détermination . . . (468')

$$A = (-1)^{w+j} \cdot \left\{ (H) + (-1)^2 \right\} \cdot N \left[\frac{M}{(1^{(j)})^2}, \psi \right]^{(w-1)} + M \cdot j.$$

Et c'est avec ces valeurs de l'espèce A , correspondant à tout genre adopté h , que la loi (292) fera connaître toutes les racines congruentielles de l'unité, du moins toutes celles qui, pour le degré m de la congruence proposée (461) et son module M , sont possibles.

Or, ce que nous venons de dire concernant les racines de cette congruence (461) dont le résidu est égal à l'unité, s'applique identiquement aux congruen-

ces fondamentales (14) ou (85), savoir . . . (469)

$$x^m \equiv a, \quad (\text{mod. } \equiv M),$$

dont le résidu a est un nombre quelconque. En effet, si l'on suppose que R est une des valeurs de H qui, d'après (136), correspond à cette congruence, et qui, par l'expression (36), donne l'une des racines x de cette même congruence (469), nous avons déjà, sous la marque (137)'', pour le cas où le degré m est un nombre impair, et sous la marque (139)', pour le cas où le degré m est un nombre pair, fait connaître les deux congruences qui, pour la détermination des autres racines x , répondent aux secondes des deux présentes congruences respectives (463) et (464). Aussi, en observant que, dans la première (137)'' de ces congruences, les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_n$ ont les valeurs . . . (470)

$$A_1 = R, \quad A_2 = R^2, \quad A_3 = R^3, \quad \dots, \quad A_n = R^{n-1};$$

et que, dans la seconde (139)', les coefficients $B_1, B_2, \dots, B_n$ ont les valeurs . . . (470')

$$B_1 = R^1, \quad B_2 = R^2, \quad B_3 = R^3, \quad \dots, \quad B_n = R^{n-1};$$

pourra-t-on procéder immédiatement à la solution de ces congruences (137)'' et (139)' par les moyens que nous venons d'indiquer pour la solution des présentes deuxièmes congruences respectives (463) et (464). Et l'on obtiendra ainsi, par cette solution des congruences (137)'' et (139)' toutes les autres racines x de la congruence générale (469), du moins toutes celles qui, pour un tel résidu donné a , sont possibles.

En terminant cet exposé des conditions auxquelles doivent satisfaire les différentes racines des congruences (461) et généralement (469), il ne faut pas perdre de vue que nos expressions générales (88), (95) et (99), donnent immédiatement la détermination de toutes ces racines différentes, comme nous l'avons vu effectivement dans les exemples que nous avons allégués pour la solution de ces congruences fondamentales (85) du premier ordre. Et pour bien saisir l'ensemble des conditions présentes que nous venons d'assigner pour la multiplicité des racines dans les congruences distinctes, spéciales (461) et générales (469), il faut remarquer que les conditions spéciales (463) et (464) ne sont proprement que des cas particuliers des conditions générales (137)'' et (139)'. En effet, si, dans l'expression (36) de la racine x de la congruence générale (29), on suppose que $x = 1$, cette expression (36) ne pourra subsister qu'autant qu'en vertu de notre condition fondamentale (36), on ait, pour R , la valeur . . . (471)

$$R = (1^{1/2})'.$$

Et alors, en ayant égard aux présentes valeurs (470) et (470)' des coefficients respectifs $A_1, A_2, \dots, A_n$, et $B_1, B_2, \dots, B_n$, on reconnaitra que les

congruences générales $(137)''$ et $(139)'$ se réduisent, pour le cas où le résidu $a \equiv 1$, aux présentes congruences spéciales (463) et (464).

Ainsi, tout en ne nous proposant d'abord que de faire connaître, par anticipation sur notre susdit traité complet de la Théorie des Nombres, les seuls principes $(137)''$ et $(139)'$ de la présente multiplicité en question des racines dans les congruences fondamentales (14) du premier ordre, nous avons progressivement, et toujours contre notre première intention, développé tellement toutes les grandes questions de cette difficile Théorie, que nous pouvons maintenant les considérer déjà comme étant résolues complètement. Aussi, par suite de ces solutions, et sans attendre des développements ultérieurs, la réforme de la Théorie des Nombres peut, dès aujourd'hui, ce nous semble, être considérée comme entièrement accomplie, du moins dans ses principes et dans ses lois générales.

Mais, cet accomplissement actuel de la réforme de la Théorie des Nombres nous a grandement éloigné du véritable objet de l'ouvrage présent, spécialement de la seconde partie de la philosophie des Mathématiques, c'est-à-dire, de la réforme de l'Algorithmie, nommément de sa Métaphysique, dans laquelle, après y avoir accompli sa tâche SECONDAIRE, celle de fixer les SIX CARACTÈRES DISTINCTIFS des diverses parties constitutives de la science, de ces parties constitutives telles que les avait d'abord fait connaître son Architectonique, nous avons même accompli déjà le TÂCHE PRINCIPALE de cette Métaphysique, en y rattachant cette réalité spéciale qui, sous les six aspects caractéristiques que nous venons de rappeler, doit être établie dans les parties architectoniques de l'Algorithmie, de cette branche principale des Mathématiques, en la rattachant, disons-nous, à la réalité universelle du système entier de cette grande science. Nous y avons conséquemment découvert l'existence nécessaire de TROIS LOIS ABSOLUES qui, en rattachant ainsi effectivement toute la science à sa réalité universelle, en régissent toutes les parties constitutives, avoir, 1° la LOI SUPRÊME, de laquelle dérivent toutes les lois fondamentales des diverses parties de l'Algorithmie qui concernent la génération ou la constitution des quantités; 2° le PROBLÈME UNIVERSEL, qui embrasse toutes les solutions problématiques dans celles des diverses parties de l'Algorithmie qui concernent la relation ou la comparaison des quantités; enfin 3° le PRINCIPA TILLOLOGIQUE, qui détermine la finalité contingente des nombres, laquelle, dans toute l'Algorithmie, a lieu entre les éléments hétérogènes des quantités.

Ainsi, pour compléter la philosophie des Mathématiques, telle que, comme constituant la réforme de l'Algorithmie, nous l'avions produite dans nos ouvrages mathématiques, où nous avons déjà fait connaître les deux premières de ces trois lois absolues de la science, il ne nous restait, dans l'ouvrage présent, qu'à faire connaître également la troisième de ces lois, le Principe

téléologique, qui constitue la loi fondamentale de la Théorie des Nombres. Toutefois, nous devons y joindre quelques applications de cette dernière loi fondamentale, pour faire apprécier sa singularité téléologique, par laquelle elle se distingue essentiellement de toutes les autres lois de l'Algorithmie, comme nous l'avons fait remarquer en donnant actuellement la déduction philosophique de cette loi extraordinaire. Mais, entraîné dans ces applications, avec lesquelles nous nous proposons d'abord de ne pas dépasser les limites convenables de cet ouvrage, ainsi que nous le disions à chaque fois, nous avons tellement développé ces diverses questions qu'il en est résulté progressivement la solution de tous les grands problèmes de la Théorie des Nombres, au point que, lors même que notre huitième ouvrage ne devrait plus paraître, par suite de la crainte que nous en avons déjà manifestée plusieurs fois, la réforme de la Théorie des Nombres, de cette branche qui demeurerait pour ainsi dire inabordable dans les Mathématiques, se trouverait déjà, comme nous venons de le remarquer, accomplie réellement dans l'ouvrage présent.

Or, pour en revenir maintenant à la Métaphysique de l'Algorithmie, au point où nous l'avons laissée plus haut, lorsque nous avons abordé cette grande digression concernant la Théorie des Nombres, résumons ici tout ce que nous avons reconnu concernant les trois lois absolues des Mathématiques, telles que nous les avons déduites et fixées dans l'ouvrage présent. Nous trouverons ainsi que ces trois lois, ces bases premières et immuables des sciences mathématiques, établissent ouvertement les trois distinctions caractéristiques auxquelles, comme constituant sa trichotomie philosophique, se réduit toute l'Algorithmie, savoir . . . (472)

1^{re} La loi suprême et son application répondent à la question principale :

En quoi consistent les Mathématiques et spécialement l'Algorithmie, à laquelle se réduisent ces sciences ?

2^e Le problème universel et sa solution répondent à la question accessoire :

N'y aurait-il pas moyen d'embrasser, par un seul problème, tous les problèmes des Mathématiques, et de résoudre généralement ce problème universel ?

3^e Enfin, le principe téléologique et ses conséquences répondent à la question spéciale :

Quel est l'accroissement vital, ou la singularité téléologique dans les mathématiques, provenant de la concordance entre les éléments hétérogènes des quantités ?

Déjà, dans le premier tome de la Philosophie de la Technique, nous avons fixé les deux premiers de ces trois points; de sorte qu'en y joignant ce que nous venons d'établir, dans l'ouvrage présent, concernant le troisième de ces points, nous aurons définitivement les trois grandes considérations qui, étant introduites dans l'Algorithmie, constituent la réforme que, par l'application

de la LOI DE CRÉATION, nous avons opérée effectivement dans les Mathématiques, pour servir d'exemple et même, par suite de la règle universelle que forme ainsi la loi de création, pour servir de prototype à la réforme pareille qui dorénavant doit être opérée dans toutes les sciences et généralement dans le savoir humain tout entier.

En effet, suivant la déduction que plus haut nous avons présentée pour tout système de réalités, conformément à la loi de création, on conçoit que, dans chaque système constituant l'objet d'une science, les diverses considérations possibles se réduisent aux trois considérations fondamentales dont il s'agit, à celles dont les points de vue respectifs forment les trois bases de ce système de réalités. Ainsi, dans chaque science, il faudra, comme nous l'avons fait pour les Mathématiques, découvrir ces trois points de vue dominants, la loi suprême, le problème universel et le principe téléologique, sous lesquels il faudra ranger toutes les considérations possibles de la science. Et c'est là proprement en quoi consistera la RÉFORME DES SCIENCES dont il est question, telle qu'elle devient nécessaire sous l'aspect nouveau de la RÉALITÉ DE L'ABSOLU, et telle que nous l'avons déjà opérée effectivement dans les Mathématiques.

Cette triple considération de la réalité absolue, qui dorénavant fera l'objet principal de toutes les recherches scientifiques, et qui par conséquent sera le point de mire du savoir humain, formera, pour ainsi dire, le signe de ralliement pour l'humanité dans la première période de l'ère de l'absolu, c'est-à-dire, dans la sixième période historique, où dominera cette réalité fondamentale qui nous fixera, pour but suprême de toutes nos actions, la RECHERCHE DE LA VÉRITÉ. (Voyez les *Prolegomènes du Messianisme* et la Philosophie de l'Histoire dans la *Métapolitique messianique*.) C'est pourquoi, dès aujourd'hui, nous pouvons adopter, pour devise de la nouvelle période, cette triple considération scientifique, que nous nous rendrons sensible par les formules mathématiques qui l'ont déjà réalisée dans cette première et la plus grande des sciences. Nous aurons ainsi, comme nous en avons déjà prévenu dans les *Prolegomènes du Messianisme*, pour le caractère de la nouvelle période, la devise sublime . . . (473)

LEX SUPREMA

$$Fx = A_0.\Omega + A_1.\Omega + A_2.\Omega + A_3.\Omega + \text{etc.}$$

τάσις

$$x^n \equiv a, \quad (\text{mod.} = M).$$

PROBLEMA UNIVERSALE

$$0 = fx + x_1.f_1x + x_2.f_2x + x_3.f_3x + \text{etc.}$$

Tel sera en effet le caractère universel de la marche du savoir humain dans

la première période de la création propre ou absolue de l'humanité, dans la susdite sixième période historique, non-seulement pour les sciences, mais même pour la philosophie ou pour la recherche de la vérité absolue, formant le but suprême de cette nouvelle période, comme nous le verrons à la fin de cette réforme des Mathématiques.

Pour compléter la présente Métaphysique de l'Algorithmie, telle que nous venons de la développer dans ses deux parties constitutives, savoir, dans sa partie secondaire, qui nous a fait connaître les six caractères distinctifs des diverses branches architectoniques de cette science, et dans sa partie principale, qui nous a fait connaître les trois lois absolues de l'Algorithmie, et par conséquent les trois lois fondamentales des Mathématiques, nous devons joindre ici, à la dernière de ces lois, que nous venons d'appliquer à la réforme de la Théorie des Nombres, les deux premières de ces grandes lois, nommément la Loi suprême et le Problème-universel, que nous avons déjà produites dans nos ouvrages précédents et sur lesquelles se fonde principalement la présente réforme générale des Mathématiques. Nous le ferons surtout en faveur de ceux des lecteurs qui ne pourront se procurer nos autres ouvrages, lesquels, comme on le sait, ont été détruits en France. Et nous le ferons généralement pour tous les lecteurs, afin qu'ils puissent trouver, dans le même ouvrage présent, toutes ces grandes lois fondamentales desquelles nous déduirons, dans la troisième partie de cette philosophie des Mathématiques, nommément dans la Méthodologie de l'Algorithmie, les finales et décisives méthodes par lesquelles cette science devra être accomplie dans sa nouvelle et dernière période. — Mais, pour ne rien innover à cet égard, nous reproduirons ici ces deux grandes lois, telles qu'elles ont été produites dans nos ouvrages antérieurs, et par conséquent telles que, depuis trente ans, elles ont été données au monde sans que les illustres académiciens de Paris, parmi lesquels elles ont été publiées, ni même, à ce qu'assurent ces savants académiciens, sans que les autres géomètres, nos contemporains, s'en soient aperçus.

A l'instant où nous livrons à l'imprimerie le manuscrit de cette suite de l'ouvrage, un obstacle nouveau, surtout un obstacle insurmontable pour l'auteur, nous empêche de reproduire ici, comme nous venons de nous le proposer, les deux premières lois fondamentales des Mathématiques, pour compléter la présente Métaphysique de l'Algorithmie. Heureusement, ces deux grandes lois se trouvent déjà, comme nous venons de le rappeler, données au monde, depuis trente ans, dans nos ouvrages antérieurs. Et elles s'y trouvent même données ainsi, spécialement dans les deux tomes de la *Philosophie de la Technique*, dans l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, et

dans la *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, avec tous leurs principes, leurs démonstrations, et leurs conséquences, que nous ne saurions reproduire suffisamment dans le volume de l'ouvrage présent. A la vérité, ces ouvrages entiers ont été détruits en France. Mais, il en existe encore quelques exemplaires entre les mains des savants ; et alors, si la Providence veut que ces hautes vérités soient connues des hommes, le monde savant saura bien lui-même reproduire ces ouvrages, sans que, à son âge, où il doit employer ailleurs les moments qui lui restent, l'auteur soit forcé de lutter contre les obstacles qui s'opposent à cette reproduction actuelle, même dans le résumé succinct où nous devons le faire ici. — Ce qu'il y a peut-être à regretter, c'est que, comme nous venons de le dire, nous devons, dans la troisième partie de la présente philosophie des Mathématiques, nommément, dans la Méthodologie de l'Algorithmie, déduire, de ces grandes lois fondamentales dont il s'agit, les méthodes finales par lesquelles, dans la nouvelle période des mathématiques, ces sciences pouvaient et devaient être accomplies par la solution de tous leurs grands problèmes. Nous tâcherons d'y suppléer, autant qu'il nous sera possible dans l'espace qui nous reste dans cet ouvrage, en rappelant et complétant ces nouvelles et définitives méthodes, telles que, d'après ce que nous en avons dit dans le Programme précédent, elles ont déjà été produites également dans nos ouvrages, et en y joignant, s'il en vons survient pas quelque nouvel obstacle, la méthode primordiale qui, d'après le même Programme, doit ouvrir la nouvelle période des mathématiques, en servant de transition de la génération technique des quantités, qui est la limite actuelle de la science, à leur génération théorique ou absolue, qui sera l'objet illimité et définitif de sa nouvelle et finale période. — Procédons ainsi à cette Méthodologie de l'Algorithmie, en la déduisant de la philosophie générale des sciences, dont nous signalons la réforme par l'actuelle et indispensable application de la LOI DE CRÉATION, en vue de leur établissement définitif sous l'aspect de la réalité absolue du monde.

Jusqu'ici, dans la déduction de la présente philosophie des sciences, telle qu'elle est régie par la loi de création, nous n'en avons examiné que les deux premières parties, savoir, l'Architectonique et la Métaphysique. — Pour compléter l'établissement de cette philosophie créatrice qui, dès aujourd'hui, doit présider à la réforme des sciences, à cette réforme dont il est ici question, il nous reste encore à examiner sa troisième partie, c'est-à-dire, la Méthodologie.

Suivant la détermination que nous avons obtenue plus haut pour les objets respectifs de ces trois parties de la philosophie des sciences, la Méthodologie a pour but la détermination des divers modes intellectuels par lesquels nous

parvenons aux connaissances formant un système scientifique. — Or, quelque importante que soit, pour l'achèvement des sciences, la détermination exacte de ces modes intellectuels ou de leurs méthodes respectives, on conçoit que, pour ce qui concerne la partie théorique d'une science, c'est-à-dire, ce qui est individuellement et indépendamment de notre savoir, la plus ou moins grande perfection des méthodes ne saurait ici influer qu'accessoirement sur la plus ou moins grande promptitude dans l'acquisition de ces connaissances. Mais, il en est tout autrement pour ce qui concerne la partie technique d'une science, c'est-à-dire, pour ce qui concerne l'universalité dans ce système scientifique, universalité qui, par conséquent, est opérée par l'influence de notre savoir. Ici, la plus ou moins grande perfection, dans la marche de notre savoir, influe nécessairement sur la plus ou moins grande perfection de nos connaissances techniques, lesquelles, comme nous venons de le remarquer, sont des produits de notre propre savoir. Il en résulte, pour cette seconde partie des sciences, pour celle qui dépend ainsi exclusivement de notre savoir créateur, non-seulement la nécessité de la détermination exacte des divers procédés techniques, mais de plus, pour diriger la nouvelle marche de notre savoir, telle que nous l'avons caractérisée par la devise précédente, la nécessité de méthodes absolues qui soient propres à réaliser, dans chaque système scientifique, l'universalité absolue qui est contenue dans la Loi suprême et dans le Problème-universel de cette science.

Quant au Principe téléologique qui fait également partie de la précédente devise messianique, nous avons reconnu, d'abord, dans la déduction philosophique de ce principe spécial, et ensuite, dans la réforme de la Théorie des Nombres, opérée par ce principe singulier, que la FINALITÉ qui, dans tout système de réalités, a lieu entre les éléments hétérogènes de ce système, et qui, comme telle, forme l'objet du Principe téléologique dont il est question, est purement contingente et ne porte ainsi que sur l'individualité, et nullement sur l'universalité des objets qui constituent un tel système de réalités. Il ne saurait donc pas y avoir une méthode absolue, c'est-à-dire, une méthode ayant le caractère de nécessité, qui puisse servir à réaliser la finalité formant l'objet du Principe téléologique. Il ne peut y avoir, tout au plus, qu'une méthode contingente qui serve ainsi à fixer les limites aux cas singuliers dans lesquels, pour différentes conditions problématiques, peut se réaliser la finalité qui est l'objet de tels problèmes téléologiques dans tout système de réalités. Et telle est effectivement, dans notre précédente Théorie des Nombres, la méthode téléologique que forment nos lois générales (308) et (310), comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut.

Il n'existe donc, dans tout système de réalités, et par conséquent dans tout système scientifique, de véritables méthodes absolues que pour réaliser l'universalité qui, dans ce système scientifique, se trouve établie, d'abord, pour

le contenu ou pour la génération de telles réalités, par leur Loi suprême, et ensuite, pour la forme ou pour la relation de ces mêmes réalités, par leur Problème-universel. — Mais, afin de bien concevoir la nécessité de telles méthodes absolues, dans toutes les sciences, il faut nous rappeler ici la déduction que, plus haut, nous avons présentée de cette partie spéciale de chaque science que nous nommons *taçenis*; et surtout, il faut nous rappeler que, dans cette partie, notre savoir n'est pas purement cognitif ou spéculatif (*axiomatic*), mais de plus actif ou productif (*epopteia*). L'universalité, dans chaque système de réalités, devient ainsi notre propre ouvrage; aussi, comme nous l'avons déjà reconnu plus haut, cette universalité est-elle exclusivement, d'abord, l'objet des porismes par lesquels nous cherchons à rattacher la génération des réalités à leur principe absolu, et ensuite, l'objet de tous les problèmes par lesquels nous cherchons à fixer la relation des réalités d'après le même principe absolu du système. Et cette double recherche universelle, dans les porismes et dans les problèmes, implique manifestement des buts ou des fins de notre volonté; tandis que l'individualité, qui est l'objet propre des théorèmes, n'est ainsi qu'un simple objet de spéculation. On concevra alors que, pour réaliser, dans tout système scientifique, l'universalité absolue qui, pour ce qui concerne la génération des réalités est l'objet de la Loi suprême, et qui, pour ce qui concerne la relation des réalités, est l'objet du Problème-universel de ce système, il faudra nécessairement procéder d'une manière conforme à cette Loi suprême et à ce Problème-universel; et ce sont précisément ces procédés nécessaires qui constituent les deux méthodes absolues dont il est question.

C'est ici le lieu de remarquer et de caractériser ce grand privilège ou plutôt cette sublime puissance par laquelle l'homme complète en quelque sorte la création, en introduisant, dans chaque système de réalités dont est composé le monde, l'universalité qui, donnant aux individus de tout système la réalité suprême de ce même système, rehausse l'intensité de leur existence, ou plutôt leur crée une existence supérieure dont ils sont privés avant l'influence du savoir humain, en ne subsistant, jusqu'alors, que par les conditions, en apparence fortuites, de la loi de création, par ces conditions qui se trouvent, partout et nécessairement, dans les éléments des divers systèmes de réalités composant l'univers. Le plus noble exercice de cette sublime puissance créatrice de l'homme consiste dans la *verba*, par laquelle il réalise, dans le système de son individualité temporelle ou de ses intérêts terrestres, l'universalité de la raison ou de son *bien absolu*. — Ici, cette création ou cette production spontanée du bien est sensible, parce que la présence ou l'existence des intérêts contraires prouve, dans la réalité de notre sentiment, l'absence ou la non-existence du bien absolu avant qu'il soit créé par la *verba*. Mais, cette création spéciale opérée par l'homme, avec laquelle il coopère à l'existence

de l'univers, et qui forme ainsi sa grande destinée, dont il paraît ne s'être pas encore aperçu jusqu'à ce jour, cette création spéciale, disons-nous, pour être moins sensible, n'en est pas moins réelle ni moins manifeste dans tous les autres systèmes de réalités qui coexistent avec lui et rentrent ainsi dans le domaine de son savoir. Tous ces systèmes n'ont point, par eux-mêmes, l'universalité qui rehausse l'existence des individus dont ils se composent, parce que, s'ils l'avaient ainsi, ces individus cesseraient d'être individus : l'homme seul peut surajouter, à leur existence individuelle et en quelque sorte fortuite, une existence universelle qui leur donne une nouvelle réalité, déterminée et supérieure. C'est là, dans cette noble fonction de l'homme, que nous apercevons déjà l'aurore de notre grande destinée ; et cet aperçu, qui suffit pour régénérer l'humanité, n'est encore qu'un des premiers résultats qui se présentent en foule sur la voie nouvelle que nous suivons.

Mais revenons à nos considérations scientifiques. — Nous avons reconnu, pour chaque science, la nécessité de deux méthodes absolues, afin de pouvoir réaliser, dans son système particulier, l'universalité qui, d'une part, dans la génération des réalités, est constituée par la Loi suprême de ce système, et qui, de l'autre part, dans la relation des réalités, est fixée par le Problème-universel de ce même système scientifique. Nous nommerons *méthodes supérieures* la première, et *méthodes secondaires* la deuxième de ces deux méthodes absolues, telles qu'elles se rapportent ainsi respectivement, la première à la Loi suprême, et la seconde au Problème-universel, dans tout système de réalités, constituant l'objet d'une science spéciale. Et suivant cette distinction, nous allons examiner séparément, du moins autant que nous le permet l'espace qui nous reste dans cet ouvrage, chacune de ces deux méthodes absolues.

Or, pour ce qui concerne d'abord la méthode suprême, en observant que la Loi suprême qui la dirige, ne peut s'appliquer qu'aux individus, le véritable but de cette première méthode absolue est, non de détruire l'individualité des objets composant le système, mais au contraire de relever leur existence individuelle en la revêtant d'un caractère universel et propre à fonder, d'une manière supérieure, cette existence purement individuelle. Bien plus, cette méthode suprême doit essentiellement, quoique toujours d'une manière universelle, établir ou plutôt créer, dans toute leur individualité, ceux des objets du même système qui n'y existent pas encore par leur propre individualité, c'est-à-dire, comme objets de la théorie (tels que sont, par exemple, en Algorithmie, les intégrales impossibles à exprimer d'une manière finie), et qui néanmoins sont indispensables, et en très-grand nombre, pour compléter le système, en achevant le développement de son entière réalité. Ainsi, la méthode suprême doit proprement nous conduire, dans chaque système de réalités formant l'objet d'une science, à la connaissance de la génération universelle de tous

les individus de ce système, tant de ceux qui ont déjà une existence individuelle, fortuite ou indépendante de cette détermination universelle, que de ceux qui ne la reçoivent précisément que par une telle génération supérieure. — Cette production et cette reproduction UNIVERSELLES de tous les individus possibles d'un système, font que la méthode suprême, qui nous y conduit, rentre, pour ainsi dire, avec ses moyens et instruments universels ou techniques, dans le domaine des individus ou de la théorie de la science; et c'est pourquoi cette méthode doit proprement, dans chaque science, présenter une génération TRICTORIQUE UNIVERSELLE des objets composant le système scientifique. De cette manière, une nouvelle existence, universelle et par conséquent supérieure, sera créée pour tous les objets individuels dans chaque système de réalités; et cette création, opérée par notre savoir, moyennant des buts ou des fins de notre volonté, formera manifestement, comme terme de la méthode suprême, la couronne de la réforme des sciences de laquelle nous traitons.

Il faut ici bien distinguer la méthode suprême de tous les autres procédés purement techniques. — Cette grande méthode est à la vérité un procédé technique, à cause de l'universalité qu'elle implique éminemment, et qu'elle puise dans l'essence même de la Loi suprême dont elle indique l'application à la création des individus. Mais, précisément par cette CRÉATION RÉELLE DES INDIVIDUS, qui est le véritable et unique but de la méthode suprême, cette méthode, quoique éminemment universelle, se distingue des autres procédés techniques qui, par l'intervention d'un terme de comparaison, ne forment proprement que de purs MODES DE GÉNÉRATION UNIVERSELLE, c'est-à-dire, des modes pour la détermination de l'existence des réalités par rapport à ce terme de comparaison, sans avoir expressément pour objet ou pour but la production ou la création réelle des individus, c'est-à-dire, la constitution de la génération propre des réalités, indépendamment de tout terme de comparaison. Ainsi, par exemple, dans l'Algorithmie, les procédés techniques nommés Séries, dans l'état de leur divergence, qui est leur état le plus fréquent, ne sont que de purs modes de génération universelle, sans création ou production réelle de la quantité individuelle correspondante; et, pour ce qui concerne leur état de convergence, où les Séries présentent effectivement une telle création réelle d'une quantité individuelle, ce n'est là qu'une mesure de la VALEUR des quantités, c'est-à-dire, la détermination de leur existence par rapport à une unité, prise pour terme de comparaison, et non la fixation de leur MATRÉE elle-même. On conçoit ainsi la distinction précise entre les procédés techniques en général, qui sont de purs modes de génération universelle, sans production expresse des individus correspondants, et la méthode suprême en particulier, qui est la génération universelle par excellence, avec production expresse des individus; et de là vient, comme nous l'avons remarqué plus haut, que cette dernière méthode ramène l'universalité dans le

domaine de l'individualité, c'est-à-dire, qu'elle applique en quelque sorte la technique à la théorie même de la science. On conçoit en même temps la distinction précise entre la *génération technique*, qui est purement individuelle, et la *génération technique*, qui est purement universelle, dans la production des objets d'un système scientifique de réalités; et l'on conçoit même une *génération intermédiaire ou neutre*, qui participe de l'une et de l'autre, par l'influence implicite de la méthode suprême, et qui prélude ainsi à la *génération technique* des réalités, constituant l'objet propre de cette grande méthode, et servant, comme nous l'avons déjà remarqué, à couronner la réforme des sciences.

Ici encore, désirant présenter, dans les mathématiques, un modèle de cette nécessaire réforme des sciences, nous avons signalé, vers la fin du second tome de la Philosophie de la Technique, non-seulement la *génération neutre* que nous venons de concevoir à priori, mais de plus la *méthode suprême* elle-même dont nous venons de fixer le terme sublime pour toutes les sciences. Bien plus, vers la fin du premier tome de cette Philosophie de la Technique, nous avons présenté l'application de cette méthode suprême à toutes les questions de la physique mathématique, et spécialement à la mécanique céleste; et nous avons ainsi exposé déjà en détail cette grande méthode.

Dans le Programme qui forme la première partie de l'ouvrage présent, nous avons fait mieux connaître les deux grands problèmes que présente l'application de la Loi suprême à la détermination des méthodes par lesquelles, en employant cette grande loi, on peut résoudre tous les problèmes de la science. Et c'est ainsi que, dans l'Algorithmie dont il y est question, nous avons retrouvé et caractérisé, d'abord, la *méthode suprême* dont il s'agit ici, comme ayant pour objet d'opérer, par un procédé universel et par conséquent technique, la *génération technique* des quantités, c'est-à-dire, la détermination de la nature elle-même de ces quantités, par opposition à leur *génération purement technique*, qui ne sert qu'à la détermination de leur valeur, et ensuite, la *méthode primordiale*, telle qu'elle résulte de la présente méthode suprême, comme ayant pour objet, toujours par un procédé universel, la *génération neutre* des quantités, et surtout leur absolue *génération neutre* qui forme une espèce d'anticipation technique sur la méthode suprême et qui sert ainsi à déterminer, tout à la fois, et la nature et la valeur des quantités. Enfin, dans ce même Programme, nous avons montré ce qu'il reste à faire pour réaliser cette grande méthode suprême, la couronne de la science. — Or, ce qu'il reste ainsi à faire, c'est l'intégration générale des équations aux différences et aux différentielles, de laquelle dépend l'emploi de la méthode suprême; et cette intégration fait partie de la résolution générale des équations quelconques, de cette résolution qui précisément, pour la détermination universelle de la relation des quantités, fait l'objet de la seconde

des deux susdites méthodes absolues, nommément de la MÉTHODE SECONDAIRE, laquelle, à son tour, comme nous l'avons vu plus haut, est fondée sur le Problème-universel, formant la deuxième loi fondamentale des Mathématiques.

Dans la Programme que nous venons de citer et qui forme la première partie de l'ouvrage présent, nous avons bien montré cette application en question du Problème-universel à la solution de tous les genres d'équations. Mais, nous ne l'avons montrée que pour les cas où les équations proposées peuvent immédiatement être rangées sous la forme du Problème-universel, et où, par conséquent, on peut choisir la partie de ces équations qui doit correspondre à la fonction fondamentale fx du Problème-universel, et qui admet la solution immédiate de l'équation auxiliaire $0 = fx$, constituant la condition de ce Problème-universel. Or, ces cas de son application immédiate, qui correspondent à ceux de l'application immédiate de la Loi suprême, tels que cette dernière application a lieu pour l'évaluation des fonctions par les algorithmes techniques, les séries, les fractions continues, etc., sont très-rares et ne se présentent que pour les équations qui, dans toutes sortes de fonctions, ont la forme générale que, par anticipation sur notre résolution générale des équations de tous les genres, qui sera l'objet de notre cinquième ouvrage, nous avons signalée dans la note des pages 280 et 281 du premier tome de la Philosophie de la Technique, et dont les savants parmi lesquels nous avons publié ces travaux, ne se sont pas encore aperçus. Il reste donc à savoir comment le Problème-universel peut s'appliquer généralement à la solution de toutes les formes possibles d'équations; et c'est ce procédé général de l'application du Problème-universel qui constitue proprement la MÉTHODE SECONDAIRE dont il s'agit.

Nous avons déjà, dans nos ouvrages antérieurs, et même dans nos tout premiers ouvrages, fait connaître cette méthode secondaire qui, par l'application du Problème-universel, sert à la solution de tous les genres d'équations. Mais, la stupide hostilité avec laquelle on a accueilli ces ouvrages, nous a imposé, pour châtier ce mépris privilégié de la vérité, une espèce d'obligation de ne signaler de nouveau cette méthode absolue que lorsque, après de longues années, il serait constaté que les savants par brevets sont, comme nous l'avons déjà dit ailleurs, les ennemis nés de la science. C'est ainsi que, même dans le Programme qui forme la première partie de l'ouvrage présent, nous nous sommes abstenus de parler de cette absolue méthode secondaire. Enfin, nous allons rompre ce long silence à cet égard, en nous décidant aujourd'hui, par les susdites raisons majeures qui nous forcent à prendre cette résolution, de donner ici, contre l'annonce que nous en avons faite dans le Programme précédent, et par anticipation sur le deuxième des ouvrages annoncés dans ce Programme, c'est-à-dire, par anticipation sur notre Réforme de la Mécanique céleste, le paragraphe de cet ouvrage qui a pour objet l'Accom-

plissement algorithmique de la Mécanique céleste et qui, comme nous en avons déjà prèveu en partie, contient précisément, d'abord, la détermination finale des deux grandes méthodes absolues que nous venons de reconnaître, savoir, de la MÉTHODE SUPRÊME et de la MÉTHODE SECONDAIRE, par lesquelles, en servant à la solution définitive de tous les problèmes, la science doit être accomplie actuellement, et ensuite, la réalisation initiale de la méthode suprême, à l'aide de l'absolue et universelle génération-neutre des quantités, c'est-à-dire, la MÉTHODE PRIMORDIALE, par laquelle doit être ouverte cette nouvelle période des mathématiques, dans laquelle cette grande science, fondée ainsi sur la philosophie absolue, doit aujourd'hui recevoir son accomplissement final. — Or, ce sont manifestement ces méthodes absolues, destinées ainsi à accomplir les sciences mathématiques, qui sont l'objet principal de notre réforme de ces sciences; et c'est pourquoi, en cédant aux raisons qui nous forcent de terminer ici l'ouvrage présent, et qui peut-être nous empêcheront de produire nos ouvrages ultérieurs, nous nous empressons d'extraire, de notre Réforme de la Mécanique céleste, le susdit paragraphe, et de le donner ici pour servir, dès aujourd'hui, à compléter, autant qu'il dépend de nous, cette inattendue réforme des mathématiques, en produisant, dans leur précise et rigoureuse détermination, ces grandes méthodes par lesquelles tous les problèmes pourront être résolus définitivement. Bien plus, nous reproduirons ici ce décisif paragraphe dans sa propre forme, avec son application immédiate à la Mécanique céleste, parce que, en y joignant les lois dynamiques que, pour cette haute Mécanique, nous avons données, pas anticipation, dans nos *Prolégomènes du Messianisme*, on aura ainsi complètement toutes les conditions de la Réforme de la Mécanique céleste; au point que, lors même que ne devrait plus persister notre deuxième ouvrage, annoncée dans la Programme, cette grande réforme de la Mécanique céleste se trouverait, dès aujourd'hui, de moins dans ses conditions fondamentales, accomplie également.

Pour terminer la présente Méthodologie des Mathématiques, il nous reste à dire quelques mots concernant les méthodes purement théoriques que nous avons signalées au commencement de cette Méthodologie, en y indiquant leur moindre influence sur la perfection des connaissances auxquelles elles doivent conduire. — Or, pour ce qui concerne ces méthodes théoriques, autant qu'il nous est permis d'en dire ici, nous devons, en distinguant les principales parmi ces diverses méthodes mathématiques, faire remarquer et faire approfondir la classification et la déduction de toutes les méthodes infinitésimales que nous avons produites dans notre *Philosophie de l'Infini*, classification et déduction par lesquelles la philosophie absolue est parvenue à dissiper les ténèbres dans lesquelles se trouvait la science, et à débrouiller ainsi ce chaos d'opinions monstrueuses que les géomètres se formaient sur la question principale de

leur science, sur l'idée de l'INFINI. — Mais, hâtons-nous d'aborder, par l'extrait susdit, les méthodes absolues des mathématiques.

ACCOMPLISSEMENT ALGORITHMIQUE DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE, CONTEXANT, POUR LA SOLUTION DÉFINITIVE DE TOUS LES PROBLÈMES, LES MÉTHODES ABSOLUES DES MATHÉMATIQUES.

(Extrait de la Réforme de la Mécanique céleste.)

La perfection définitive de la nouvelle mécanique céleste, eutant du moins qu'elle peut le comporter dans l'état actuel de nos connaissances astronomiques, et qu'elle peut déjà garantir ses résultats contre toute erreur possible, même pour des époques les plus éloignées de l'époque actuelle, dépend d'abord, dans cet état actuel de l'astronomie, de l'application de la méthode primordiale, de cette anticipation technique et provisoirement suffisante sur la méthode suprême, pour opérer, dans toute son extension nécessaire, le développement des lois dynamiques et absolues qui, telles qu'elles sont produites dans les Prolégomènes du Messianisme, constituent l'essence de cette nouvelle mécanique céleste. Nous allons donc, dans le paragraphe présent, qui y est destiné, faire connaître, d'abord, cette méthode primordiale de l'algorithme, et par conséquent de toutes les mathématiques, qui, comme nous l'avons déjà dit, doit ouvrir la nouvelle période historique des mathématiques, et ensuite, pour compléter la science, nous y ferons connaître les deux autres méthodes absolues, nommément les deux méthodes fondamentales, la méthode suprême et la méthode secondaire, par lesquelles doit être accomplie la réforme des mathématiques.

Mais, pour exposer ces méthodes supérieures, avec leurs démonstrations complètes, nous sommes obligés de nous reporter ici à notre Philosophie de la Technique algorithmique; et alors, partant de la fin de la deuxième section (*) de cette philosophie, où, sous les marques (556) et (556'), nous avons signalé et caractérisé la première de ces méthodes, c'est-à-dire, la méthode primordiale, comme constituant la *SAISONNATION-NAUTRE ABSOLUE* des quantités, nous sommes forcés, pour cette complète exposition, de produire ici le commencement de la troisième section de la même Philosophie de la Technique, de cette troisième section qui, par les obstacles que l'on a opposés à l'auteur depuis treize ans, n'a pu être publiée jusqu'à ce jour, et dans laquelle précisément devait être donnée cette décisive méthode primordiale, comme mé-

(*) La première et la deuxième sections de notre Philosophie de la Technique forment respectivement le premier et le deuxième tomes de cette Philosophie, et pareillement les sections suivantes devaient former autant de tomes distincts. Ainsi, quand nous parlerons ici de ces différentes sections de notre Philosophie de la Technique algorithmique, c'est à ses tomes correspondants, tels que nous les avons cités dans l'ouvrage présent, qu'il faudra rapporter cette indication.

thode universelle pour la solution algorithmique de tous les problèmes des mathématiques. Et alors, pour ne pas répéter ici inutilement ce qui déjà a été publié, nous devons supposer que le lecteur a sous les yeux les deux premières sections de notre Philosophie de la Technique algorithmique (*), et surtout qu'il a déjà étudié et approfondi cette nouvelle branche des mathématiques. Aussi, continuerons-nous, dans le présent paragraphe, de numérotter les formules dans l'ordre où nous l'avons fait dans les deux sections dont il s'agit, et où la dernière formule porte la marque (55g)''.

Or, en partant de notre loi suprême (137), savoir . . . (56o)

$$Fx = \Lambda_0.\Omega_0 + \Lambda_1.\Omega_1 + \Lambda_2.\Omega_2 + \Lambda_3.\Omega_3 + \text{etc.}, \text{ etc.};$$

si l'on donne progressivement, aux fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \text{etc.}$, les déterminations spéciales qui produisent la GÉNÉRATION-RECTE ARBORESCENTE (**) des quantités, c'est-à-dire, les déterminations . . . (561)

$$\Omega_0 = 1,$$

$$\Omega_1 = \frac{x - a_1}{n_1 + x},$$

$$\Omega_2 = \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(n_1 + x)(n_2 + x)},$$

etc., et généralement, pour un indice quelconque p , . . . (561')

$$\Omega_p = \frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_p)}{(n_1 + x)(n_2 + x)(n_3 + x) \dots (n_p + x)};$$

dans lesquelles les quantités $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$, sont arbitraires, et dans lesquelles surtout les quantités $n_1, n_2, n_3, \text{etc.}$, sont encore indéterminées; et si l'on détermine ces dernières quantités d'après les procédés de notre méthode suprême, tels qu'ils se trouvent exposés sous les marques (142), (143), etc., dans la première section de la Philosophie de la Technique, on obtiendra les résultats décisifs que nous allons faire connaître.

Avant tout, remarquons que, par cette détermination (561) des fonctions génératrices Ω dans la loi suprême (56o), nous réalisons notre *série-commune universelle* (498), savoir . . . (562)

$$Fx = \Lambda_0 + \Lambda_1 \cdot \frac{x - a_1}{n_1 + 1} + \Lambda_2 \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(n_1 + x)(n_2 + x)} + \\ + \Lambda_3 \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}{(n_1 + x)(n_2 + x)(n_3 + x)} + \text{etc.}, \text{ etc.};$$

(*) Le lecteur demandera peut-être où il pourra trouver ces ouvrages? — Nous sommes obligés, pour lui répondre, de l'adresser aux illustres académiciens de Paris, pour leur demander ce qu'ils ont fait de ces ouvrages qui ont été publiés en France et qui n'y existent plus.

(**) Pour l'intelligence de la portée de cette expression, voyez, dans la 1^{re} section de la Philosophie de la Technique, la note qui y est en bas des pages 613 et 614.

qui, par les réductions (499), conduit, sous la marque (500), à la découverte de la GÉNÉRATION-NEUTRE des quantités, comme nous l'expliquons, à la suite de cette Int (500), dans tout le reste de cette seconde section de la Philosophie de la Technie, où, pour signaler la génération-neutre absolue dont il est ici question, nous avons développé, sous les marques finales (556) et (556)', avec les éléments indéterminés n_1, n_2, n_3 , etc., les premiers progrès de la génération-neutre considérée en général, savoir . . . (563)

$$Fx = Fa + \frac{\lambda_1 \cdot (n_1 + a)(x - a)}{n_1 + x} + (\mathbb{Z})_1;$$

$$Fx = Fa + \frac{\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot [(n_1 + x)(n_2 + x) - (x - a)^2] \\ + \lambda_2 \cdot (n_1 + a)(n_2 + a)(x - a) \end{array} \right\} \cdot (x - a)}{(n_1 + x)(n_2 + x)} + (\mathbb{Z})_2;$$

$$Fx = \text{etc., etc.};$$

en formant les quantités auxiliaires . . . (563')

$$\lambda_1 = \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{dFa}{da} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{1,2} \cdot \left(\frac{d^2Fa}{da^2} \right), \text{ etc., etc.};$$

et en marquant par $(\mathbb{Z})_1, (\mathbb{Z})_2$, etc., les séries complémentaires. Et pour ce qui concerne les progrès absolus de cette génération, progrès qu'il nous reste à découvrir, voici ce que nous y disons (pages 630 à 633), et ce que nous recommandons ici essentiellement aux géomètres de bien méditer pour se former une idée de l'actuel avenir de leur science.

On voit ici, et on le conçoit même généralement à priori, que, quelle que soit l'espèce particulière des progrès consécutifs de la génération-neutre d'une fonction, provenant d'un système spécial des quantités n_1, n_2, n_3 , etc., cette espèce ne sera toujours qu'un cas particulier des expressions générales (556) ou (563), correspondant à ces valeurs spéciales des éléments indéterminés et arbitraires n_1, n_2, n_3 , etc., qui entrent dans ces expressions générales et originellement dans la série-commune universelle (498) ou (562). Et par conséquent, on conçoit de plus, également à priori, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, qu'il peut exister une infinité d'espèces particulières de ces progrès de la génération-neutre des quantités, correspondantes à l'infinité des déterminations différentes que peuvent recevoir les éléments arbitraires n_1, n_2, n_3 , etc., dans les expressions générales (556) ou (563). — Mais, parmi ces diverses espèces, les unes doivent s'approcher plus que les autres de la véritable nature de la fonction engendrée, suivant que leurs différentielles consécutives, qui, comme nous le savons déjà, sont les véritables criteriums algorithmiques, s'approchent toutes plus ou moins des différentielles consécutives de la fonction en question; et l'on conçoit enfin que, parmi ces diverses espèces de progrès de la génération-neutre des quantités, il doit y en

avoir une qui, pour chaque fonction, s'approche le plus de la véritable nature de cette fonction engendrée. C'est cette espèce supérieure de progrès de la génération-neutre de toute fonction, en tant qu'elle fixe la nature elle-même de la fonction, qui constitue manifestement les progrès absolus de cette génération; et toutes les autres espèces, telle que l'est, par exemple, celle (516) ou (521)' que donnent les fractions continues, et qui à la vérité s'approche à certains égards de l'espèce absolue, par les raisons que nous déduirons ailleurs, mais qui n'est point cette espèce absolue en question, parce qu'elle suit encore les lois de la génération technique, et non déjà les lois de la génération théorique elle-même des fonctions, toutes ces autres espèces, disons-nous, ne forment que des progrès relatifs de la génération-neutre des quantités. »

« On conçoit actuellement que la détermination de ces progrès absolus de la génération-neutre de toute fonction, avec lesquels, comme nous l'avons déjà annoncé, on peut parvenir jusqu'à la génération théorique ou à la nature elle-même des fonctions algorithmiques, et atteindre ainsi au dernier but de la science, dépend manifestement de la détermination absolue des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., qui entrent dans les expressions générales (556) ou (563) des progrès de cette génération-neutre, et originellement dans la série-commune universelle (498) ou (562) qui nous a conduits à ce point de vue supérieur des spéculations algorithmiques. — C'est donc cette détermination absolue des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., qu'il faudra connaître généralement, pour pouvoir s'approcher du terme de la science; et c'est aussi cette détermination absolue et le procédé de parvenir, avec une telle génération-neutre absolue, à la génération théorique ou à la nature même de toute fonction, proposée d'une manière quelconque, que nous allons donner aux géomètres, comme dernier fruit de notre Philosophie des Mathématiques. »

« Mais, pour arriver à la détermination absolue dont il est question, il faudra suivre une marche ou une méthode tout à fait nouvelle, qui puisse toujours conduire, directement ou indirectement, à la connaissance de la nature théorique elle-même des fonctions; et c'est pourquoi cette absolue et dernière détermination algorithmique se trouve déjà placée au delà de la sphère de la technique, qui n'a pour objet que la détermination de la valeur et non de la nature elle-même des quantités. — Observons enfin que cette marche ou méthode nouvelle, qu'il faudra suivre pour arriver à la détermination absolue des quantités, et qui constitue manifestement l'Idéal des Mathématiques, est complètement inconnue dans l'état actuel de la science, où l'on n'en trouve même pas encore le simple problème. Et par conséquent, considérons, dès à présent, cette marche ou méthode suprême comme une réforme nécessaire de la science. — Quant à la nature de cette méthode, les géomètres auront sans doute déjà pressenti que le procédé, exposé sous les marques (142),

(143), . . . (146) à la fin de la première section de la Philosophie de la Technie, qui présente l'application immédiate de notre loi suprême, et qui s'y trouve qualifié simplement du nom de loi fondamentale de l'application universelle des mathématiques à la physique, que ce procédé, disons-nous, constitue en principe cette *méthode suprême* qui doit opérer, d'une manière complète, cette réforme définitive de la science dont nous venons de reconnaître la nécessité. Aussi, dès aujourd'hui, donnons-nous aux géomètres à venir, pour gage de la confiance qu'ils devront avoir dans notre Philosophie des Mathématiques, la nécessité future et inévitable de ramener toutes leurs recherches à cette grande méthode (142), (143), etc., qui présente l'application immédiate de notre loi suprême des mathématiques, et qui, par son application actuelle à la série-commune universelle (498) ou (562), va nous faire découvrir la génération-neutre absolue des quantités, c'est-à-dire, la méthode primordiale ou universelle dont il est ici question. — La voici.

En faisant encore abstraction de notre présente série-commune universelle (562), qui doit ici nous servir d'instrument technique pour arriver progressivement à la détermination théorique de toute fonction, c'est-à-dire, à la détermination de sa nature elle-même, par la détermination progressive et indéfinie des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., considérons d'abord généralement la loi suprême elle-même (560), et bornons-nous à la présente forme générale (561) de ses fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., dans leur état d'indétermination provenant des éléments indéfinis n_1, n_2, n_3 , etc., pour pouvoir, en suivant les procédés (142), (143), etc., de notre méthode suprême, parvenir, pour chaque fonction problématique Fx , à la détermination progressive de ces éléments n_1, n_2, n_3 , etc., de manière à ce que cette génération par la loi suprême (560), à l'aide des fonctions génératrices (561), puisse nous conduire progressivement et indéfiniment, avec une exactitude à volonté, à la détermination théorique de cette fonction problématique Fx , c'est-à-dire, comme nous venons de le dire, à la détermination de la nature elle-même de cette fonction.

Pour cela, en supposant toujours que le lecteur a approfondi notre Philosophie de la Technie, telle qu'elle est déjà produite dans ses deux premières sections, et par conséquent qu'il connaît nos fonctions *scimus*, qui entrent dans la construction de la loi suprême, nous pouvons ici établir, d'après les équations (143)', (144)', (145)', etc., que, pour la détermination progressive en question des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., et notamment pour la détermination successive du premier n_1 , des deux premiers n_1 et n_2 , des trois premiers n_1, n_2 et n_3 , etc., et ainsi de suite, nous aurons successivement les équations . . . (564)

$$(143)'' \dots 0 = \mathcal{W}[d^{\nu_1}\Omega_1, d^{\nu_2}Fx],$$

$$(144)'' \dots 0 = \mathcal{W}[d^{\nu_1}\Omega_1, d^{\nu_2}\Omega_2, d^{\nu_3}Fx],$$

$$(145)'' \dots 0 = \mathcal{W}[d^{\nu_1}\Omega_1, d^{\nu_2}\Omega_2, d^{\nu_3}\Omega_3, d^{\nu_4}Fx],$$

etc., etc.;

en donnant ici aux exposants ν_1, ν_2, ν_3 , etc., desquels dépendent les permutations dans ces fonctions schins, les valeurs . . . (564)

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = 3, \quad \nu_4 = 4, \text{ etc. ;}$$

et en considérant que les fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., ont ici la forme (561), et que la fonction problématique Fx est une fonction quelconque, dont les différentielles, comme critères algorithmiques de cette fonction, sont toujours et nécessairement données, d'une manière immédiate ou du moins médiate, par le problème même, quel qu'il soit, où il s'agit de découvrir cette fonction Fx . — Ainsi, pour pouvoir, à l'aide de ces équations successives (564), déterminer progressivement les éléments n_1, n_2, n_3 , etc., en question, il faut, avant tout, développer les fonctions schins qui forment ces équations (564), et déterminer les différentielles des fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., qui en sont des parties constituantes. — Nous allons le faire.

Considérant d'abord, dans les expressions (561) des fonctions génératrices Ω , leur facteur élémentaire . . . (565)

$$\frac{x-a}{n+x} = (x-a) \cdot (n+x)^{-1},$$

et appliquant à ce facteur la loi fondamentale du calcul différentiel (*Philos. des Mathém. (I)*, page 44), on obtiendra facilement, pour ses différentielles d'un ordre quelconque μ , l'expression générale . . . (565')

$$\frac{d^\mu \left(\frac{x-a}{n+x} \right)}{dx^\mu} = (-1)^{\mu-1} \cdot 1^{\mu-1} \cdot \frac{n+a}{(n+x)^{1+\mu}},$$

pour tout exposant μ , depuis $\mu = 1$ inclusivement. Et en vertu de ce que nous nommons polynôme des différentielles (*Philos. des Mathém. (o)* page 46), formant une des circonstances immédiates de la loi fondamentale que nous venons d'appliquer, on aura, pour les différentielles d'un ordre quelconque s d'une fonction génératrice quelconque Ω_u , l'expression générale . . . (566)

$$\begin{aligned} d^s \Omega_u &= d^s \left\{ \frac{x-a_1}{n_1+x} \cdot \frac{x-a_2}{n_2+x} \cdot \frac{x-a_3}{n_3+x} \dots \frac{x-a_u}{n_u+x} \right\} = \\ &= 1^{s!} \cdot d^s_{\text{alg.}^{(s)}} \left\{ \frac{d^{s_1} \left(\frac{x-a_1}{n_1+x} \right) \cdot d^{s_2} \left(\frac{x-a_2}{n_2+x} \right) \cdot d^{s_3} \left(\frac{x-a_3}{n_3+x} \right) \dots d^{s_u} \left(\frac{x-a_u}{n_u+x} \right)}{1^{s_1!} \cdot 1^{s_2!} \cdot 1^{s_3!} \dots 1^{s_u!}} \right\}; \end{aligned}$$

la caractéristique $Aggr^{(s)}$ dénotant l'agrégat des termes qui correspondent aux valeurs entières, y compris zéro, des indices $q_1, q_2, q_3, \dots, q_u$, déterminées par l'équation . . . (566)

$$s = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_u.$$

Ainsi, en substituant dans cet agrégat (566) les valeurs (565)' des différentielles du facteur élémentaire (565), on obtiendra, pour les différentielles $d^s \Omega_u$, l'expression définitive . . . (567)

$$\begin{aligned} d^s \Omega_u &= d^s \left\{ \frac{x-a_1}{n_1+x} \cdot \frac{x-a_2}{n_2+x} \cdot \frac{x-a_3}{n_3+x} \cdot \dots \cdot \frac{x-a_u}{n_u+x} \right\} = \\ &= (-1)^{s-u} \cdot d^s \left\{ \frac{n_1+a_1}{n_1+x} \cdot \frac{n_2+a_2}{n_2+x} \cdot \frac{n_3+a_3}{n_3+x} \cdot \dots \cdot \frac{n_u+a_u}{n_u+x} \right\} \times \\ &\times Aggr^{(s)} \left\{ (n_1+x)^{-q_1} \cdot (n_2+x)^{-q_2} \cdot (n_3+x)^{-q_3} \cdot \dots \cdot (n_u+x)^{-q_u} \right\} \cdot dx^s. \end{aligned}$$

Mais, en observant que l'expression élémentaire (565)' qu'on vient de substituer dans l'expression systématique (566), n'a lieu que depuis l'indice $\mu=1$, et que pour $\mu=0$, elle donne la valeur incomplète . . . (567)

$$- \frac{n+a}{n+x};$$

il faudra, dans l'expression définitive (567), lorsque les indices $q_1, q_2, q_3, \dots, q_u$ sont zéro, introduire les modifications suivantes . . . (567)''

$$\begin{aligned} \frac{a_1-x}{n_1+a_1}, & \quad \text{à la place de } (n_1+x)^{-0} = 1; \\ \frac{a_2-x}{n_2+a_2}, & \quad \text{à la place de } (n_2+x)^{-0} = 1; \\ & \dots \dots \dots \\ \frac{a_u-x}{n_u+a_u}, & \quad \text{à la place de } (n_u+x)^{-0} = 1. \end{aligned}$$

Telle (567) et (567)'' est donc définitivement l'expression générale des différentielles des fonctions génératrices Ω , expression qu'il faut introduire, à la place de ces différentielles, dans les développements des fonctions schins qui forment les équations (564). — Voici les résultats de ces substitutions.

La première des équations (564), en y développant la fonction schin, est . . . (568)

$$0 = d\Omega_1 \cdot d^2 Fx - d^3 \Omega_1 \cdot dFx;$$

et en y substituant les valeurs des différentielles $d\Omega$, et $d^2 \Omega$, telles que les donne l'expression générale (567), savoir . . . (568)'

$$d\Omega_1 = \frac{(n_1+a_1) \cdot dx}{(n_1+x)^2}, \quad \text{et} \quad d^2 \Omega_1 = - \frac{2(n_1+a_1) \cdot dx^2}{(n_1+x)^3},$$

cette première équation sera . . . (568)''

$$0 = \frac{1}{1.2} \cdot \left(\frac{d^2 Fx}{dx^2} \right) \cdot (n_1 + x) + \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{dFx}{dx} \right).$$

Et comme résultant, dans notre méthode suprême (142), (143), etc., de la première équation générale de condition (143)'', la présente équation (568)'' servira à la détermination la plus convenable du premier élément n_1 , lorsque, dans la génération progressive (560) et (561), on s'arrête à la première fonction génératrice Ω_1 .

La seconde de nos présentes équations de condition, (564), en développant la fonction schin par rapport aux différentielles de la fonction inconnue Fx , sera . . . (569)

$$\begin{aligned} n &= d^3 Fx \cdot \Psi[d^{q_1} \Omega_1, d^{q_2} \Omega_2] \\ &- d^3 Fx \cdot \Psi[d^{q_1} \Omega_1, d^{q_3} \Omega_3] \\ &+ d Fx \cdot \Psi[d^{q_1} \Omega_1, d^3 \Omega_3]; \end{aligned}$$

c'est-à-dire . . . (569)'

$$\begin{aligned} n &= d^3 Fx \cdot \left\{ d\Omega_1 \cdot d^2 \Omega_2 - d^2 \Omega_1 \cdot d\Omega_2 \right\} \\ &- d^3 Fx \cdot \left\{ d\Omega_1 \cdot d^3 \Omega_3 - d^3 \Omega_1 \cdot d\Omega_3 \right\} \\ &+ d Fx \cdot \left\{ d^2 \Omega_1 \cdot d^3 \Omega_3 - d^3 \Omega_1 \cdot d^2 \Omega_3 \right\}. \end{aligned}$$

Il faut donc, pour accomplir cette équation par rapport aux éléments n_1 et n_2 , qui sont en question, déterminer d'abord, par le moyen de leur expression générale (567) et (567)'', les différentielles des deux présentes fonctions génératrices Ω_1 et Ω_2 auxquelles on s'arrête ici. Et l'on obtiendra ainsi, pour ces différentielles, les expressions générales . . . (570)

$$\frac{d^q \Omega_1}{dx^q} = (-1)^q \cdot 1^{q_1} \cdot \frac{n_1 + q_1}{n_1 + x} \cdot \frac{1}{(n_1 + x)^{q_1}},$$

$$\frac{d^q \Omega_2}{dx^q} = + (-1)^q \cdot 1^{q_2} \cdot \frac{n_2 + q_2}{n_2 + x} \cdot \frac{n_2 + q_2}{n_2 + x} \cdot \text{Aggr.}^{(2)} \left\{ (n_1 + x)^{-q_1} \cdot (n_2 + x)^{-q_2} \right\};$$

dans lesquelles, nommément dans la dernière, les exposants q_1 et q_2 , formant des nombres entiers, y compris zéro, sont déterminés par l'équation . . . (570)'

$$x = q_1 + q_2;$$

en ne perdant pas de vue que, lorsque ces exposants q_1 ou q_2 sont zéro, il faut introduire les modifications (567)''. Ainsi, en faisant auxiliairement . . . (570)''

$$y_1 = \frac{n_1 + a_1}{n_1 + x}, \quad y_2 = \frac{n_2 + a_2}{n_2 + x}, \quad \text{etc.};$$

les trois premières différentielles de ces fonctions génératrices Ω_1 et Ω_2 , qui entrent dans la présente équation de condition (569)', seront . . . (570)''

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dx} &= + \frac{y_1}{n_1 + x}, & \frac{d^2\Omega_1}{dx^2} &= - \frac{2 \cdot y_1}{(n_1 + x)^2}, & \frac{d^3\Omega_1}{dx^3} &= + \frac{6 \cdot y_1}{(n_1 + x)^3}; \\ \frac{d\Omega_2}{dx} &= - y_2 \cdot y_2 \cdot \left\{ \frac{a_2 - x}{(n_1 + x)(n_2 + a_2)} + \frac{a_1 - x}{(n_2 + x)(n_1 + a_1)} \right\}, \\ \frac{d^2\Omega_2}{dx^2} &= + 2 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \left\{ \frac{a_2 - x}{(n_1 + x)^2 \cdot (n_2 + a_2)} + \frac{1}{(n_2 + x)(n_2 + x)^2} + \frac{a_1 - x}{(n_2 + x)^2 \cdot (n_1 + a_1)} \right\}, \\ \frac{d^3\Omega_2}{dx^3} &= - 6 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \left\{ \frac{a_2 - x}{(n_1 + x)^3 \cdot (n_2 + a_2)} + \frac{1}{(n_2 + x)^3 \cdot (n_2 + x)} + \frac{1}{(n_1 + x)(n_2 + x)^2} + \frac{a_1 - x}{(n_2 + x)^3 \cdot (n_1 + a_1)} \right\}. \end{aligned}$$

Et leurs produits respectifs qui, dans l'équation (569)', forment les coefficients des différentielles de la fonction problématique Fx , se réduiront, à l'aide de ces valeurs (570)'', aux expressions très-simples . . . (570)'''

$$\begin{aligned} d\Omega_1 \cdot d^2\Omega_2 - d^2\Omega_1 \cdot d\Omega_2 &= + 1^{31} \cdot \frac{(n_1 + a_1)(n_2 + a_1)(n_2 + a_2)}{(n_1 + x)^2 \cdot (n_2 + x)^3} \cdot dx^3, \\ d\Omega_1 \cdot d^3\Omega_2 - d^3\Omega_1 \cdot d\Omega_2 &= \\ &= - 1^{31} \cdot \frac{(n_1 + a_1)(n_2 + a_1)(n_2 + a_2)}{(n_1 + x)^3 \cdot (n_2 + x)^3} \cdot \left\{ \frac{1}{n_1 + x} + \frac{1}{n_2 + x} \right\} \cdot dx^4, \\ d^2\Omega_1 \cdot d^2\Omega_2 - d^2\Omega_1 \cdot d^2\Omega_2 &= + 1^{31} \cdot 1^{31} \cdot \frac{(n_1 + a_1)(n_2 + a_1)(n_2 + a_2)}{(n_1 + x)^4 \cdot (n_2 + x)^4} \cdot dx^5. \end{aligned}$$

Substituant donc ces valeurs dans l'équation en question (569)', cette deuxième équation de condition sera définitivement . . . (571)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1^{31}} \cdot \left(\frac{d^2Fx}{dx^2} \right) \cdot (n_1 + x)(n_2 + x) \\ &+ \frac{1}{1^{31}} \cdot \left(\frac{d^3Fx}{dx^3} \right) \cdot \left[(n_1 + x) + (n_2 + x) \right] \\ &+ \frac{1}{1^{31}} \cdot \left(\frac{dFx}{dx} \right). \end{aligned}$$

Et comme telle, c'est-à-dire, comme résultant, dans notre méthode suprême, de l'équation de condition (144)'', la présente équation (571), ainsi que nous le verrons à l'instant, offre le principe pour la détermination des deux élé-

ments n_1 et n_2 , par lesquels nous devons progressivement arriver à la découverte de la nature elle-même de la fonction problématique Fx .

La troisième de nos équations de condition (564), en y développant de nouveau la fonction schin par rapport aux différentielles de la fonction problématique Fx , sera . . . (572)

$$\begin{aligned} 0 &= d^4Fx \cdot \Psi[d''\Omega_1, d''\Omega_2, d^3\Omega_3] \\ &\quad - d^3Fx \cdot \Psi[d''\Omega_1, d''\Omega_2, d^4\Omega_3] \\ &\quad + d^2Fx \cdot \Psi[d''\Omega_1, d^3\Omega_2, d^4\Omega_3] \\ &\quad - dFx \cdot \Psi[d''\Omega_1, d^3\Omega_2, d^4\Omega_3]; \end{aligned}$$

dans laquelle les fonctions schins qui y entrent encore, seront . . . (572')

$$\begin{aligned} \Psi[d''\Omega_1, d''\Omega_2, d^3\Omega_3] &= d\Omega_1 \cdot d^2\Omega_2 \cdot d^3\Omega_3 - d\Omega_1 \cdot d^3\Omega_2 \cdot d^2\Omega_3 + \\ &\quad + d^2\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \cdot d^3\Omega_3 - d^2\Omega_1 \cdot d^3\Omega_2 \cdot d\Omega_3 + d^3\Omega_1 \cdot d^2\Omega_2 \cdot d\Omega_3 - d^3\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \cdot d^2\Omega_3, \\ \Psi[d''\Omega_1, d''\Omega_2, d^4\Omega_3] &= d\Omega_1 \cdot d^3\Omega_2 \cdot d^4\Omega_3 - d\Omega_1 \cdot d^4\Omega_2 \cdot d^3\Omega_3 + \\ &\quad + d^2\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \cdot d^4\Omega_3 - d^2\Omega_1 \cdot d^4\Omega_2 \cdot d\Omega_3 + d^3\Omega_1 \cdot d^3\Omega_2 \cdot d\Omega_3 - d^3\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \cdot d^3\Omega_3, \\ \Psi[d''\Omega_1, d^3\Omega_2, d^4\Omega_3] &= d\Omega_1 \cdot d^3\Omega_2 \cdot d^4\Omega_3 - d\Omega_1 \cdot d^4\Omega_2 \cdot d^3\Omega_3 + \\ &\quad + d^2\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \cdot d^4\Omega_3 - d^2\Omega_1 \cdot d^4\Omega_2 \cdot d\Omega_3 + d^3\Omega_1 \cdot d^3\Omega_2 \cdot d\Omega_3 - d^3\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \cdot d^3\Omega_3, \\ \Psi[d''\Omega_1, d^3\Omega_2, d^4\Omega_3] &= d^2\Omega_1 \cdot d^3\Omega_2 \cdot d^4\Omega_3 - d^2\Omega_1 \cdot d^4\Omega_2 \cdot d^3\Omega_3 + \\ &\quad + d^3\Omega_1 \cdot d^3\Omega_2 \cdot d^4\Omega_3 - d^3\Omega_1 \cdot d^4\Omega_2 \cdot d^3\Omega_3 - d^3\Omega_1 \cdot d^3\Omega_2 \cdot d^4\Omega_3. \end{aligned}$$

Ainsi, en ajoutant aux expressions générales (570) des différentielles des deux premières fonctions génératrices Ω_1 et Ω_2 , l'expression pareille pour la troisième Ω_3 de ces fonctions, en la déduisant de même de l'expression toute générale (567), savoir . . . (573)

$$\frac{d^i\Omega_j}{dx^i} = -(-1)^{i+1} \cdot \frac{n_1 + a_1}{n_1 + x} \cdot \frac{n_2 + a_2}{n_2 + x} \cdot \frac{n_3 + a_3}{n_3 + x} \cdot \Delta g^{(i)} \left\{ (n_1 + x)^{-q_1} \cdot (n_2 + x)^{-q_2} \cdot (n_3 + x)^{-q_3} \right\},$$

les exposants q_1 , q_2 , q_3 , entiers, y compris zéro, étant ici donnés par l'équation . . . (573')

$$x = q_1 + q_2 + q_3,$$

pourvu qu'on ne perde pas de vue de tenir compte des modifications (567)''; en ajoutant, disons-nous, cette expression (573) aux expressions précédentes (570), on aura les moyens pour déterminer facilement les quatre premières différentielles des trois fonctions génératrices Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , telles que ces différentielles entrent dans la formation (572') des fonctions schins qui sont les facteurs dans la présente troisième équation de condition (572). Et alors, en

évaluant ces facteurs (572)' par le moyen des différentielles des fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, pour lesquelles nous venons d'indiquer les formules, on parviendra à réduire la troisième équation en question (572) à la forme également très-simple . . . (574)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{d^4 Fx}{dx^4} \right) \cdot (n_1 + x) (n_2 + x) (n_3 + x) \\ &+ \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{d^3 Fx}{dx^3} \right) \cdot \{ (n_1 + x) (n_2 + x) + (n_1 + x) (n_3 + x) + (n_2 + x) (n_3 + x) \} \\ &+ \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{d^2 Fx}{dx^2} \right) \cdot \{ (n_1 + x) + (n_2 + x) + (n_3 + x) \} \\ &+ \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{d Fx}{dx} \right). \end{aligned}$$

Et cette équation, comme résultant de nouveau, dans notre méthode suprême, de l'équation de condition (145)'', offrira, à son tour, ainsi que nous le verrons à l'instant, le principe pour la détermination des trois éléments n_1, n_2, n_3 , par lesquels nous devons progressivement arriver à la découverte de la nature elle-même de la fonction problématique Fx .

Il en serait de même de toutes les ultérieures équations de condition (564), dont nous pouvons déjà, par la forme des trois premières équations (568)', (571), et (574), induire la loi générale qui régit toutes ces équations. En effet, pour un nombre quelconque ω des éléments $n_1, n_2, n_3, \dots, n_\omega$, en s'arrêtant ainsi à la fonction génératrice Ω_ω dans la génération absolue (560) de la fonction problématique Fx , si l'on forme les quantités auxiliaires . . . (575)

$$r_1 = (n_1 + x), \quad r_2 = (n_2 + x), \quad r_3 = (n_3 + x), \quad \dots \quad r_\omega = (n_\omega + x);$$

et si, comme nous le faisons dans nos ouvrages mathématiques, nous désignons les sommes des produits combinatoires de ces quantités de la manière suivante . . . (575)'

par $(r_1 \dots r_\omega)$, la somme des quantités $r_1, r_2, r_3, \dots, r_\omega$,
par $(r_1 \dots r_\omega)_2$, la somme de leurs produits de deux à deux,
par $(r_1 \dots r_\omega)_3$, la somme de leurs produits de trois à trois, etc.,
et généralement . . . (575)''

par $(r_1 \dots r_\omega)_\mu$, la somme des produits combinatoires de ces quantités $r_1, r_2, r_3, \dots, r_\omega$, prises de μ à μ ;

en observant, comme nous l'avons déjà vu dans nos ouvrages, qu'on a alors . . . (575)'''

$$(r_1 \dots r_\omega)_0 = 1;$$

la loi générale qui régit la formation de nos présentes équations de condi-

tion (564), telle que nous pouvons déjà induire cette loi des premières (568)'', (571) et (574) de ces équations, est manifestement . . . (576)

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1(w+1)!} \cdot \left(\frac{d^{w+1} Fx}{dx^{w+1}} \right) \cdot (r1 \dots r\omega)_w \\ &+ \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{d^w Fx}{dx^w} \right) \cdot (r1 \dots r\omega)_{w-1} \\ &+ \frac{1}{1(w-1)!} \cdot \left(\frac{d^{w-1} Fx}{dx^{w-1}} \right) \cdot (r1 \dots r\omega)_{w-2} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{d Fx}{dx} \right) \cdot (r1 \dots r\omega)_0. \end{aligned}$$

Et comme telles, les équations de condition (564) serviront facilement à la détermination des quantités $r1, r2, r3, \dots, r\omega$, et par conséquent des éléments $n_1, n_2, n_3, \dots, n_w$, à l'aide desquels nous devons arriver progressivement à la découverte de la nature de la fonction problématique Fx , comme nous le verrons aussitôt que nous aurons donné la démonstration de la présente loi générale (576), que nous ne connaissons encore que par induction et qu'il nous importe essentiellement de démontrer avec rigueur, puisque, comme nous le voyons dans notre méthode suprême, c'est dans les présentes équations de condition (564), réduites à cette forme générale (576), que consiste le principe de la découverte en question de la nature elle-même de toute fonction problématique. Nous allons donc donner ici cette démonstration rigoureuse de la présente loi générale (576).

Avant tout, observons que les quantités arbitraires $a1, a2, a3$, etc., qui entrent dans la construction générale (561) de nos présentes fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., disparaissent dans le développement final de nos équations de condition (564), comme cela est manifeste par leurs premiers développements (568)'', (571) et (574). Il s'ensuit que ces quantités arbitraires $a1, a2, a3$, etc., n'ont aucune influence théorique sur ces équations de condition (564), ni par conséquent sur la détermination des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., servant à la découverte progressive de la nature théorique de la fonction problématique Fx . Ces quantités arbitraires $a1, a2, a3$, etc. n'ont donc ici qu'une influence purement technique sur la série universelle (562) qui est engendrée par les présentes fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., d'après leur construction générale (561). Nous pouvons donc, pour simplifier notre présente question, qui est essentiellement théorique, faire égales à une seule quantité arbitraire a toutes ces quantités différentes $a1, a2, a3$, etc., c'est-à-dire, nous pouvons faire . . . (577)

$$a1 = a2 = a3 = \text{etc.} = a;$$

ce qui réduira notre présente série universelle (562), laquelle nous sert ici

d'instrument technique, à notre *série intermédiaire* (479)', savoir à la *série plus simple* . . . (578)

$$Fx = Fa + A_1 \cdot \frac{x-a}{n_1+x} + A_2 \cdot \frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)} + \\ + A_3 \cdot \frac{(x-a)^3}{(n_1+x)(n_2+x)(n_3+x)} + \text{etc., etc.}$$

Et si, pour abréger les expressions, nous désignons les dérivées différentielles de la fonction problématique Fx de la manière suivante . . . (579)

$$F^{(1)}x = \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{dFx}{dx} \right), \quad F^{(2)}x = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{d^2Fx}{dx^2} \right), \quad F^{(3)}x = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{d^3Fx}{dx^3} \right), \\ \text{etc., et généralement pour un indice quelconque } \mu \dots (579')$$

$$F^{(\mu)}x = \frac{1}{\mu!} \cdot \left(\frac{d^\mu Fx}{dx^\mu} \right);$$

la loi générale (576) qu'il s'agit de démontrer, recevra d'abord l'expression plus simple . . . (580)

$$0 = F^{(w+1)}x \cdot (r_1 \dots r_w)_w \\ + F^{(w)}x \cdot (r_1 \dots r_w)_{w-1} \\ + F^{(w-1)}x \cdot (r_1 \dots r_w)_{w-2} \\ \dots \\ + F^{(1)}x \cdot (r_1 \dots r_w)_0.$$

Et si, de plus on fait . . . (581)

$$\alpha_1 = F^{(1)}a, \quad \alpha_2 = F^{(2)}a, \quad \alpha_3 = F^{(3)}a, \quad \text{etc.,}$$

et géométriquement . . . (581')

$$\alpha_\mu = F^{(\mu)}a = \frac{1}{\mu!} \cdot \left(\frac{d^\mu Fx}{dx^\mu} \right)_{(x=a)};$$

en marquant par l'indice inférieur ($x=a$) qu'après la différentiation de cette fonction Fx , il faut y mettre, à la place de la quantité variable x , la quantité constante a ; la loi que suit la formation des coefficients A_1, A_2, A_3 , etc., dans notre présente *série intermédiaire* (578), telle que nous avons produit et démontré rigoureusement cette loi, sous la marque (480)', dans notre *Philosophie de la Technique*, est . . . (582)

$$A_\mu = \frac{H_1 H_2 H_3 \dots H_\mu}{H_\mu} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\alpha_\mu \cdot (H_1 \dots H_{\mu-1})_0 \\ &+ \alpha_{\mu-1} \cdot (H_1 \dots H_{\mu-1})_1 \\ &+ \alpha_{\mu-2} \cdot (H_1 \dots H_{\mu-2})_2 \\ &\dots \\ &+ \alpha_1 \cdot (H_1 \dots H_{\mu-1})_{\mu-1} \end{aligned} \right\};$$

$$\lambda p = (rp)_{(x=a)} \quad , \quad \text{et} \quad rp = (\lambda p)_{(a=x)} \quad ;$$

en indiquant par les indices inférieurs $(x=a)$ et $(a=x)$ les valeurs qu'il faut y introduire respectivement; et si l'on remarque de plus que, d'après la formation (581) des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, etc., on a de même, pour tout indice ϖ , les valeurs réciproques . . . (585')

$$\lambda_{\varpi} = (F^{(\varpi)}x)_{(x=a)} \quad , \quad \text{et} \quad F^{(\varpi)}x = (\lambda_{\varpi})_{(a=x)} \quad ;$$

on reconnaît facilement, en comparant les deux lois (580) et (584), que la première (580) de ces lois, celle qu'il s'agit ici de démontrer, est, quant à la forme, parfaitement identique avec la seconde (584) de ces lois, c'est-à-dire que l'équation générale (580) qui est en question, est parfaitement identique avec l'équation générale . . . (586)

$$0 = (A_{\varpi+1})_{(a=x)} \quad .$$

Il ne nous reste donc, pour démontrer rigoureusement et généralement la loi (580) en question, qu'à prouver que, parmi nos équations de condition (564), l'équation générale . . . (587)

$$0 = \psi \left[d^x \Omega_1 . d^y \Omega_2 . d^z \Omega_3 \quad . \quad . \quad . \quad d^w \Omega_{\varpi} . d^{(w+1)} Fx \right] \quad ,$$

qui doit se réduire à l'équation en question (580), est identique avec la présente équation générale (586). Et c'est ce que nous allons prouver.

En remontant à notre loi suprême (560), savoir . . . (588)

$$Fx = A_0 . \Omega_0 + A_1 . \Omega_1 + A_2 . \Omega_2 + A_3 . \Omega_3 + \text{etc.}, \text{ etc.} \quad ;$$

si, à la place des fonctions génératrices (561), nous formons maintenant les fonctions génératrices qui servent à réaliser notre présente série intermédiaire (578), c'est-à-dire, si nous formons les fonctions génératrices . . . (588')

$$\Omega_0 = 1 \quad ,$$

$$\Omega_1 = \frac{x-a}{n_1+x} \quad ,$$

$$\Omega_2 = \frac{(x-a)^2}{(n_1+x)(n_2+x)} \quad ,$$

$$\Omega_3 = \frac{(x-a)^3}{(n_1+x)(n_2+x)(n_3+x)} \quad ,$$

etc., etc. ;

l'expression générale (64) de notre Philosophie de la Technique nous fera connaître, dans la présente génération absolue de la fonction Fx , les coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc. correspondant à ces fonctions génératrices (588'), c'est-à-dire, les coefficients de notre série intermédiaire (578) qui résulte de ces mêmes fonctions génératrices présentes (588'). Or, pour arriver immédiatement à notre but, supposons que la quantité arbitraire qu'il faut introduire,

à la place de la variable x , dans l'expression générale (64) que nous venons de citer, c'est-à-dire, la quantité arbitraire qui y est marquée par le point placé sur les diverses fonctions dans cette expression (64), soit la quantité arbitraire a qui entre dans la formation (588) de nos présentes fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., on reconnaîtra facilement que cette expression générale (64) des coefficients A_n, A_1, A_2, A_3 , etc. se réduira alors à son premier terme, c'est-à-dire, que l'on aura alors . . . (589)

$$A_n = (\Xi_n)_{(x=a)};$$

la fonction Ξ_n étant donnée par les expressions (60). En effet, avec cette quantité arbitraire a , les fonctions $\Psi(\mu)_1, \Psi(\mu)_2, \Psi(\mu)_3$, etc., qui entrent dans l'expression générale (64), deviendront toutes égales à zéro, parce qu'en vertu des expressions (62), leurs parties constituantes $\Phi(p)_1, \Phi(p)_2, \Phi(p)_3$, etc., par lesquelles s'opère leur formation successive (63), sont toutes zéro, à cause que, dans ces parties constituantes $\Phi(p)_\mu$, l'indice p est toujours plus grand que l'indice μ . Et alors, en vertu des expressions (61) des fonctions Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 , etc., en y prenant, pour notre cas présent, les différentielles à la place des différences, nous aurons, par suite de notre actuelle détermination (589) du coefficient général A_n , l'expression complètement déterminée de ce même coefficient, en y changeant l'indice μ en $(\mu+1)$, savoir . . . (590)

$$A_{n+1} = \frac{\Psi[d^{n+1}\Omega_1, d^{n+1}\Omega_2, d^{n+1}\Omega_3, \dots, d^{n+1}\Omega_n, d^{n+1}F_x]_{(x=a)}}{\Psi[d^{n+1}\Omega_1, d^{n+1}\Omega_2, d^{n+1}\Omega_3, \dots, d^{n+1}\Omega_n, d^{n+1}F_x]_{(x=a)}}.$$

Mais, en faisant ainsi $x=a$ après les différentiations, le dénominateur de cette expression, comme nous l'avons déjà vu plusieurs fois dans notre Philosophie de la Technique, devient simplement . . . (591)

$$\begin{aligned} & \Psi[d^{n+1}\Omega_1, d^{n+1}\Omega_2, d^{n+1}\Omega_3, \dots, d^{n+1}\Omega_n, d^{n+1}F_x]_{(x=a)} = \\ & = \frac{1^{n+1} \cdot 1^{n+1} \cdot 1^{n+1} \cdot \dots \cdot 1^{n+1} \cdot 1^{n+1}}{(n_1 + a)^{n+1} \cdot (n_2 + a)^n \cdot (n_3 + a)^{n-1} \cdot \dots \cdot (n_n + a)^2 \cdot (n_{n+1} + a)} \end{aligned}$$

Et par conséquent, l'expression générale (590) du coefficient A_{n+1} se réduira à la forme . . . (592)

$$A_{n+1} = \frac{\left\{ \begin{aligned} & [(n_1 + a)^{n+1} \cdot (n_2 + a)^n \cdot (n_3 + a)^{n-1} \cdot \dots \cdot (n_n + a)^2 \cdot (n_{n+1} + a)] \times \\ & \times \Psi[d^{n+1}\Omega_1, d^{n+1}\Omega_2, d^{n+1}\Omega_3, \dots, d^{n+1}\Omega_n, d^{n+1}F_x]_{(x=a)} \end{aligned} \right\}}{1^{n+1} \cdot 1^{n+1} \cdot 1^{n+1} \cdot \dots \cdot 1^{n+1} \cdot 1^{n+1}}.$$

Or, en examinant l'expression générale (584) ou (582) du coefficient A_n de la même série intermédiaire (578), on reconnaît facilement que la quantité a qui entre dans cette expression, y provient uniquement de sa substitution à

la place de la quantité x ; de sorte qu'en y remettant la quantité x à la place de cette quantité a , la présente expression (59a) nous donnera l'égalité générale . . . (593)

$$(A_{n+1})_{(a=x)} = \frac{\left\{ \left[(n_1 + x)^{w+1}, (n_2 + x)^w, (n_3 + x)^{w-1}, \dots, (n_{n+1} + x) \right] \times \right. \\ \left. \times \psi \left[d^{(1)} \Omega_1, d^{(2)} \Omega_2, d^{(3)} \Omega_3, \dots, d^{(n)} \Omega_n, d^{(w+1)} \text{Fx} \right] \right\}}{(1!)^{n_1} (2!)^{n_2} (3!)^{n_3} \dots (n!)^{n_n} (w+1)!}$$

Donc, en faisant abstraction des facteurs constants dans cette expression, il est manifeste que l'équation . . . (594)

$$0 = \mathcal{W} [d^{(1)} \Omega_1, d^{(2)} \Omega_2, d^{(3)} \Omega_3, \dots, d^{(n)} \Omega_n, d^{(n+1)} F_X],$$

est identique avec l'équation . . . (504)

$$0 = (\Lambda_{\alpha\beta})_{(g=g)},$$

et par conséquent, en vertu de l'équation commune (586), qu'elle est identique avec l'expression (58n), c'est-à-dire, avec l'équation . . . (595)

$$\begin{aligned} 0 &= F^{(n+1)}x_i(r_1, \dots, r_d)_{-n} \\ &+ F^{(n)}x_i(r_1, \dots, r_d)_{-n-1} \\ &+ F^{(n-1)}x_i(r_1, \dots, r_d)_{-n-2} \\ &\vdots \\ &+ F^{(1)}x_i(r_1, \dots, r_d)_{-n-1} \end{aligned}$$

Et c'est cette identité des équations (504) et (505) qu'il fallait démontrer.

Nous avons donc, pour nos équations de condition (564), telles que nous les assigne la méthode suprême (143''), (144''), (145''), etc., la présente forme générale (595), que nous avons d'abord tirée par induction des développements particuliers (568''), (571) et (574) de ces équations de condition (564), et qui se trouve maintenant démontrée rigoureusement. — Or, d'après la méthode suprême, ce sont ces équations de condition (564), telles qu'elles se trouvent réduites à la présente forme générale (595), qui consistent les principes pour la détermination progressive des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., dans les fonctions génératrices (588'), afin que, par la génération absolue (588), qui, employée alors comme instrument technique, forme notre présente série intermédiaire (578), on puisse arriver progressivement à la détermination théorique de la fonction problématique Fz , c'est-à-dire, à la détermination de sa nature elle-même et non de sa simple valeur. Nous allons donc procéder maintenant, en nous servant de cette forme générale (595) des équations de condition (564), à la détermination en question des éléments n_1, n_2, n_3 , etc.; et pour cela, nous déterminerons simplement les quantités r_1, r_2, r_3 , etc., qui entrent immédiatement dans la forme générale (595) de ces équations, et qui, d'après

leur construction (575), impliquent ces éléments n_1, n_2, n_3 , etc., précisément sous la forme sous laquelle ils entrent dans la construction (588) des fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc.

Pour simplifier les expressions, représentons l'équation générale (595), qui forme ici le principe de la détermination en question, par l'équation . . . (596)

$$0 = \Phi \left(x; \left(\frac{dFx}{dx} \right), \left(\frac{d^2Fx}{dx^2} \right), \text{ etc.}; n_1, n_2, \text{ etc.} \right),$$

en désignant par la caractéristique Φ une fonction de la variable x , des différentielles de la fonction problématique Fx , et des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., en question, dont le nombre y est indiqué par l'indice inférieur ϖ , et en considérant cette fonction comme étant la fonction même qui forme l'équation générale (595). Bien plus, pour abréger davantage les expressions, désignons cette fonction par sa seule caractéristique $\Phi(\varpi)$; de sorte que l'équation (595) dont il s'agit, sera représentée simplement par l'équation . . . (596)

$$0 = \Phi(\varpi);$$

dans laquelle ϖ dénote le nombre des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., ou des éléments r_1, r_2, r_3 , etc., c'est-à-dire, l'indice de la fonction génératrice Ω_ϖ , à laquelle, d'après la loi fondamentale (142) ou (146) de la méthode supérieure, on s'arrête dans cette progressive génération théorique de la fonction problématique Fx . — Or, en développant cette fonction $\Phi(\varpi)$ par rapport aux puissances de la fonction simple $(x-i)$, dans laquelle i est une quantité arbitraire, l'équation (596) deviendra . . . (597)

$$0 = \Phi(\varpi) + \frac{d\Phi(\varpi)}{1.dx} \cdot (x-i) + \frac{d^2\Phi(\varpi)}{1.2.dx^2} \cdot (x-i)^2 + \\ + \frac{d^3\Phi(\varpi)}{1.2.3.dx^3} \cdot (x-i)^3 + \text{etc.};$$

en indiquant par le point, placé sur la caractéristique Φ , qu'il faut y mettre la quantité arbitraire i à la place de la quantité variable x . Et comme telle, cette équation (597) ne saurait subsister généralement, pour toute valeur de x , qu'autant qu'on aurait les équations . . . (597')

$$\Phi(\varpi) = 0, \quad \frac{d\Phi(\varpi)}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\Phi(\varpi)}{dx^2} = 0, \quad \text{etc.};$$

et généralement, pour un indice quelconque μ , y compris zéro, les équations . . . (597)''

$$\frac{d^\mu \Phi(\varpi)}{dx^\mu} = 0;$$

dans lesquelles la quantité i , indiquée par le point, serait une quantité arbitraire quelconque. Ainsi, dans le cas où le nombre ω des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., ou, ce qui est la même chose, des éléments r_1, r_2, r_3 , etc., serait indéfiniment grand, on pourrait, par la détermination correspondante de ces éléments, satisfaire à toutes ces équations (597)', dont le nombre, produit par le développement (597), est indéfiniment grand. Et alors, l'équation (596)', c'est-à-dire, l'équation (595) qu'elle représente, subsisterait généralement, pour toute valeur de x ; et d'après la méthode suprême (146), les coefficients ultérieurs $\dot{A}_{\omega+1}, \dot{A}_{\omega+2}, \dot{A}_{\omega+3}$, etc., qui, d'après la loi présente (592), seraient nos coefficients actuels $A_{\omega+1}, A_{\omega+2}, A_{\omega+3}$, etc., deviendraient tous égaux à zéro, de sorte que la présente génération absolue (588) de la fonction problématique Fx , telle qu'elle se trouverait réalisée par notre série intermédiaire, servant ici d'instrument technique pour cette détermination des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., à l'infini, serait rigoureusement épuisée à ce dernier terme où la fonction génératrice Ω_ω aurait l'indice ω indéfiniment grand. Il est donc établi rigoureusement que, par la génération absolue (588), sous la forme de notre série intermédiaire (578), en y déterminant convenablement, par le moyen du nombre indéfiniment grand des équations (597)', la suite entière et indéfinie des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., la fonction problématique Fx , quelle qu'elle soit, se trouvera, à l'aide de ses seules et propres différentielles indéfinies, correspondant à une valeur quelconque i de x , et par conséquent à cette valeur elle-même x , cette fonction Fx , disons-nous, se trouvera ainsi déterminée tout à fait théoriquement, c'est-à-dire, dans sa nature elle-même, et non dans sa simple valeur.

Mais, le terme de cette rigoureuse génération théorique de toute fonction problématique Fx étant dans l'infini, on ne saurait généralement déterminer, sous une forme finie, la nature de toute fonction Fx . Nous en avons découvert le raison dans le précédent Programme pour cette suite d'ouvrages, et notamment dans le première classe des problèmes, indiquée dans ce Programme, où nous avons reconnu que les fonctions finies, élémentaires et systématiques, simples et composées, que possède la science, proviennent de l'application de la loi de création aux éléments hétérogènes, la fin et l'infini, que lui donne la loi suprême, et que toutes les fonctions problématiques, quelles qu'elles soient, peuvent être déterminées théoriquement, par une génération progressive, quelquefois finie, et le plus souvent indéfinie, mais de plus en plus exacte, telle que la loi suprême la rend possible par sa forme universelle de la génération des quantités. — Or, c'est précisément une telle détermination progressive, indéfinie, et de plus en plus exacte à volonté, de la nature théorique de toute fonction problématique Fx , que nous venons de réaliser par sa génération absolue sous la forme (588) et (588)', c'est-à-dire, sous la forme (578), en y déterminant progressivement et indéfiniment les éléments n_1, n_2, n_3 , etc., par

le moyen des présentes et également indéfinies équations (597)'. Et quoique ces éléments n_1, n_2, n_3 , etc., et leurs déterminations correspondantes par les équations (597)', soient indéfinis, ce qui précisément constitue le principe de cette rigoureuse détermination théorique de la fonction Fx , on conçoit que, dans les régions finies, on peut à volonté approcher de cette détermination théorique en prenant, d'après la méthode suprême (143) ou (146), la dernière fonction génératrice Ω_n avec un indice n de plus en plus grand, et en déterminant alors les éléments correspondants $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$ par un nombre n d'équations, prises sur les premières des équations (597)', dont le nombre est indéfini, et par conséquent suffisant toujours pour fournir les n premières équations nécessaires. Mais, on conçoit également que, lorsqu'on ne prend ainsi qu'un nombre fini n de ces équations (597)', il faut y donner à la quantité arbitraire i , indiquée par le point, la valeur x , afin que, dans l'équation (597), de laquelle dérivent ces équations (597)', les termes ultérieurs correspondant aux puissances $(x-i)^{-1}, (x-i)^{-2}, (x-i)^{-3}$, etc., deviennent zéro par les valeurs de ces puissances, et afin que, de cette manière, l'équation (595), que représente cette équation (597)', et qui est la condition de ces déterminations des éléments $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$, se trouve réalisée. On aura donc ainsi, dans cette génération progressive, et de plus en plus exacte, de la nature théorique d'une fonction problématique Fx , pour la détermination des n éléments $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$, ou, ce qui est la même chose, pour la détermination des n éléments $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, dans la fonction génératrice Ω_n à laquelle on arrête à volonté cette génération absolue, les n équations . . . (598)

$$\Phi(x) = 0, \frac{d\Phi(x)}{dx} = 0, \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = 0, \dots, \frac{d^{n-1}\Phi(x)}{dx^{n-1}} = 0;$$

en y conservant alors à x sa propre valeur. — Il faut ici remarquer que, de cette manière, les éléments n_1, n_2, n_3 , etc., deviendront des fonctions de la variable x ; mais, ces fonctions ne feront proprement que fixer les valeurs qu'il faut, à chaque fois, donner à ces éléments $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$, lesquels, pour cela, ne doivent pas cesser d'être considérés comme étant des quantités constantes. Il faut aussi remarquer qu'en laissant ainsi subsister la valeur de x dans les présentes équations (598), et par conséquent dans la première de ces équations, au lieu d'y introduire à la place de x une valeur arbitraire i , les coefficients ultérieurs $A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}$, etc., ne deviendront plus zéro; parce que, d'après leur détermination générale (589), ces coefficients qui, dans leur fonction générale Ξ_n , impliquent tous, comme facteur, la fonction $\Phi(x)$, formant la première des équations présentes (598), reçoivent tous, pour x , la valeur a , que la susdite valeur arbitraire i aurait seule pu représenter, valeur qui, en réalité, disparaîtrait de cette

fonction $\Phi(\omega)$ par l'introduction des valeurs des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., déterminées par les équations infinies (597)' et impliquant toutes cette quantité arbitraire i . Mais, c'est précisément parce que ces coefficients ultérieurs $A_{\omega+1}, A_{\omega+2}, A_{\omega+3}$, etc., ne deviennent pas alors zéro, que la génération théorique de la fonction Fx ne se trouve pas encore épuisée avec le nombre fini ω des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., quoiqu'elle soit ainsi progressivement de plus en plus exacte.

Il ne nous reste donc, pour accomplir cette question, qu'à déterminer les différentielles de la fonction $\Phi(\omega)$, c'est-à-dire, les différentielles de la fonction d'équation (595), qui forment les présentes équations (598) pour la détermination des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., ou des éléments r_1, r_2, r_3 , etc. — Pour cela représentons les sommes des produits combinatoires des éléments $r_1, r_2, r_3, \dots, r\omega$, sommes qui entrent dans l'équation générale (595), de la manière suivante . . . (599)

$$\begin{aligned}(r_1 \dots r\omega)_{\omega} &= R(\omega)_{\omega}, \\(r_1 \dots r\omega)_{\omega-1} &= R(\omega)_{\omega-1}, \\(r_1 \dots r\omega)_{\omega-2} &= R(\omega)_{\omega-2}, \\&\dots \dots \dots \\(r_1 \dots r\omega)_0 &= R(\omega)_0 = 1.\end{aligned}$$

Et cette équation générale (595) sera . . . (600)

$$0 = F^{(\omega+1)}x.R(\omega)_{\omega} + F^{(\omega)}x.R(\omega)_{\omega-1} + F^{(\omega-1)}x.R(\omega)_{\omega-2} \dots + F^{(1)}x.R(\omega)_0;$$

c'est-à-dire, d'après la notation (579), elle sera . . . (600')

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{i^{(\omega+1)}i} \cdot \left(\frac{d^{(\omega+1)}Fx}{dx^{\omega+1}} \right) \cdot R(\omega)_{\omega} \\&+ \frac{1}{i^{\omega}i} \cdot \left(\frac{d^{\omega}Fx}{dx^{\omega}} \right) \cdot R(\omega)_{\omega-1} \\&+ \frac{1}{i^{(\omega-1)}i} \cdot \left(\frac{d^{\omega-1}Fx}{dx^{\omega-1}} \right) \cdot R(\omega)_{\omega-2} \\&\dots \dots \dots \\&+ \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{dFx}{dx} \right) \cdot R(\omega)_0.\end{aligned}$$

Et c'est pour cette équation qu'il s'agit de déterminer la différentielle générale d'un ordre quelconque. — Or, cette différentielle générale d'un ordre quelconque $(p-1)$ sera . . . (601)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1^{(w+p)|1}} \cdot \left(\frac{d^{w+p} Fx}{dx^{w+p}} \right) \cdot R(\omega)_w \\
 &+ \frac{1}{1^{(w+p-1)|1}} \cdot \left(\frac{d^{w+p-1} Fx}{dx^{w+p-1}} \right) \cdot R(\omega)_{w-1} \\
 &+ \frac{1}{1^{(w+p-2)|1}} \cdot \left(\frac{d^{w+p-2} Fx}{dx^{w+p-2}} \right) \cdot R(\omega)_{w-2} \\
 &\dots \dots \dots \\
 &+ \frac{1}{1^{p|1}} \cdot \left(\frac{d^p Fx}{dx^p} \right) \cdot R(\omega)_0.
 \end{aligned}$$

En effet, prenant la différentielle sur cette forme générale (601), on obtiendra d'abord l'équation . . . (602)

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{1^{(w+p)|1}} \cdot \left(\frac{d^{w+p+1} Fx}{dx^{w+p+1}} \right) \cdot R(\omega)_w \\
 &+ \left(\frac{d^{w+p} Fx}{dx^{w+p}} \right) \cdot \left\{ \frac{dR(\omega)_w}{dx} \cdot \frac{1}{1^{(w+p)|1}} + R(\omega)_{w-1} \cdot \frac{1}{1^{(w+p-1)|1}} \right\} \\
 &+ \left(\frac{d^{w+p-1} Fx}{dx^{w+p-1}} \right) \cdot \left\{ \frac{dR(\omega)_{w-1}}{dx} \cdot \frac{1}{1^{(w+p-1)|1}} + R(\omega)_{w-2} \cdot \frac{1}{1^{(w+p-2)|1}} \right\} \\
 &+ \left(\frac{d^{w+p-2} Fx}{dx^{w+p-2}} \right) \cdot \left\{ \frac{dR(\omega)_{w-2}}{dx} \cdot \frac{1}{1^{(w+p-2)|1}} + R(\omega)_{w-3} \cdot \frac{1}{1^{(w+p-3)|1}} \right\} \\
 &\dots \dots \dots \\
 &+ \left(\frac{d^p Fx}{dx^p} \right) \cdot \left\{ \frac{dR(\omega)_1}{dx} \cdot \frac{1}{1^{p|1}} + R(\omega)_0 \cdot \frac{1}{1^{1|1}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Et considérant que, d'après (599), les quantités $R(\omega)_1$, $R(\omega)_2$, $R(\omega)_3$, etc., sont les sommes des produits combinatoires des quantités r_1 , r_2 , r_3 , . . . r_{ω} qui, en vertu de leur formation (575), n'impliquent la variable x qu'au premier degré, on reconnaîtra facilement que les différentielles des quantités $R(\omega)_1$, $R(\omega)_2$, $R(\omega)_3$, etc., sont formées par ces mêmes quantités, savoir . . . (603)

$$\begin{aligned}
 \frac{dR(\omega)_1}{dx} &= \omega \cdot R(\omega)_0 = \omega, \\
 \frac{dR(\omega)_2}{dx} &= (\omega - 1) \cdot R(\omega)_1, \\
 \frac{dR(\omega)_3}{dx} &= (\omega - 2) \cdot R(\omega)_2, \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{dR(\omega)_w}{dx} &= 1 \cdot R(\omega)_{w-1}.
 \end{aligned}$$

Donc, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente (602), cette équation différentielle se réduira à la forme . . . (604)

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{1^{(w+p+1)}!} \cdot \left(\frac{d^{w+p+1} Fx}{dx^{w+p+1}} \right) \cdot R(\varpi)_w \\ & + \frac{1}{1^{(w+p)}!} \cdot \left(\frac{d^{w+p} Fx}{dx^{w+p}} \right) \cdot R(\varpi)_{w-1} \\ & + \frac{1}{1^{(w+p-1)}!} \cdot \left(\frac{d^{w+p-1} Fx}{dx^{w+p-1}} \right) \cdot R(\varpi)_{w-2} \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{1}{1^{(p+1)}!} \cdot \left(\frac{d^{p+1} Fx}{dx^{p+1}} \right) \cdot R(\varpi)_0; \end{aligned}$$

forme qui est parfaitement identique avec la forme (601), en y mettant $(p+1)$ à la place de p . Ainsi, en faisant $p=1$ dans l'équation (601), elle sera simplement l'équation proposée (600); et alors, la présente équation (604) sera sa première différentielle. Faisant ensuite $p=2$ dans l'équation (601), elle sera cette première différentielle que vient de former la présente équation (604) lorsque $p=1$; et alors, pour $p=2$, cette équation (604) formera la seconde différentielle de l'équation proposée (600). Et ainsi de suite à l'infini; de sorte que la présente équation (604) est réellement la différentielle générale de l'ordre p de l'équation proposée (600).

Reprenant donc la notation (579), dont nous nous sommes déjà servi, à la marque (600), pour l'équation proposée (600) dont il s'agit ici de prendre les différentielles consécutives; au nombre de $(\varpi-1)$, pour former, conjointement avec cette équation proposée (600) ou (600)', les ϖ équations (598) qui sont nécessaires pour la détermination des ϖ éléments $n_1, n_2, n_3, \dots, n_w$, et prenant effectivement, sur cette équation proposée (600) ou (600)', d'après la forme générale (604), les $(\varpi-1)$ différentielles consécutives, nous aurons définitivement, pour la détermination des éléments $n_1, n_2, n_3, \dots, n_w$, les ϖ équations que voici . . . (605)

$$\begin{aligned} 0 = & F^{(w+1)} x.R(\varpi)_w + F^{(w)} x.R(\varpi)_{w-1} + F^{(w-1)} x.R(\varpi)_{w-2} \dots + F^{(1)} x.R(\varpi)_0, \\ 0 = & F^{(w+1)} x.R(\varpi)_w + F^{(w)} x.R(\varpi)_{w-1} + F^{(w-1)} x.R(\varpi)_{w-2} \dots + F^{(2)} x.R(\varpi)_0, \\ 0 = & F^{(w+1)} x.R(\varpi)_w + F^{(w)} x.R(\varpi)_{w-1} + F^{(w-1)} x.R(\varpi)_{w-2} \dots + F^{(3)} x.R(\varpi)_0, \\ \dots \dots \dots \\ 0 = & F^{(w+1)} x.R(\varpi)_w + F^{(w)} x.R(\varpi)_{w-1} + F^{(w-2)} x.R(\varpi)_{w-2} \dots + F^{(w)} x.R(\varpi)_0. \end{aligned}$$

Or, ces équations qui sont linéaires, et dans lesquelles on a $R(\varpi)_w = 1$, feront connaître immédiatement les ϖ quantités $R(\varpi)_w, R(\varpi)_{w-1}, R(\varpi)_0$,

... $R(\omega)_n$. — Et alors, en ne perdant pas de vue que, d'après leur formation (599), ces quantités sont les sommes des produits combinatoires des ω quantités élémentaires $r_1, r_2, r_3, \dots, r\omega$, on aura, pour la détermination de ces quantités élémentaires que nous désignerons généralement par r , l'équation . . . (606)

$$0 = r^n - R(\omega)_1 \cdot r^{n-1} + R(\omega)_2 \cdot r^{n-2} - R(\omega)_3 \cdot r^{n-3} \dots (-1)^n \cdot R(\omega)_n,$$

dont les ω racines seront évidemment les ω quantités élémentaires $r_1, r_2, r_3, \dots, r\omega$ qu'il s'agissait de déterminer. Ou bien, si nous désignons de même généralement par n les ω éléments $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$, nous aurons, en vertu des relations (575) qui existent entre ces quantités et les quantités élémentaires $r_1, r_2, r_3, \dots, r\omega$, pour la détermination de ces ω éléments $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$, l'équation . . . (607)

$$0 = n^n - S(\omega)_1 \cdot n^{n-1} + S(\omega)_2 \cdot n^{n-2} - S(\omega)_3 \cdot n^{n-3} \dots (-1)^n \cdot S(\omega)_n;$$

en faisant les quantités auxiliaires . . . (607')

$$S(\omega)_1 = R(\omega)_1 - \frac{\omega}{1} \cdot x,$$

$$S(\omega)_2 = R(\omega)_2 - \frac{\omega-1}{1} \cdot R(\omega)_1^2 \cdot x + \frac{(\omega-1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot x^2,$$

$$S(\omega)_3 = R(\omega)_3 - \frac{\omega-2}{1} \cdot R(\omega)_1^2 \cdot x + \frac{(\omega-2)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot R(\omega)_1 \cdot x^2 - \frac{(\omega-2)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot x^3,$$

etc., etc.

Mais, en ayant égard aux relations éminemment simples (575) qui existent entre les quantités r_1, r_2, r_3 , etc.; et les éléments n_1, n_2, n_3 , etc., il suffira de s'en tenir à l'équation précédente (606), dont les racines donnent ces quantités élémentaires r_1, r_2, r_3 , etc.; car, il suffira de retrancher, de chacune d'elles, la variable x , pour avoir immédiatement les éléments n_1, n_2, n_3 , etc. en question. — D'ailleurs, c'est sous la forme des quantités r_1, r_2, r_3 , etc. que ces éléments entrent dans la construction (588') des fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc. qui, par le moyen de la génération absolue (588), c'est-à-dire, à l'aide de l'instrument technique (578), doivent nous conduire ainsi progressivement à la détermination théorique de la fonction cherchée Fx . Il suffit donc de s'en tenir à ces quantités élémentaires elles-mêmes $r_1, r_2, r_3, \dots, r\omega$, telles qu'elles se trouvent données par les racines de l'équation (606). En effet, d'après les relations (575) entre les quantités élémentaires $r_1, r_2, r_3, \dots, r\omega$ et les éléments $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$, les fonctions génératrices (588') sont proprement . . . (608)

$$\Omega_0 = 1, \quad \Omega_1 = \frac{x-a}{r_1}, \quad \Omega_2 = \frac{(x-a)^2}{r_1 \cdot r_2}, \text{ etc.};$$

et généralement . . . (608)

$$\Omega_p = \frac{(x-a)^p}{(r_1.r_2.r_3 \dots r_p)} ;$$

et sous cette forme, les racines r de l'équation (606) suffisent immédiatement pour la détermination de ces fonctions génératrices, et par conséquent pour la détermination de la génération absolue (588), au moyen de l'instrument technique (578).

Mais il se présente ici une observation d'une grande importance pour notre question d'une telle génération progressive de la nature théorique d'une fonction, c'est que, par l'équation (606) dont les racines donnent les quantités élémentaires r_1, r_2, r_3 , etc., rien ne détermine lesquelles de ces racines doivent former successivement la première Ω , la seconde Ω_2 , la troisième Ω_3 , etc. de ces fonctions génératrices; de sorte que, pour ce choix, la question demeure indéterminée. — Or, c'est précisément cette indétermination dans le choix des racines r_1, r_2, r_3 , etc., pour la formation des fonctions génératrices $\Omega, \Omega_2, \Omega_3$, etc., qui signale que l'instrument technique (578) dont nous nous servons pour cette progressive détermination théorique de la fonction Fx , cesse ici de subsister et donne ainsi lieu à sa transformation en fonction théorique; car, cette indétermination en question, qui ne saurait en rien changer le résultat, prouve que c'est seulement dans ce résultat, c'est-à-dire, dans la somme des termes formant cette génération progressive, que se réalise définitivement, par un concours symétrique des racines r_1, r_2, r_3 , etc., la détermination théorique de la fonction problématique Fx . — Nous avons donc, dans ce procédé de la méthode primordiale ou universelle que nous cherchons à constituer, deux avantages réels et très-nobles, savoir, d'abord, que notre série instrumentale (578) qui, sans la présente détermination de ses éléments n_1, n_2, n_3 , etc. par notre méthode suprême, n'est encore qu'une simple génération technique, cesse de subsister comme telle par cette détermination de ses éléments n_1, n_2, n_3 , etc., et se transforme alors, par la somme progressive de ses termes, en une véritable génération théorique, et ensuite, que, dans cette somme progressive des termes de la série (578), somme dont la valeur ne saurait varier par le choix quelconque des susdites racines r_1, r_2, r_3 , etc., ces racines doivent nécessairement entrer sous une forme symétrique, de manière que ces fonctions symétriques pourront y être déterminées immédiatement par les coefficients $R(\omega), R(\omega^2), R(\omega^3)$, etc. de l'équation (606), sans qu'il soit nécessaire de résoudre cette équation elle-même. — Ce dernier avantage, qui nous dispense de résoudre l'équation (606), et qui nous fait ainsi éviter les très-grandes complications qu'entraînerait cette résolution, surtout lorsque, comme cela pourrait être nécessaire, le degré de cette équation (606) serait très-grand, cet avantage, disons-nous, est évidemment bien majeur dans notre présente question; aussi,

l'avons-nous annoncé déjà, dans la note de la page (628) de la seconde section de notre Philosophie de la Technique, lorsque, sous les marques (556) et (556)', nous y avons annoncé la présente génération-neutre absolue des quantités.

Il nous reste donc maintenant à déterminer la somme progressive des termes de notre série instrumentale (578). — Nous allons le faire en transformant d'abord convenablement, pour ce but, le terme général de cette série; terme qui, d'après l'expression générale (584) de son coefficient A_μ , sera . . . (609)

$$A_\mu \frac{(x-a)^\mu}{(r_1.r_2.r_3 \dots r_\mu)} = \frac{(x-a)^\mu . h_\mu}{(r_1.r_2.r_3 \dots r_\mu)} \left\{ \begin{aligned} &A_\mu . [A_1 \dots A(\mu-1)]_{\mu-1} \\ &+ A_{\mu-1} . [A_1 \dots A(\mu-1)]_{\mu-2} \\ &+ A_{\mu-2} . [A_1 \dots A(\mu-1)]_{\mu-3} \\ &\dots \\ &+ A_1 . [A_1 \dots A(\mu-1)]_0 \end{aligned} \right\}.$$

Or, pour pouvoir assimiler les différents termes de la série (378) dont il s'agit, mettons la présente expression (609) de son terme général sous la forme . . . (610)

$$A_\mu \frac{(x-a)^\mu}{(r_1.r_2.r_3 \dots r_\mu)} = M_\mu . A_\mu . (x-a)^\mu \\ + M_{\mu-1} . A_{\mu-1} . (x-a)^{\mu-1} \\ + M_{\mu-2} . A_{\mu-2} . (x-a)^{\mu-2} \\ \dots \\ + M_1 . A_1 . (x-a);$$

et déterminons d'abord, dans cette expression générale, les coefficients M_μ , $M_{\mu-1}$, $M_{\mu-2}$, . . . M_1 , qui, d'après cette expression générale (609), sont . . . (610')

$$M_\mu = A_\mu . [A_1 \dots A(\mu-1)]_{\mu-1} \frac{(x-a)^\mu}{(r_1.r_2.r_3 \dots r_\mu)}, \\ M_{\mu-1} = A_{\mu-1} . [A_1 \dots A(\mu-1)]_{\mu-2} \frac{(x-a)^{\mu-1}}{(r_1.r_2.r_3 \dots r_\mu)}, \\ M_{\mu-2} = A_{\mu-2} . [A_1 \dots A(\mu-1)]_{\mu-3} \frac{(x-a)^{\mu-2}}{(r_1.r_2.r_3 \dots r_\mu)}, \\ M_1 = A_1 . [A_1 \dots A(\mu-1)]_0 \frac{(x-a)^1}{(r_1.r_2.r_3 \dots r_\mu)}.$$

Pour cela, formons les quantités auxiliaires . . . (611)

$$k_1 = \frac{k_1}{r_1}, \quad k_2 = \frac{k_2}{r_2}, \quad k_3 = \frac{k_3}{r_3}, \quad \dots \quad k_p = \frac{k_p}{r_p};$$

et observons qu'en vertu des constructions (575) et (583), nous avons généralement . . . (612)

$$x - a = rp - k_p.$$

pour un indice quelconque p des quantités r et k ; de sorte que, pour de tels indices quelconques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. de ces quantités r et k , nous aurons manifestement . . . (612')

$$\frac{(x-a)}{r\alpha} = (1-k_\alpha),$$

$$\frac{(x-a)^2}{r\alpha \cdot r\beta} = (1-k_\alpha)(1-k_\beta),$$

$$\frac{(x-a)^3}{r\alpha \cdot r\beta \cdot r\gamma} = (1-k_\alpha)(1-k_\beta)(1-k_\gamma),$$

etc., etc.

Substituant donc ces quantités (612), (612) et (612)' dans les expressions (610)' des coefficients $M_\mu, M_{\mu-1}, M_{\mu-2}, \dots, M_1$, on trouvera, pour ces coefficients, les valeurs . . . (613)

$$M_\mu = k_\mu \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-1} = [k_1 \dots k_\mu]_\mu,$$

$$M_{\mu-1} = k_\mu \cdot \left\{ [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-1} - \frac{\mu-1}{1} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-1} \right\},$$

$$M_{\mu-2} = k_\mu \cdot \left\{ [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-2} - \frac{\mu-2}{1} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-2} + \frac{(\mu-2)^{2!}}{1 \cdot 2!} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-1} \right\},$$

.

$$M_1 = k_\mu \cdot \left\{ [k_1 \dots k_{\mu-1}]_0 - \frac{1}{1} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_1 + \frac{1^{2!}}{1 \cdot 2!} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_2 - \frac{1^{3!}}{1 \cdot 2!} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_3 + \dots + (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{1^{(\mu-1)!}}{1 \cdot (\mu-1)!} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-1} \right\};$$

dont l'expression générale, pour un indice quelconque p , est manifestement . . . (613')

$$M_{\mu-p} = k_\mu \cdot \left\{ [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-p-1} - \frac{\mu-p}{1} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-p} + \frac{(\mu-p)^{2!}}{1 \cdot 2!} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-p+1} - \frac{(\mu-p)^{3!}}{1 \cdot 2!} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-p+2} + \dots + (-1)^p \cdot \frac{(\mu-p)^{p!}}{1 \cdot p!} \cdot [k_1 \dots k_{\mu-1}]_{\mu-1} \right\}.$$

Ainsi, en introduisant ces valeurs (613) des coefficients $M_\mu, M_{\mu-1}, M_{\mu-2},$

etc. dans l'expression (610) du terme général de notre série instrumentale (578), dont il s'agit de trouver la somme progressive des termes, nous aurons maintenant cette expression (610) complètement déterminée et appropriée à la sommation progressive de ces termes. En effet, prenant la somme sur ce terme général (610), depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = \omega$, savoir . . .

$$\sum \left\{ A_{\mu} \cdot \frac{(x-a)^{\mu}}{(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots r_{\mu})} \right\}_{\omega},$$

et indiquant ainsi par l'indice inférieur ω le nombre de ces termes, indice qui indiquera en même temps le nombre des éléments $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{\omega}$ que l'on aura déterminés par l'équation (606), on comprendra facilement que, par suite de la forme (610) qu'à l'aide des coefficients (610)' et (613) nous avons donnée à ce terme général, afin de l'appropriier ainsi à la sommation des termes analogues, la somme en question (614) aura nécessairement la forme . . . (614)'

$$\sum \left\{ A_{\mu} \cdot \frac{(x-a)^{\mu}}{(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots r_{\mu})} \right\}_{\omega} = (x-a)^{\omega} \cdot A_{\omega} \cdot P(\omega) + (x-a)^{\omega-1} \cdot A_{\omega-1} \cdot P(\omega-1) +$$

$$+ (x-a)^{\omega-2} \cdot A_{\omega-2} \cdot P(\omega-2) \dots + (x-a) \cdot A_1 \cdot P(1);$$

les quantités $P(\omega), P(\omega-1), P(\omega-2), \dots, P(1)$ étant les coefficients correspondants qu'il reste à découvrir et dont la détermination ne présente plus aucune difficulté. Il suffit, pour cela, de remarquer que, d'après la formation progressive de cette somme (614), en partant du dernier terme, correspondant à l'indice $\mu = \omega$, et en y joignant successivement tous les termes précédents, correspondant aux indices $\mu = (\omega-1), \mu = (\omega-2), \mu = (\omega-3)$, etc., on a, à l'aide des coefficients M donnés par les expressions (613), pour la détermination des coefficients $P(\omega), P(\omega-1), P(\omega-2)$, etc. en question, et nommément du coefficient général $P(\omega-p)$, correspondant à un indice quelconque p , la règle très-simple . . . (615)

$$P(\omega-p) = M_{\omega-p} + [P(\omega-p+1)]_{\{\omega = (\omega-1)\}};$$

en indiquant par l'indice inférieur $\{\omega = (\omega-1)\}$, que, dans le coefficient précédent $P(\omega-p+1)$, il faut diminuer l'indice ω d'une unité. Il suffit ainsi effectivement d'avoir l'expression générale du premier $P(\omega)$ de ces coefficients, pour pouvoir, en suivant cette règle (615), déterminer successivement, les uns par les autres, tous ces coefficients $P(\omega-1), P(\omega-2)$, etc., jusqu'au dernier $P(1)$. Et ce premier coefficient $P(\omega)$ se trouve donné immédiatement par cette même règle (615), puisque le coefficient précédent $P(\omega+1)$ est ici zéro, à cause que, dans la somme (614)', il n'existe pas de terme impliquant la puissance $(x-a)^{\omega+1}$. On aura donc, en vertu de cette règle elle-même (615), pour le premier coefficient $P(\omega)$, l'expression

générale . . . (616)

$$P(\varpi) = M_{\varpi} = [k_1 \dots k_{\varpi}]_{\varpi}.$$

Et alors, en suivant cette même règle (615), nous pourrions maintenant, toujours à l'aide des expressions (613) des coefficients M , déterminer tous les coefficients suivants $P(\varpi-1)$, $P(\varpi-2)$, $P(\varpi-3)$, . . . $P(1)$, dont il est question, comme nous allons le faire effectivement.

Pour l'indice $p=1$, la règle (615) nous donnera l'expression . . . (617)

$$P(\varpi-1) = M_{\varpi-1} + [P(\varpi)]_{(\varpi=[\varpi-1])};$$

c'est-à-dire . . . (617')

$$P(\varpi-1) = k_{\varpi} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-1}]_{\varpi-1} - \frac{\varpi-1}{1} \cdot k_{\varpi} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-1}]_{\varpi-1} \\ + [k_1 \dots k_{\varpi-1}]_{\varpi-1};$$

valeurs qui se réduisent à . . . (617)''

$$P(\varpi-1) = [k_1 \dots k_{\varpi}]_{\varpi-1} - \frac{\varpi-1}{1} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi}]_{\varpi}.$$

Pour l'indice $p=2$, la règle (615) nous donnera l'expression . . . (618)

$$P(\varpi-2) = M_{\varpi-2} + [P(\varpi-1)]_{(\varpi=[\varpi-1])};$$

c'est-à-dire . . . (618')

$$P(\varpi-2) = k_{\varpi} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-2}]_{\varpi-2} - \frac{\varpi-2}{1} \cdot k_{\varpi} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-2}]_{\varpi-2} \\ + [k_1 \dots k_{\varpi-2}]_{\varpi-2} - \frac{\varpi-2}{1} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-2}]_{\varpi-2} \\ + \frac{(\varpi-2)^{1/2}}{1^{1/2}} \cdot k_{\varpi} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-1}]_{\varpi-1};$$

valeurs qui se réduisent à . . . (618)''

$$P(\varpi-2) = [k_1 \dots k_{\varpi}]_{\varpi-2} - \frac{\varpi-2}{1} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi}]_{\varpi-1} \\ + \frac{(\varpi-2)^{1/2}}{1^{1/2}} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi}]_{\varpi}.$$

Pour l'indice $p=3$, la règle (615) nous donnera l'expression . . . (619)

$$P(\varpi-3) = M_{\varpi-3} + [P(\varpi-2)]_{(\varpi=[\varpi-1])};$$

c'est-à-dire . . . (619')

$$P(\varpi-3) = k_{\varpi} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-3}]_{\varpi-3} - \frac{\varpi-3}{1} \cdot k_{\varpi} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-3}]_{\varpi-3} \\ + [k_1 \dots k_{\varpi-3}]_{\varpi-3} - \frac{\varpi-3}{1} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-3}]_{\varpi-3} \\ + \frac{(\varpi-3)^{1/2}}{1^{1/2}} \cdot k_{\varpi} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-2}]_{\varpi-2} - \frac{(\varpi-3)^{1/2}}{1^{1/2}} \cdot k_{\varpi} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-1}]_{\varpi-1} \\ + \frac{(\varpi-3)^{1/2}}{1^{1/2}} \cdot [k_1 \dots k_{\varpi-2}]_{\varpi-2};$$

valeurs qui se réduisent à . . . (619)''

$$P(\varpi - 3) = [k_1 \dots k_w]_{w-3} - \frac{\varpi-3}{1} \cdot [k_1 \dots k_w]_{w-2} \\ + \frac{(\varpi-3)^{1!}}{1^{1!}} \cdot [k_1 \dots k_w]_{w-1} - \frac{(\varpi-3)^{2!}}{1^{2!}} \cdot [k_1 \dots k_w]_w.$$

Et considérant, d'une part, l'expression générale (613)' des coefficients M_{w-p} , et de l'autre, la présente formation uniforme des coefficients $P(\varpi-p)$ en question, on reconnaît que la loi générale des expressions de ces coefficients $P(\varpi-p)$ est manifestement . . . (620)

$$P(\varpi - p) = [k_1 \dots k_w]_{w-p} - \frac{(\varpi-p)}{1} \cdot [k_1 \dots k_w]_{w-p+1} + \\ + \frac{(\varpi-p)^{1!}}{1^{1!}} \cdot [k_1 \dots k_w]_{w-p+2} - \frac{(\varpi-p)^{2!}}{1^{2!}} \cdot [k_1 \dots k_w]_{w-p+3} \\ + \dots (-1)^p \cdot \frac{(\varpi-p)^{p!}}{1^{p!}} \cdot [k_1 \dots k_w]_w;$$

loi qui, pour le dernier $P(1)$ de ces coefficients, en faisant $p = \varpi - 1$, donnera l'expression . . . (621)

$$P(1) = [k_1 \dots k_w]_1 - [k_1 \dots k_w]_2 + [k_1 \dots k_w]_3 - [k_1 \dots k_w]_4 \\ + \dots (-1)^{w-1} \cdot [k_1 \dots k_w]_w.$$

Ainsi, par cette détermination générale (620) des présents coefficients $P(\varpi-p)$, la somme (614)' des ϖ termes dans notre série instrumentale (578), quelque grand que puisse être ce nombre ϖ de termes, correspondant au nombre ϖ des éléments $r_1, r_2, r_3, \dots, r_\varpi$ qui sont déterminés par l'équation (606), cette somme (614)', disons-nous, se trouve maintenant complètement déterminée. Et, comme nous l'avons prévu facilement, nous voyons, dans la présente expression générale des coefficients $P(\varpi-p)$, que cette somme (614)' ne contient réellement que des fonctions symétriques des quantités $k_1, k_2, k_3, \dots, k_w$ qui, d'après leur construction (612), sont formées des éléments $r_1, r_2, r_3, \dots, r_\varpi$, dont nous voulions ainsi éviter la détermination compliquée par leur susdite équation (606). — Il ne nous reste donc qu'à déterminer ces fonctions symétriques des quantités $k_1, k_2, k_3, \dots, k_w$, qui entrent définitivement, au moyen de l'expression générale (620), dans la somme en question (614)'. —

Pour cela, observons qu'en vertu de la première des relations générales (612)', nous avons, avec un indice quelconque α , pour toute quantité élémentaire r_α , au moyen de la quantité correspondante k_α , l'expression . . . (622)

$$r_\alpha = \frac{x - \alpha}{1 - k_\alpha};$$

ou bien, en désignant généralement par r et par k les quantités respectives $r_1, r_2, r_3, \dots, r_w$, et $k_1, k_2, k_3, \dots, k_w$, nous aurons . . . (623')

$$r = \frac{x-a}{1-k}.$$

Et substituant cette valeur de r dans l'équation (606), qui, par ses racines, sert à déterminer ces quantités $r_1, r_2, r_3, \dots, r_w$, nous obtiendrons pour la détermination de la quantité générale $(1-k)$, correspondant aux quantités $(1-k_1), (1-k_2), (1-k_3), \dots, (1-k_w)$, l'équation . . . (623)

$$0 = (1-k)^w - \frac{(x-a) \cdot R(\varpi)^{w-1}}{R(\varpi)_w} \cdot (1-k)^{w-1} + \frac{(x-a)^2 \cdot R(\varpi)^{w-2}}{R(\varpi)_w} \cdot (1-k)^{w-2} \\ - \frac{(x-a)^3 \cdot R(\varpi)^{w-3}}{R(\varpi)_w} \cdot (1-k)^{w-3} \dots (-1)^w \cdot \frac{(x-a)^w}{R(\varpi)_w} \cdot (1-k)^0;$$

ou bien, en multipliant tous les termes par $(-1)^w$, nous aurons, pour la détermination de la quantité générale $(k-1)$, l'équation . . . (623')

$$0 = (k-1)^w + \frac{(x-a) \cdot R(\varpi)^{w-1}}{R(\varpi)_w} \cdot (k-1)^{w-1} + \frac{(x-a)^2 \cdot R(\varpi)^{w-2}}{R(\varpi)_w} \cdot (k-1)^{w-2} \\ + \frac{(x-a)^3 \cdot R(\varpi)^{w-3}}{R(\varpi)_w} \cdot (k-1)^{w-3} \dots + \frac{(x-a)^w}{R(\varpi)_w} \cdot (k-1)^0.$$

Or, si l'on forme la quantité . . . (624)

$$k-1 = z, \quad \text{qui donne } k = z+1;$$

et si, considérant l'équation (623') comme une fonction de z , on la développe par rapport aux puissances de $(z+1)$, on obtiendra l'équation identique . . . (624')

$$0 = N(\varpi)_w + N(\varpi)_{w-1} \cdot (z+1) + N(\varpi)_{w-2} \cdot (z+1)^2 + \\ + N(\varpi)_{w-3} \cdot (z+1)^3 \dots + N(\varpi)_0 \cdot (z+1)^w;$$

c'est-à-dire, l'équation . . . (625)

$$0 = N(\varpi)_w \cdot k^w + N(\varpi)_{w-1} \cdot k^{w-1} + N(\varpi)_{w-2} \cdot k^{w-2} \dots + N(\varpi)_0, \\ \text{dont les coefficients seront} \dots (625')$$

$$N(\varpi)_w = \frac{(-1)^w}{R(\varpi)_w} \left\{ 1 \cdot R(\varpi)_w - (x-a) \cdot R(\varpi)_{w-1} + (x-a)^2 \cdot R(\varpi)_{w-2} - (x-a)^3 \cdot R(\varpi)_{w-3} \dots (-1)^w \cdot (x-a)^w \cdot R(\varpi)_0 \right\},$$

$$N(\varpi)_{w-1} = \frac{(-1)^{w-1}}{1 \cdot R(\varpi)_w} \left\{ \varpi \cdot R(\varpi)_w - (\varpi-1) (x-a) \cdot R(\varpi)_{w-1} + (\varpi-2) (x-a)^2 \cdot R(\varpi)_{w-2} - (\varpi-3) \cdot (x-a)^3 \cdot R(\varpi)_{w-3} \dots (-1)^{w-1} \cdot 1 \cdot (x-a)^{w-1} \cdot R(\varpi)_1 \right\},$$

$$N(\varpi)_{w-2} = \frac{(-1)^{w-2}}{1 \cdot 2 \cdot R(\varpi)_w} \left\{ \varpi^{21-1} \cdot R(\varpi)_w - (\varpi-1)^{21-1} \cdot (x-a) \cdot R(\varpi)_{w-1} + (\varpi-2)^{21-1} \cdot (x-a)^2 \cdot R(\varpi)_{w-2} - (\varpi-3)^{21-1} \cdot (x-a)^3 \cdot R(\varpi)_{w-3} \dots (-1)^{w-2} \cdot 2^{21-1} \cdot (x-a)^{w-2} \cdot R(\varpi)_2 \right\},$$

$$N(\varpi)_0 = \frac{(-1)^0}{1 \cdot 0^{21} \cdot R(\varpi)_w} \left\{ \varpi^{21-1} \cdot R(\varpi)_w \right\} = 1;$$

et dont l'expression générale est manifestement . . . (626)

$$N(\varpi)_{w-p} = \frac{(-1)^{w-p}}{1^{p1} \cdot R(\varpi)_w} \left\{ \varpi^{p1-1} \cdot R(\varpi)_w - (\varpi-1)^{p1-1} \cdot (x-a) \cdot R(\varpi)_{w-1} + (\varpi-2)^{p1-1} \cdot (x-a)^2 \cdot R(\varpi)_{w-2} - (\varpi-3)^{p1-1} \cdot (x-a)^3 \cdot R(\varpi)_{w-3} + \dots (-1)^{w-p} \cdot 1^{p1-1} \cdot (x-a)^{w-p} \cdot R(\varpi)_p \right\}.$$

Mais, l'équation (625), dont les ϖ racines sont les ϖ quantités $k_1, k_2, k_3,$

. . . k_w , est identique avec l'équation . . . (627)

$$0 = k^w - [k_1 \dots k_w]_1 \cdot k^{w-1} + [k_1 \dots k_w]_2 \cdot k^{w-2} - [k_1 \dots k_w]_3 \cdot k^{w-3} + [k_1 \dots k_w]_4 \cdot k^{w-4} \dots (-1)^w \cdot [k_1 \dots k_w]_w.$$

Donc, comparant les coefficients de ces équations identiques (625) et (627), nous aurons . . . (628)

$$[k_1 \dots k_w]_0 = + N(\varpi)_0 = 1,$$

$$[k_1 \dots k_w]_1 = - N(\varpi)_1,$$

$$[k_1 \dots k_w]_2 = + N(\varpi)_2,$$

$$[k_1 \dots k_w]_3 = - N(\varpi)_3,$$

etc., et généralement . . . (628')

$$[k_1 \dots k_w]_{w-p} = (-1)^{w-p} \cdot N(\varpi)_{w-p}.$$

Telles sont définitivement les valeurs de ces sommes de produits combinatoires qui entrent dans l'expression générale (620) des coefficients $P(\varpi - p)$ par lesquels s'opère la somme progressive (614) des termes théoriques dans notre série instrumentale (578). Et de cette manière, il n'y a réellement besoin de résoudre aucune équation (606) ou (623) pour arriver à la détermination complète de ces décisifs coefficients $P(\varpi - p)$.

Si l'on substitue donc, dans leur expression générale (620), les présentes valeurs (628), on aura définitivement, pour ces coefficients $P(\varpi - p)$, l'expression générale . . . (629)

$$\begin{aligned} P(\varpi - p) = & (-1)^{\varpi-p} \cdot \left\{ N(\varpi)_{\varpi-p} + \frac{\varpi-p}{1} \cdot N(\varpi)_{\varpi-p+1} + \right. \\ & + \frac{(\varpi-p)^{1!}}{1^{1!}} \cdot N(\varpi)_{\varpi-p+2} + \frac{(\varpi-p)^{2!}}{1^{2!}} \cdot N(\varpi)_{\varpi-p+3} + \\ & + \frac{(\varpi-p)^{3!}}{1^{3!}} \cdot N(\varpi)_{\varpi-p+4} \cdot \cdot \cdot + \left. \frac{(\varpi-p)^{p!}}{1^{p!}} \cdot N(\varpi)_{\varpi} \right\}. \end{aligned}$$

Et par conséquent, les valeurs particulières de ces coefficients, en les prenant dans l'ordre progressif de leurs indices $(\varpi - p)$, savoir, $(\varpi - p) = 1$, $(\varpi - p) = 2$, $(\varpi - p) = 3$, etc., et en les marquant alors par un indice inférieur ϖ , pour indiquer le nombre des éléments théoriques qu'ils impliquent, seront . . . (630)

$$\begin{aligned} P(1)_{\varpi} &= - \left\{ N(\varpi)_1 + N(\varpi)_2 + N(\varpi)_3 \cdot \cdot \cdot + N(\varpi)_{\varpi} \right\}, \\ P(2)_{\varpi} &= + \left\{ N(\varpi)_2 + 2 \cdot N(\varpi)_3 + 3 \cdot N(\varpi)_4 \cdot \cdot \cdot + \frac{\varpi-1}{1} \cdot N(\varpi)_{\varpi} \right\}, \\ P(3)_{\varpi} &= - \left\{ N(\varpi)_3 + 3 \cdot N(\varpi)_4 + 6 \cdot N(\varpi)_5 \cdot \cdot \cdot + \frac{(\varpi-2)^{2!}}{1^{2!}} \cdot N(\varpi)_{\varpi} \right\}, \\ P(4)_{\varpi} &= + \left\{ N(\varpi)_4 + 4 \cdot N(\varpi)_5 + 10 \cdot N(\varpi)_6 \cdot \cdot \cdot + \frac{(\varpi-3)^{3!}}{1^{3!}} \cdot N(\varpi)_{\varpi} \right\}, \\ P(5)_{\varpi} &= - \left\{ N(\varpi)_5 + 5 \cdot N(\varpi)_6 + 15 \cdot N(\varpi)_7 \cdot \cdot \cdot + \frac{(\varpi-4)^{4!}}{1^{4!}} \cdot N(\varpi)_{\varpi} \right\}, \\ &\text{etc., etc.} \end{aligned}$$

Et quant aux quantités $N(\varpi)_1$, $N(\varpi)_2$, $N(\varpi)_3$, etc., qui entrent ainsi dans la construction de ces coefficients $P(1)_{\varpi}$, $P(2)_{\varpi}$, $P(3)_{\varpi}$, etc., leurs valeurs, d'après leur expression générale (606), en les prenant aussi dans l'ordre progressif de leurs indices $(\varpi - p)$, savoir, comme plus haut, $(\varpi - p) = 1$, $(\varpi - p) = 2$, $(\varpi - p) = 3$, etc., seront . . . (631)

$$\begin{aligned}
N(\omega)_1 &= - \left\{ \omega - (x-a) \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-1}}{R(\omega)_{\omega}} \right\}, \\
N(\omega)_2 &= + \left\{ \frac{(\omega-1)^{1!}}{1^{1!}} - \frac{(\omega-1)}{1} \cdot (x-a) \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-1}}{R(\omega)_{\omega}} + (x-a)^2 \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-2}}{R(\omega)_{\omega}} \right\}, \\
N(\omega)_3 &= - \left\{ \frac{(\omega-2)^{2!}}{1^{2!}} - \frac{(\omega-2)}{1^{2!}} \cdot (x-a) \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-1}}{R(\omega)_{\omega}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\omega-2)}{1} \cdot (x-a)^2 \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-2}}{R(\omega)_{\omega}} - (x-a)^3 \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-3}}{R(\omega)_{\omega}} \right\}, \\
N(\omega)_4 &= + \left\{ \frac{(\omega-3)^{3!}}{1^{3!}} - \frac{(\omega-3)}{1^{3!}} \cdot (x-a) \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-1}}{R(\omega)_{\omega}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\omega-3)^{2!}}{1^{2!}} \cdot (x-a)^2 \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-2}}{R(\omega)_{\omega}} - \frac{(\omega-3)}{1} \cdot (x-a)^3 \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-3}}{R(\omega)_{\omega}} + \right. \\
&\quad \left. + (x-a)^4 \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-4}}{R(\omega)_{\omega}} \right\}, \\
&\text{etc., etc.;}
\end{aligned}$$

dont l'expression générale, dans cet ordre progressif des indices, résultant toujours de l'expression générale et primitive (626), prend ici, pour l'indice μ , la forme . . . (632)

$$\begin{aligned}
N(\omega)_{\mu} &= (-1)^{\mu} \cdot \left\{ \frac{(\omega - \mu + 1)^{\mu!}}{1^{\mu!}} - \frac{(\omega - \mu + 1)^{(u-1)!}}{1^{(u-1)!}} \cdot (x-a) \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-1}}{R(\omega)_{\omega}} + \right. \\
&\quad + \frac{(\omega - \mu + 1)^{(u-2)!}}{1^{(u-2)!}} \cdot (x-a)^2 \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-2}}{R(\omega)_{\omega}} \\
&\quad - \frac{(\omega - \mu + 1)^{(u-3)!}}{1^{(u-3)!}} \cdot (x-a)^3 \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-3}}{R(\omega)_{\omega}} \\
&\quad \dots \dots \dots \\
&\quad \left. + (-1)^{u-1} \cdot \frac{(\omega - \mu + 1)}{1} \cdot (x-a)^{u-1} \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-\mu+1}}{R(\omega)_{\omega}} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^u \cdot (x-a)^u \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-\mu}}{R(\omega)_{\omega}} \right\};
\end{aligned}$$

les quantités $R(\omega)_0$, $R(\omega)_1$, $R(\omega)_2$, $R(\omega)_3$, . . . $R(\omega)_{\omega}$, étant données immédiatement, par les équations linéaires (605), en fonctions des différentielles de la fonction problématique Fx , eu ne perdant pas de vue que, d'après la formation (599) de ces quantités, on a toujours . . . (632')

$$R(\omega)_0 = 1.$$

Ainsi, quelque grand que puisse être, dans notre série instrumentale (578), le nombre ω des termes théoriques, c'est-à-dire, le nombre ω des éléments

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_{\omega}$, qui, pour cette progressive génération théorique de la fonction Fx , sont déterminés par les équations (605), la somme (614) de ces termes se trouve maintenant, par les valeurs (630) et (631) des quantités P et N , et surtout par leurs expressions générales (629) et (632), complètement et rigoureusement déterminée. — Bien plus, nous pouvons même obtenir, indépendamment des fonctions auxiliaires N , données par les formules (631) et (632) l'expression générale des fonctions fondamentales P , données par les formules (629) et (630), telle que cette expression générale résulte de la substitution des fonctions auxiliaires (631) dans les fonctions fondamentales (630). Mais cette substitution qui conduit ainsi aux expressions générales des fonctions fondamentales $P(1)_{\omega}$, $P(2)_{\omega}$, $P(3)_{\omega}$, etc., implique nos susdites fonctions alephs algébriques qui ne sont pas encore familières aux géomètres, et dont, d'ailleurs, nous n'avons pas encore produit toute la théorie. Nous nous bornerons donc ici à présenter les résultats de ces substitutions; résultats généraux que l'on pourra constater facilement, aussi loin que l'on voudra, en opérant ces substitutions avec des valeurs particulières des indices q et ω des fonctions $P(q)_{\omega}$ en question. Toutefois, pour faire voir aux géomètres par quels moyens on peut obtenir ces résultats généraux, nous allons exposer ces moyens au moins pour les deux premières de ces fonctions fondamentales $P(1)_{\omega}$, $P(2)_{\omega}$, $P(3)_{\omega}$, etc., dont il s'agit, en nous réservant de les faire connaître complètement lorsque nous aurons produit la susdite théorie générale de nos fonctions alephs algébriques, qui forment ici ces moyens en question.

Pour ce qui concerne la première $P(1)_{\omega}$ de ces fonctions fondamentales P , laquelle n'implique pas encore les fonctions alephs, ou du moins qui n'implique que celles de ces fonctions dont les éléments sont tous égaux à l'unité, et qui disparaissent dans le cas présent, voici sa formation progressive... (633)

$$\begin{aligned}
 P(1)_{\omega} &= 1 - (1-1)^{\omega} - (1-1)^{\omega-1} \cdot (x-a) \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-1}}{R(\omega)_{\omega}} \\
 &- (1-1)^{\omega-2} \cdot (x-a)^2 \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-2}}{R(\omega)_{\omega}} - (1-1)^{\omega-3} \cdot (x-a)^3 \cdot \frac{R(\omega)_{\omega-3}}{R(\omega)_{\omega}} \\
 &- \text{etc., etc.,} \quad \text{jusqu'à} \quad - (1-1)^0 \cdot (x-a)^{\omega} \cdot \frac{R(\omega)_{\omega}}{R(\omega)_{\omega}};
 \end{aligned}$$

formation qui, pour tout indice ω , se réduit manifestement à l'expression très-simple... (633')

$$P(1)_{\omega} = 1 - (x-a)^{\omega} \cdot \frac{R(\omega)_{\omega}}{R(\omega)_{\omega}}.$$

Pour ce qui concerne la deuxième $P(2)_{\omega}$ des fonctions fondamentales P , laquelle implique déjà ostensiblement les fonctions alephs, et notamment celles dont les éléments sont les nombres naturels, voici sa formation progressive... (634)

$$\begin{aligned}
P(2)_w &= 1 + \left\{ -1.(1-1)^w + (-1)^{w-1}.N[0+1+2+\dots+\varpi]^{(1-w)} \right\} \\
&+ (x-a) \cdot \frac{R(\varpi)_w}{R(\varpi)_w} \left\{ 0.(1-1)^{w-1} + (-1)^{(w-1)-1}.N[0+1+2+\dots+(\varpi-1)]^{(2-w)} \right\} \\
&+ (x-a)^2 \cdot \frac{R(\varpi)_w}{R(\varpi)_w} \left\{ 1.(1-1)^{w-2} + (-1)^{(w-2)-1}.N[0+1+2+\dots+(\varpi-2)]^{(3-w)} \right\} \\
&+ (x-a)^3 \cdot \frac{R(\varpi)_w}{R(\varpi)_w} \left\{ 2.(1-1)^{w-3} + (-1)^{(w-3)-1}.N[0+1+2+\dots+(\varpi-3)]^{(4-w)} \right\} \\
&\dots \dots \dots \\
&+ (x-a)^w \cdot \frac{R(\varpi)_w}{R(\varpi)_w} \left\{ (\varpi-1).(1-1)^0 + (-1)^{0-1}.N[0]^{(1)} \right\};
\end{aligned}$$

formation qui, en ayant égard à ce que les présentes fonctions alephs deviennent zéro lorsque leurs exposants sont négatifs, se réduit à son tour à l'expression générale . . . (634)

$$P(2)_w = 1 - (x-a)^{w-1} \cdot \frac{R(\varpi)_1}{R(\varpi)_w} + (\varpi-1).(x-a)^w \cdot \frac{R(\varpi)_0}{R(\varpi)_w}.$$

Pour ce qui concerne les fonctions suivantes $P(3)_w$, $P(4)_w$, $P(5)_w$, etc., elles impliquent, dans leur formation progressive, des fonctions alephs supérieures, nommément celles dont les éléments sont successivement les nombres figurés des ordres supérieurs; et cette formation progressive, telle que nous la ferons connaître lorsque nous aurons produit ou plutôt complété la théorie de nos fonctions alephs de tous les ordres, se réduit constamment, dans les cas présents, à des expressions générales et très-simples.

Voici donc le système entier de ces expressions générales de nos présentes fonctions fondamentales P dont il est question . . . (635)

$$\begin{aligned}
P(1)_w &= 1 - (x-a)^w \cdot \frac{R(\varpi)_0}{R(\varpi)_w}, \\
P(2)_w &= 1 - (x-a)^{w-1} \cdot \frac{R(\varpi)_1}{R(\varpi)_w} + \frac{(\varpi-1)}{1} \cdot \frac{R(\varpi)_0}{R(\varpi)_w}, \\
P(3)_w &= 1 - (x-a)^{w-2} \cdot \frac{R(\varpi)_2}{R(\varpi)_w} + \frac{(\varpi-2)}{1} \cdot (x-a)^{w-1} \cdot \frac{R(\varpi)_1}{R(\varpi)_w} \\
&\quad - \frac{(\varpi-2)}{1^{2|1}} \cdot (x-a)^w \cdot \frac{R(\varpi)_0}{R(\varpi)_w}, \\
P(4)_w &= 1 - (x-a)^{w-3} \cdot \frac{R(\varpi)_3}{R(\varpi)_w} + \frac{(\varpi-3)}{1} \cdot (x-a)^{w-2} \cdot \frac{R(\varpi)_2}{R(\varpi)_w} \\
&\quad - \frac{(\varpi-3)}{1^{2|1}} \cdot (x-a)^{w-1} \cdot \frac{R(\varpi)_1}{R(\varpi)_w} + \frac{(\varpi-3)}{1^{3|1}} \cdot (x-a)^w \cdot \frac{R(\varpi)_0}{R(\varpi)_w},
\end{aligned}$$

etc., etc.; et généralement, pour un indice quelconque p . . . (636)

$$\begin{aligned} P(p)_w &= 1 - (x-a)^{-p+1} \cdot \frac{R(\varpi)_{p-1}}{R(\varpi)_w} + \\ &+ \frac{(\varpi-p+1)}{1} \cdot (x-a)^{-p+2} \cdot \frac{R(\varpi)_{p-2}}{R(\varpi)_w} \\ &- \frac{(\varpi-p+1)^{2!}}{1 \cdot 2!} \cdot (x-a)^{-p+3} \cdot \frac{R(\varpi)_{p-3}}{R(\varpi)_w} \\ &+ \frac{(\varpi-p+1)^{3!}}{1 \cdot 2 \cdot 3!} \cdot (x-a)^{-p+4} \cdot \frac{R(\varpi)_{p-4}}{R(\varpi)_w} \\ &\dots \dots \dots \\ &(-1)^p \cdot \frac{(\varpi-p+1)^{(p-1)!}}{1 \cdot (p-1)!} \cdot (x-a)^{-p} \cdot \frac{R(\varpi)_0}{R(\varpi)_w}; \end{aligned}$$

en ne perdant pas de vue que les fonctions $R(\varpi)_0$, $R(\varpi)_1$, $R(\varpi)_2$, $R(\varpi)_3$, . . . $R(\varpi)_w$, qui entrent dans ces expressions, et qui, à l'exception de la première, dont la valeur est $R(\varpi)_0 = 1$, sont déterminées par les équations linéaires (605), ont, sous leur forme générale $R(\varpi)_p$, la valeur . . . (636)

$$R(\varpi)_p = 0,$$

toutes les fois que l'indice p est plus grand que le nombre ϖ , et toutes les fois que cet indice p est négatif, et cela en vertu de la formation même (599) de ces fonctions, comme sommes des produits combinatoires des ϖ éléments $r_1, r_2, r_3, \dots, r_\varpi$.

Ainsi, avec ces expressions générales (635) et (636), la somme (614) des ϖ termes qui forment la génération progressive de la nature elle-même de toute fonction problématique Fx , se trouve maintenant tout à fait accomplie. En effet, si, pour abréger les expressions, nous désignons simplement par $\Sigma(\varpi)$ cette somme (614), c'est-à-dire si, en y renversant l'ordre des termes, pour suivre l'ordre progressif des indices, comme dans les expressions (630) et (635) de ses fonctions constituantes P , nous faisons . . . (637)

$$\begin{aligned} \Sigma(\varpi) &= \mathfrak{A}_1 \cdot P(1)_w \cdot (x-a)^1 + \mathfrak{A}_2 \cdot P(2)_w \cdot (x-a)^2 + \\ &+ \mathfrak{A}_3 \cdot P(3)_w \cdot (x-a)^3 \dots + \mathfrak{A}_w \cdot P(w)_w \cdot (x-a)^w; \end{aligned}$$

cette somme, si décisive dans notre grande question actuelle, se trouvera, pour un nombre quelconque ϖ de ses termes, non-seulement déterminée rigoureusement, mais de plus exprimée de la manière la plus directe et la plus simple par les présentes formules (635) et (636).

Et alors la fonction problématique Fx , dont il s'agissait d'opérer cette pro-

gressive génération théorique, recevra, d'après sa génération absolue (588) et (588)', réalisée ainsi dans notre série instrumentale (578), la forme . . .
 . . . (638)

$$Fx = Fa + \Sigma(\varpi) + S(\varpi + 1);$$

dans laquelle, conformément à l'expression générale (142) ou (146) de notre méthode suprême, la quantité $S(\varpi + 1)$ représente la série complémentaire . . .
 . . . (639)

$$S(\varpi + 1) = (\varpi x)^{\varpi+1} \cdot \left\{ \dot{x}_{\varpi+1} + \dot{x}_{\varpi+1} \cdot (\varpi x) + \dot{x}_{\varpi+1} \cdot (\varpi x)^2 + \right. \\ \left. + \dot{x}_{\varpi+1} \cdot (\varpi x)^3 + \text{etc., etc.} \right\};$$

la fonction génératrice ϖx étant une fonction arbitraire, mais telle que . . .
 . . . (639')

l'équation $\varpi x = 0$ donne $x = a$.

En effet, d'après cette détermination de la série complémentaire (639), il est manifeste que la génération présente (638) de la fonction problématique Fx correspond parfaitement à la génération absolue (138) ou (138)', sur laquelle se fonde notre méthode suprême (142), (143), etc.; car lorsque, dans cette génération absolue (138) ou (138)', on suppose indéfiniment petit l'accroissement ξ , ses fonctions génératrices reçoivent ici, d'abord, les déterminations distinctes . . . (640)

$$\Omega_0 = 1, \quad \Omega_1 = P(1)_w \cdot (x - a), \quad \Omega_2 = P(2)_w \cdot (x - a)^2,$$

$$\Omega_3 = P(3)_w \cdot (x - a)^3, \quad . . . \quad \Omega_w = P(w)_w \cdot (x - a)^w;$$

et ensuite, les déterminations progressives . . . (640')

$$\Omega_{w+1} = (\varpi x)^{\varpi+1}, \quad \Omega_{w+2} = (\varpi x)^{\varpi+2}, \quad \Omega_{w+3} = (\varpi x)^{\varpi+3}, \text{ etc., etc.}$$

C'est ici le lieu de faire remarquer que la présente expression (637) de la somme $\Sigma(\varpi)$ des ϖ premiers termes de notre série instrumentale (578), transformée ainsi en génération théorique, ne constitue plus une simple série qui, selon l'apparence, procéderait par rapport aux puissances de la fonction élémentaire $(x - a)$; car, comme on la voit dans la présente indication (640) de ses véritables fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, . . . \Omega_w$, ces fonctions impliquent en outre les quantités $P(1)_w, P(2)_w, P(3)_w, . . . P(w)_w$, qui, d'après leur détermination (630) et (635), sont des fonctions de la variable x , et nommément des fonctions des différentielles générales de la fonction problématique Fx , telles précisément qu'il fallait les déterminer pour obtenir la génération théorique de cette fonction Fx .

Quant à la nature de la fonction arbitraire ϖx , qu'il faut employer pour la série complémentaire (639), on peut prendre à volonté telle fonction que l'on voudra, pourvu qu'elle satisfasse à la condition (639'). Toutefois, d'après les considérations qui, dans la seconde section de la Philosophie de la Tech-

née, nous ont conduits aux fonctions (416) et (416)', servant de fonctions génératrices à nos quatre schémas de convergence, on peut choisir ici l'une de ces fonctions, et plus spécialement, à cause des avantages qui lui sont attachés, la fonction (416)', et nommément (417)', qui sert de fonction génératrice à notre *série-commune*. — Nous prendrons donc, pour la fonction génératrice φx de la présente série complémentaire (639), la fonction très-simple . . . (641)

$$\varphi x = \frac{x - a}{a + x};$$

dans laquelle la quantité constante a est arbitraire, et peut toujours être prise assez grande pour que la valeur de cette fonction soit plus petite que l'unité, quelles que soient les limites, positives ou négatives, de la variable x .

Pour ce qui concerne les coefficients Ξ_{n+1} , Ξ_{n+2} , etc., de cette série complémentaire, il est manifeste que, puisque la présente (641) fonction génératrice φx satisfait à la condition (139) sous laquelle sont formées les expressions (140), (141), etc., qui servent de base à notre méthode suprême (142), (143), etc., nous aurons, d'après les expressions (141)', pour les coefficients en question, l'expression générale . . . (642)

$$\Xi_{n+p} = \frac{\Psi[d^{v_1}\Omega_1, d^{v_2}\Omega_2, \dots, d^{v_{\omega}}\Omega_{\omega}, d^{v(\omega+1)}(\varphi x)^{\omega+1}, \dots, d^{v(\omega+p-1)}(\varphi x)^{\omega+p-1}, d^{v(\omega+p)}\varphi x]}{\Psi[d^{v_1}\Omega_1, d^{v_2}\Omega_2, \dots, d^{v_{\omega}}\Omega_{\omega}, d^{v(\omega+1)}(\varphi x)^{\omega+1}, d^{v(\omega+2)}(\varphi x)^{\omega+2}, \dots, d^{v(\omega+p)}(\varphi x)^{\omega+p}]},$$

les fonctions distinctes $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_{\omega}$, étant les présentes fonctions (640), et les exposants $v_1, v_2, v_3, \dots, v(\omega+p)$, sur lesquels portent les permutations dans les fonctions schins, ayant toujours les valeurs . . . (642)'

$$v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3, \dots, v(\omega+p) = \omega + p;$$

en ne perdant pas de vue qu'après les différentiations il faudra mettre à la place de x la quantité a , comme l'indique le point placé sur la lettre Ξ .

Or, pour introduire l'uniformité dans la présente expression générale (642), formons avec les quantités $P(1)_{\omega}, P(2)_{\omega}, P(3)_{\omega}$, etc., qui entrent dans la construction (640) des fonctions génératrices distinctes $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., la fonction générale . . . (643)

$$\Phi_{\mu} x = (x - a) \cdot V^{\mu} P(\mu)_{\omega};$$

l'indice μ étant un nombre entier quelconque, depuis $\mu=1$, jusqu'à $\mu=\omega$. Nous aurons alors, à l'aide des simples puissances successives de ces fonctions, nos présentes (640) fonctions génératrices . . . (644)

$$\Omega_1 = (\Phi_1 x) = (x - a) \cdot P(1)_{\omega}, \quad \Omega_2 = (\Phi_2 x)^2 = (x - a)^2 \cdot P(2)_{\omega},$$

$$\Omega_3 = (\Phi_3 x)^3 = (x - a)^3 \cdot P(3)_{\omega}, \text{ etc., } \quad \text{jusqu'à}$$

$$\Omega_{\omega} = (\Phi_{\omega} x)^{\omega} = (x - a)^{\omega} \cdot P(\omega)_{\omega}.$$

Désignons de plus, par la même caractéristique Φ , mais sans indice inférieur, notre ultérieure (641) fonction génératrice φx , savoir . . . (645)

$$\Phi x = \frac{x-a}{n+x};$$

et nous aurons, pour les présentes puissances progressives (640)', la notation . . . (646)

$$\Omega_{w+1} = (\varphi x)^{w+1} = (\Phi x)^{w+1} = \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^{w+1},$$

$$\Omega_{w+2} = (\varphi x)^{w+2} = (\Phi x)^{w+2} = \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^{w+2},$$

etc., jusqu'à . . . (646)'

$$\Omega_{w+p} = (\varphi x)^{w+p} = (\Phi x)^{w+p} = \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^{w+p}.$$

Mais, en considérant que, dans les distinctes fonctions génératrices (644), l'exposant de la puissance est toujours identique avec l'indice inférieur ou le rang de ces fonctions, on peut y effacer provisoirement cet indice inférieur, en se bornant à le suppléer mentalement par l'exposant identique de la puissance. De cette manière, on introduira une uniformité dans la notation des deux espèces de fonctions génératrices, les distinctes (644) et les progressives (646), sans les confondre, en observant que, pour les exposants des puissances, depuis 1 jusqu'à ∞ inclusivement, on doit toujours sous-entendre un indice inférieur à la caractéristique Φ , égal à l'exposant de sa puissance. — Alors, par cette uniformité de notation, l'expression générale (642) des coefficients de notre série complémentaire (639) prendra la forme plus simple . . . (647)

$$\Xi_{w+p} = \frac{\Psi[d^{(1)}(\Phi x) \cdot d^{(2)}(\Phi x)^2 \cdot d^{(3)}(\Phi x)^3 \cdot \dots \cdot d^{(w+p-1)}(\Phi x)^{w+p-1} \cdot d^{(w+p)}(\Phi x)^{w+p}]}{\Psi[d^{(1)}(\Phi x) \cdot d^{(2)}(\Phi x)^2 \cdot d^{(3)}(\Phi x)^3 \cdot \dots \cdot d^{(w+p-1)}(\Phi x)^{w+p-1} \cdot d^{(w+p)}(\Phi x)^{w+p}]};$$

en ne perdant pas de vue que, pour tout exposant des puissances de la fonction Φx , compris entre les nombres 1 et ∞ inclusivement, il faut attribuer à la caractéristique Φ un indice inférieur, égal à l'exposant de sa puissance, pour conserver la différence entre les deux espèces de fonctions génératrices, les distinctes (644) et les progressives (646).

Sous cette forme régulière (647), nous pouvons maintenant appliquer à cette expression notre loi générale des séries, telle que, sous les marques (149) et (149)', nous l'avons produite dans la seconde section de la Philosophie de la Technie, en supposant ici que l'accroissement ξ qui entre dans cette loi (149), est indéfiniment petit, et par conséquent que les différences qui forment l'expression (149)', sont des différentielles, comme nous l'avons fait déjà pour la loi (166) et (166)'. — Or, en considérant que notre présente fonction générale Φx est telle que, dans sa double signification (643) et (645), on a $\Phi x = 0$ lorsque $x = a$, valeur qu'il faut y introduire finalement, nous aurons d'abord,

d'après l'expression (149)'', la première simplification présente . . . (648)

$$\dot{z}_{u+p} = \frac{\Psi[d^{r_1}(\Phi x) \cdot d^{r_2}(\Phi x)^2 \cdot d^{r_3}(\Phi x)^3 \cdot \dots \cdot d^{r(u+p-1)}(\Phi x)^{u+p-1} \cdot d^{r(u+p)}(F x)]}{d(\Phi x) \cdot d^2(\Phi x)^2 \cdot d^3(\Phi x)^3 \cdot \dots \cdot d^{u+p}(\Phi x)^{u+p}}$$

Et par la même considération de ce que $\Phi x = 0$ lorsque $x = a$, nous aurons de plus, en vertu de l'expression générale (160), en faisant ici également $(u+p) = \mu$, la simplification ultérieure . . . (649)

$$\begin{aligned} \dot{z}_u &= \frac{1}{d^u(\Phi x)^u} \left\{ d^u F x - d^{u-1} F x \cdot \frac{d^u(\Phi x)^{u-1}}{d^{u-1}(\Phi x)^{u-1}} + \right. \\ &\quad + d^{u-2} F x \cdot \frac{\Psi[d^{r_1}(\Phi x) \cdot d^{r_2}(\Phi x)^2 \cdot d^{r_3}(\Phi x)^3 \cdot \dots \cdot d^{r(u-2)}(\Phi x)^{u-2}]}{d^{u-2}(\Phi x)^{u-2} \cdot d^{u-1}(\Phi x)^{u-1}} \\ &\quad - d^{u-3} F x \cdot \frac{\Psi[d^{r_1}(\Phi x) \cdot d^{r_2}(\Phi x)^2 \cdot d^{r_3}(\Phi x)^3 \cdot \dots \cdot d^{r(u-3)}(\Phi x)^{u-3} \cdot d^{r(u-2)}(\Phi x)^{u-2}]}{d^{u-3}(\Phi x)^{u-3} \cdot d^{u-2}(\Phi x)^{u-2} \cdot d^{u-1}(\Phi x)^{u-1}} \\ &\quad \dots \dots \dots \left. (-1)^{u-1} \cdot d F x \cdot \frac{\Psi[d^{r_1}(\Phi x) \cdot d^{r_2}(\Phi x)^2 \cdot d^{r_3}(\Phi x)^3 \cdot \dots \cdot d^{r(u-1)}(\Phi x)^{u-1}]}{d(\Phi x) \cdot d^2(\Phi x)^2 \cdot d^3(\Phi x)^3 \cdot \dots \cdot d^{u-1}(\Phi x)^{u-1}} \right\} \end{aligned}$$

Ensuite, comme nous l'avons fait pour arriver aux expressions (161) et (161)', il faut développer les fonctions schies qui entrent dans l'expression précédente, d'après le procédé d'exclusion des termes superflus, de ceux qui, par suite de $\Phi x = 0$ pour $x = a$, deviennent zéro lorsque, dans les différentielles $d^q(\Phi x)^q$, l'exposant q est plus grand que l'ordre p ; procédé que nous avons indiqué dans l'Errata annexé à notre *Philosophie de l'Infini*, d'après lequel nous avons effectivement opéré la première et principale de ces exclusions sous les marques susdites (161) et (161)', suivant lesquelles on peut ici l'opérer également. Et par cette exclusion complète des termes superflus, le nombre total de termes, qui, dans la fonction schie de l'expression générale (648), serait $1^{(u+p)!}$, ne sera plus que 2^{u+p-1} .

Il ne nous reste donc qu'à déterminer les différentielles qui entrent dans la présente expression générale (649). Et pour cela, remarquons que, dans le dénominateur des termes qui forment cette expression, les différentielles $d^p(\Phi x)^p$ sont telles, que leur ordre p est toujours égal à l'exposant q de la puissance, et que, dans le numérateur de ces termes, lorsqu'on y aura opéré la susdite exclusion (161) et (161)', les différentielles $d^p(\Phi x)^q$ seront telles que, dans les unes, on aura $p = q$, et dans les autres, $p > q$. — Or, pour ce qui concerne la première classe de ces différentielles, où l'on a $p = q$, et qui seules se trouvent dans les dénominateurs de l'expression (649), en ne perdant pas de vue qu'on doit finalement faire $x = a$, il est manifeste que,

d'après la double formation (644) et (646) de la fonction Φx , formation double qu'il faut constamment aussi avoir en vue, on aura d'abord . . . (650)

$$\frac{d^q(\Phi x)^q}{dx^q} = 1^{q!} \cdot [P(q)_w]_{(x=a)} = 1^{q!};$$

pour tout exposant q appartenant à la suite des nombres entiers, depuis $q=1$ jusqu'à $q=\omega$ inclusivement; et que, d'après cette même formation double, on aura ensuite . . . (651)

$$\frac{d^q(\Phi x)^q}{dx^q} = \frac{1^{q!}}{(n+a)^q} = \frac{1^{q!}}{(n+a)^q},$$

pour tout exposant q plus grand que le susdit nombre ω des éléments théoriques. Et pour ce qui concerne la seconde classe des différentielles en question $d^p(\Phi x)^q$, où l'ordre p est plus grand que l'exposant q , il est également manifeste que, pour la valeur finale de $x=a$, on aura d'abord . . . (652)

$$\frac{d^p(\Phi x)^q}{dx^p} = \frac{1^{p!}}{1^{(p-q)!}} \cdot \left[\frac{d^{(p-q)} P(q)_w}{dx^{(p-q)}} \right]_{(x=a)},$$

pour tout exposant q , appartenant à la suite des nombres entiers, depuis $q=1$ jusqu'à $q=\omega$; et que, toujours pour la valeur finale de $x=a$, on aura ensuite . . . (653)

$$\frac{d^p(\Phi x)^q}{dx^p} = (-1)^{p-q} \cdot \frac{1^{p!} \cdot q^{(p-q)!}}{1^{(p-q)!} \cdot (n+a)^p},$$

pour tout exposant q plus grand que le susdit nombre ω . Enfin, par suite de l'expression générale (636) des fonctions $P(q)_w$, on obtiendra facilement, comme nous le verrons ci-après, pour la présente expression générale (652), la différentielle de l'ordre $(p-q)$ dont il y est question, en prenant, dans cette expression générale (636), par rapport à la variable x , cette différentielle de l'ordre $(p-q)$, non-seulement sur les puissances de la fonction élémentaire $(x-a)$, mais, de plus, sur les quantités $R(\omega)_1$, $R(\omega)_2$, $R(\omega)_3$, . . . $R(\omega)_w$, qui, en vertu des équations linéaires (605), servant à les déterminer, sont aussi fonctions de la variable x , et nommément fonctions des différentielles générales de la fonction problématique Fx .

Ainsi, en introduisant ces valeurs (650), (651), (652) et (653) dans l'expression générale (649) des coefficients $\mathbb{E}$ de notre série complémentaire (639), ou plutôt dans les expressions particulières que donne cette expression générale (649), lorsqu'on y attribue séparément, à l'indice général μ , les valeurs successives . . . (654)

$$\mu = \omega + 1, \quad \mu = \omega + 2, \quad \mu = \omega + 3, \quad \mu = \omega + 4, \quad \text{etc., etc.};$$

on obtiendra les coefficients $\tilde{z}_{w+1}$, $\tilde{z}_{w+2}$, $\tilde{z}_{w+3}$, etc., pour cette série complémentaire (63g); et notre question présente se trouvera complètement résolue (*).

Toutefois, pour la facilité générale de cette grande solution, en observant que la détermination distincte de chacun de ces coefficients $\tilde{z}_p$, par leur expression générale (64g), implique un nombre 2^{p-1} de termes, nombre considérable, et de plus en plus grand, lors même que le nombre ϖ des termes théoriques ne serait pas très-grand, on conçoit qu'il serait plus convenable de déterminer médiatement ces coefficients $\tilde{z}_{w+1}$, $\tilde{z}_{w+2}$, $\tilde{z}_{w+3}$, etc., les uns par les autres, et notamment le dernier par les précédents. Et nous pouvons le faire effectivement et même très-facilement à l'aide de la loi (163)' qui préside à cette détermination médiate, des uns par les autres, des coefficients de notre audite loi générale (14g) ou (15g). En effet, d'après cette loi (163) et (163)', en considérant la génération entière (638) de la fonction cherchée Fx , dans tous ses termes, et notamment dans les ϖ premiers termes (637), qui forment la somme théorique $\Sigma(\varpi)$, et dans l'infinité des termes (63g), qui forme la série complémentaire $S(\varpi+1)$, nous aurons d'abord, pour les ϖ coefficients $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots, \mathfrak{A}_\varpi$ de la somme (637), les déterminations consécutives . . . (655)

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= \frac{dFx}{d(\Phi x)}, \\ \mathfrak{A}_2 &= \frac{1}{d^2(\Phi x)^2} \left\{ d^2 Fx - \mathfrak{A}_1 \cdot d^2(\Phi x) \right\}, \\ \mathfrak{A}_3 &= \frac{1}{d^3(\Phi x)^3} \left\{ d^3 Fx - \mathfrak{A}_1 \cdot d^3(\Phi x) - \mathfrak{A}_2 \cdot d^3(\Phi x)^2 \right\}, \\ \mathfrak{A}_4 &= \frac{1}{d^4(\Phi x)^4} \left\{ d^4 Fx - \mathfrak{A}_1 \cdot d^4(\Phi x) - \mathfrak{A}_2 \cdot d^4(\Phi x)^2 - \mathfrak{A}_3 \cdot d^4(\Phi x)^3 \right\}, \\ &\dots \dots \dots \\ \mathfrak{A}_\varpi &= \frac{1}{d^\varpi(\Phi x)^\varpi} \left\{ d^\varpi Fx - \mathfrak{A}_1 \cdot d^\varpi(\Phi x) - \mathfrak{A}_2 \cdot d^\varpi(\Phi x)^2 - \mathfrak{A}_3 \cdot d^\varpi(\Phi x)^3 \right. \\ &\quad \left. - \mathfrak{A}_4 \cdot d^\varpi(\Phi x)^4 \dots - \mathfrak{A}_{\varpi-1} \cdot d^\varpi(\Phi x)^{\varpi-1} \right\};\end{aligned}$$

et nous aurons de plus, pour la suite infinie des coefficients $\tilde{z}_{w+1}$, $\tilde{z}_{w+2}$, $\tilde{z}_{w+3}$, etc., de la série complémentaire (63g), les déterminations consécutives . . . (656)

(*) Pour l'intelligence complète de ces diverses expressions, le lecteur doit préalablement étudier, dans la Philosophie de la Technique algorithmique, tout ce qui se rapporte à notre loi générale des séries (14g) ou (15g) jusqu'à (168).

$$\begin{aligned} \dot{x}_{w+1} &= \frac{1}{d^{w+1}(\Phi x)^{w+1}} \left\{ d^{w+1} Fx - \lambda_1 d^{w+1}(\Phi x) - \lambda_2 d^{w+1}(\Phi x)^2 - \lambda_3 d^{w+1}(\Phi x)^3 \right. \\ &\quad \left. - \lambda_4 d^{w+1}(\Phi x)^4 \dots - \lambda_w d^{w+1}(\Phi x)^w \right\}, \\ \dot{x}_{w+2} &= \frac{1}{d^{w+2}(\Phi x)^{w+2}} \left\{ d^{w+2} Fx - \lambda_1 d^{w+2}(\Phi x) - \lambda_2 d^{w+2}(\Phi x)^2 - \lambda_3 d^{w+2}(\Phi x)^3 \right. \\ &\quad \left. - \lambda_4 d^{w+2}(\Phi x)^4 \dots - \lambda_w d^{w+2}(\Phi x)^w - \dot{x}_{w+1} d^{w+2}(\Phi x)^{w+1} \right\}, \\ \dot{x}_{w+3} &= \frac{1}{d^{w+3}(\Phi x)^{w+3}} \left\{ d^{w+3} Fx - \lambda_1 d^{w+3}(\Phi x) - \lambda_2 d^{w+3}(\Phi x)^2 - \lambda_3 d^{w+3}(\Phi x)^3 \right. \\ &\quad \left. - \lambda_4 d^{w+3}(\Phi x)^4 \dots - \lambda_w d^{w+3}(\Phi x)^w - \dot{x}_{w+1} d^{w+3}(\Phi x)^{w+1} - \dot{x}_{w+2} d^{w+3}(\Phi x)^{w+2} \right\}, \\ &\quad \text{etc., etc., et généralement, pour un indice quelconque } p, \dots (656) \\ \dot{x}_{w+p} &= \frac{1}{d^{w+p}(\Phi x)^{w+p}} \left\{ d^{w+p} Fx - \lambda_1 d^{w+p}(\Phi x) - \lambda_2 d^{w+p}(\Phi x)^2 \right. \\ &\quad \left. - \lambda_3 d^{w+p}(\Phi x)^3 \dots - \lambda_w d^{w+p}(\Phi x)^w - \dot{x}_{w+1} d^{w+p}(\Phi x)^{w+1} \right. \\ &\quad \left. - \dot{x}_{w+2} d^{w+p}(\Phi x)^{w+2} - \dot{x}_{w+3} d^{w+p}(\Phi x)^{w+3} \dots - \dot{x}_{w+p-1} d^{w+p}(\Phi x)^{w+p-1} \right\}; \end{aligned}$$

en marquant toujours par le point placé sur les lettres qu'après les différenciations, il faut faire $x=a$. Mais, ce qu'il faut essentiellement distinguer dans ces deux systèmes (655) et (656) d'expressions, c'est que, d'après la formation différente (643) et (645) de la présente fonction (Φx) , en apparence identique, il ne faut pas perdre de vue, comme nous y avons déjà rendu attentif plusieurs fois, que, lorsque les présentes puissances de cette fonction ne surpassent pas le degré ω , elles appartiennent à la classe (644) des fonctions génératrices distinctes, savoir, à la classe dont l'expression générale, pour un indice quelconque μ , compris entre les nombres entiers 1 et ω inclusivement, est . . . (657)

$$(\Phi x)^\mu = (\Phi_\mu x)^\mu = (x-a)^\mu \cdot P(\mu)_a = \Omega_\mu;$$

et que, lorsque les présentes puissances de la fonction (Φx) surpassent le degré ω , elles appartiennent à la classe (646) des fonctions génératrices progressives, savoir, à la classe dont l'expression générale, pour un indice quelconque $(\omega + p)$, plus grand que le nombre ω , est . . . (658)

$$(\Phi x)^{\omega+p} = \left(\frac{x-a}{n+x} \right)^{\omega+p} = \Omega_{\omega+p}.$$

Ainsi, dans le premier (655) des deux présents systèmes d'expressions, toutes les fonctions (Φx) , aux numérateurs et aux dénominateurs, appartiennent à la classe (657) des fonctions génératrices distinctes, dont les différentielles, pour

la valeur de $x = a$, sont données par les expressions générales (650) et (652). Et, dans le second (656) de ces deux systèmes d'expressions, toutes les fonctions (Φx) qui sont multipliées par les coefficients $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots, \mathfrak{A}_n$ du premier système (655), appartiennent encore à la même classe (657) des fonctions génératrices distinctes, et toutes les autres fonctions (Φx) , soit aux numérateurs, soit aux dénominateurs, dans ce deuxième système (656), appartiennent à la classe (658) des fonctions génératrices progressives, dont les différentielles, pour la valeur de $x = a$, sont données par les expressions générales (651) et (653). — Nous pouvons donc, en suivant cette distinction des fonctions (Φx) , et en évaluant leurs différentielles par les expressions générales que nous venons de citer, déterminer définitivement les deux systèmes (655) et (656) des coefficients en question. — Nous allons le faire; et pour cela, nous allons d'abord, d'après ce que nous avons dit plus haut, déterminer, pour l'ordre $(p - q)$, la différentielle générale de la fonction $P(q)_w$, différentielle qui entre dans l'expression (652), et qu'il nous reste à connaître.

Or, pour prendre ainsi, sur l'expression générale (636) de la fonction $P(q)_w$, la différentielle de l'ordre $(p - q)$ qu'il s'agit de déterminer, il suffit, en considérant qu'après les différentiations, il faut faire $x = a$, il suffit, disons-nous, de considérer, dans cette expression (636), le terme général de ceux qui sont variables, savoir, pour un indice quelconque μ , depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = q$, le terme général . . . (659)

$$(x - a)^{w - \tau + \mu} \cdot \frac{R(\tau)_{\tau - \mu}}{R(\tau)_w};$$

et de prendre sur ce terme, d'abord, la différentielle de l'ordre $(w - q + \mu)$ sur la puissance $(w - q + \mu)$ de la fonction élémentaire $(x - a)$, et ensuite la différentielle de l'ordre restant . . . (659')

$$(p - q) - (w - q + \mu) = p - w - \mu,$$

sur le rapport des fonctions $R(\tau)_{q - \mu}$ et $R(\tau)_w$, en observant que, lorsque cet ordre restant $(p - w - \mu)$ devient négatif, le terme entier correspondant doit être considéré comme zéro, parce que cet ordre négatif provient de ce que l'exposant $(w - q + \mu)$ de la puissance de la fonction élémentaire $(x - a)$ est alors plus grand que l'ordre total $(p - q)$ de la différentielle qu'il s'agit de prendre sur la fonction $P(q)_w$ dont il est question; de sorte qu'en ne prenant, sur cette puissance $(w - q + \mu)$, que la différentielle de l'ordre $(p - q)$, il resterait la puissance $(w + \mu - p)$ de la fonction élémentaire $(x - a)$, puissance qui, pour $x = a$, réduirait le terme entier à zéro. Ainsi, d'après l'expression générale (636) de la fonction $P(q)_w$, en y changeant l'indice p en q , la différentielle de l'ordre $(p - q)$ de cette fonction, en ayant égard à l'exclusion des termes que nous venons de signaler, sera manifestement . . . (660)

$$\left[\frac{d^{(p-q)} P(q)_w}{dx^{(p-q)}} \right]_{(x=a)} = 1^{(p-q)!} \left\{ - \frac{1}{1^{(p-q-1)!}} \cdot d^{(p-q-1)} \left(\frac{R(\psi)}{R(\psi)_w} \right) \cdot \frac{1}{dx^{(p-q-1)}} \right. \\ + \frac{\psi - q + 1}{1} \cdot \frac{1}{1^{(p-q-1)!}} \cdot d^{(p-q-1)} \left(\frac{R(\psi)}{R(\psi)_w} \right) \cdot \frac{1}{dx^{(p-q-1)}} \\ - \frac{(\psi - q + 1)^{1/2}}{1^{1/2}} \cdot \frac{1}{1^{(p-q-3)!}} \cdot d^{(p-q-3)} \left(\frac{R(\psi)}{R(\psi)_w} \right) \cdot \frac{1}{dx^{(p-q-3)}} \\ + \frac{(\psi - q + 1)^{3/2}}{1^{3/2}} \cdot \frac{1}{1^{(p-q-5)!}} \cdot d^{(p-q-5)} \left(\frac{R(\psi)}{R(\psi)_w} \right) \cdot \frac{1}{dx^{(p-q-5)}} \\ \dots \dots \dots (-1)^q \cdot \frac{(\psi - q + 1)^{(q-1)/2}}{1^{(q-1)/2}} \cdot \frac{1}{1^{(p-q-g)!}} \cdot d^{(p-q-g)} \left(\frac{R(\psi)}{R(\psi)_w} \right) \cdot \frac{1}{dx^{(p-q-g)}} \Bigg\};$$

en ne perdant pas de vue, d'après la règle d'exclusion (65g)' que nous venons d'établir, que, pour tout exposant ou ordre négatif ($p - \psi - \mu$) des différentielles qu'il faut ici prendre sur le rapport des fonctions $R(\psi)_{q-\mu}$ et $R(\psi)_w$, les termes qui impliquent ces différentielles négatives doivent être considérés comme zéro. D'ailleurs, d'après la détermination générale que nous avons donnée des facultés, et par conséquent des factorielles à exposant négatif, sous la marque (60), dans la *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* (page 114), les factorielles qui se trouvent ici aux dénominateurs, et qui ont toujours le même exposant que l'ordre de la différentielle, recevant ainsi un exposant négatif, auront une valeur infinie, et feront par eux-mêmes disparaître les termes en question. — Nous aurons donc, pour les différentes valeurs du nombre p qui forme l'exposant ou l'ordre de la différentielle générale (65a), les valeurs suivantes.

D'abord, pour toutes les valeurs de cet exposant p , qui sont plus petites que $(\psi + 1)$, mais plus grandes que q , l'expression générale (660) donne constamment . . . (661)

$$\text{Pour } p < (\psi + 1), \quad \text{et } p > q; \\ \frac{d^p(\Phi x)^q}{dx^p} = p^{q-1} \cdot \left[\frac{d^{(p-q)} P(q)_w}{dx^{(p-q)}} \right]_{(x=a)} = 0.$$

Quant au cas spécial où $p = q$, nous avons déjà vu, sous la marque (650), qu'on a alors la valeur . . . (662)

$$\frac{d^q(\Phi x)^q}{dx^q} = 1^{q!} \cdot [P(q)_w]_{(x=a)} = 1^{q!}.$$

Ensuite, pour les valeurs de p plus grandes que ψ , l'expression générale (660), en l'indiquant par la notation abrégée . . . (663)

$$\left[\frac{d^{(p-q)} P(q)_w}{dx^{(p-q)}} \right]_{(x=a)} = [(p)P(q)]_w;$$

et en y ayant égard à la règle d'exclusion des termes qui deviennent zéro, donne les expressions spéciales que voici . . . (664)

Pour $p = (\varpi + 1)$;

$$\left[\frac{d^{(p-q)} P(q)}{dx^{(p-q)}} \right]_{(x=a)} = [(\varpi + 1)P(q)]_a = - \frac{1^{(\varpi-q+1)}_1}{R(\varpi)_a} \cdot \frac{R(\varpi)_{q-1}}{R(\varpi)_a} .$$

Pour $p = (\varpi + 2)$;

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^{(p-q)} P(q)}{dx^{(p-q)}} \right]_{(x=a)} &= [(\varpi + 2)P(q)]_a = - \frac{1^{(\varpi-q+2)}_1}{1} \cdot d \left(\frac{R(\varpi)_{q-1}}{R(\varpi)_a} \right) \cdot \frac{1}{dx} \\ &\quad + \frac{\varpi - q + 1}{1} \cdot \frac{1^{(\varpi-q+1)}_1}{1} \cdot \left(\frac{R(\varpi)_{q-2}}{R(\varpi)_a} \right) . \end{aligned}$$

Pour $p = (\varpi + 3)$;

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^{(p-q)} P(q)}{dx^{(p-q)}} \right]_{(x=a)} &= [(\varpi + 3)P(q)]_a = - \frac{1^{(\varpi-q+3)}_1}{1^2} \cdot d^2 \left(\frac{R(\varpi)_{q-1}}{R(\varpi)_a} \right) \cdot \frac{1}{dx^2} \\ &\quad + \frac{\varpi - q + 1}{1} \cdot \frac{1^{(\varpi-q+2)}_1}{1} \cdot d \left(\frac{R(\varpi)_{q-2}}{R(\varpi)_a} \right) \cdot \frac{1}{dx} \\ &\quad - \frac{(\varpi - q + 1)^2_1}{1^2} \cdot \frac{1^{(\varpi-q+1)}_1}{1} \cdot \left(\frac{R(\varpi)_{q-3}}{R(\varpi)_a} \right) . \end{aligned}$$

Pour $p = (\varpi + 4)$;

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^{(p-q)} P(q)}{dx^{(p-q)}} \right]_{(x=a)} &= [(\varpi + 4)P(q)]_a = - \frac{1^{(\varpi-q+4)}_1}{1^3} \cdot d^3 \left(\frac{R(\varpi)_{q-1}}{R(\varpi)_a} \right) \cdot \frac{1}{dx^3} \\ &\quad + \frac{\varpi - q + 1}{1} \cdot \frac{1^{(\varpi-q+3)}_1}{1^2} \cdot d^2 \left(\frac{R(\varpi)_{q-2}}{R(\varpi)_a} \right) \cdot \frac{1}{dx^2} \\ &\quad - \frac{(\varpi - q + 1)^2_1}{1^2} \cdot \frac{1^{(\varpi-q+2)}_1}{1} \cdot d \left(\frac{R(\varpi)_{q-3}}{R(\varpi)_a} \right) \cdot \frac{1}{dx} \\ &\quad + \frac{(\varpi - q + 1)^3_1}{1^3} \cdot \frac{1^{(\varpi-q+1)}_1}{1} \cdot \left(\frac{R(\varpi)_{q-4}}{R(\varpi)_a} \right) . \end{aligned}$$

Pour $p = (\varpi + 5)$;

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^{(p-q)} P(q)}{dx^{(p-q)}} \right]_{(x=a)} &= [(\varpi + 5)P(q)]_a = - \frac{1^{(\varpi-q+5)}_1}{1^4} \cdot d^4 \left(\frac{R(\varpi)_{q-1}}{R(\varpi)_a} \right) \cdot \frac{1}{dx^4} \\ &\quad + \frac{\varpi - q + 1}{1} \cdot \frac{1^{(\varpi-q+4)}_1}{1^3} \cdot d^3 \left(\frac{R(\varpi)_{q-2}}{R(\varpi)_a} \right) \cdot \frac{1}{dx^3} \\ &\quad - \frac{(\varpi - q + 1)^2_1}{1^2} \cdot \frac{1^{(\varpi-q+3)}_1}{1^2} \cdot d^2 \left(\frac{R(\varpi)_{q-3}}{R(\varpi)_a} \right) \cdot \frac{1}{dx^2} \\ &\quad + \frac{(\varpi - q + 1)^3_1}{1^3} \cdot \frac{1^{(\varpi-q+2)}_1}{1} \cdot d \left(\frac{R(\varpi)_{q-4}}{R(\varpi)_a} \right) \cdot \frac{1}{dx} \\ &\quad - \frac{(\varpi - q + 1)^4_1}{1^4} \cdot \frac{1^{(\varpi-q+1)}_1}{1} \cdot \left(\frac{R(\varpi)_{q-5}}{R(\varpi)_a} \right) . \end{aligned}$$

Et ainsi de suite, d'après la même loi générale (660), pour toutes les valeurs suivantes du nombre p , formant l'ordre ou l'exposant dans la différentielle générale (652).

Nous pouvons donc maintenant, avec ces valeurs des différentielles qui entrent dans les deux systèmes (655) et (656) d'expressions des coefficients dont il s'agit, déterminer facilement les valeurs de ces coefficients. — Ainsi, pour ce qui concerne d'abord le premier de ces deux systèmes, les présentes déterminations (661) et (662), qui embrassent toutes les différentielles de ce premier système, réduisent les coefficients $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots, \mathfrak{A}_m$, ceux précisément qui forment les coefficients de la somme théorique (637), aux valeurs très-simples . . . (665)

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{1!} \frac{dF\dot{x}}{dx}, \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2!1!} \frac{d^2F\dot{x}}{dx^2}, \quad \mathfrak{A}_3 = \frac{1}{3!1!} \frac{d^3F\dot{x}}{dx^3},$$

$$\mathfrak{A}_4 = \frac{1}{4!1!} \frac{d^4F\dot{x}}{dx^4}, \quad \dots \quad \mathfrak{A}_m = \frac{1}{m!1!} \frac{d^mF\dot{x}}{dx^m}.$$

Et d'après la notation (581) et (581)', ce sont là effectivement les valeurs des coefficients dans la somme théorique (637). — Nous obtenons par là une vérification décisive de l'exactitude de nos procédés algorithmiques, ou plutôt nous obtenons ainsi une preuve de la finalité qui se trouve dans ces procédés de notre méthode suprême; car, la somme (637), que nous avons obtenue par une véritable sommation (614) des $\mathfrak{A}$ termes théoriques de notre série instrumentale (578), n'a rien de commun, ou du moins n'a aucune liaison logique avec la génération absolue (138) ou (138)', sur laquelle, par le moyen de nos présentes fonctions génératrices (640), se fonde la méthode suprême que nous venons d'appliquer.

Pour ce qui concerne ensuite le second système (656) de coefficients, et notamment le système des coefficients $\mathfrak{B}_{m+1}, \mathfrak{B}_{m+2}, \mathfrak{B}_{m+3}$, etc., qui appartiennent à notre série complémentaire (639), et qu'il nous restait à déterminer, voici, par les susdites différentielles (651), (652), (653), et par les différentielles présentes (664), leur détermination définitive . . . (666)

$$\mathfrak{B}_{m+1} = (m+1)^{m+1} \cdot \left\{ \frac{d^{m+1}F\dot{x}}{1!(m+1)! \cdot dx^{m+1}} - \left[\mathfrak{A}_1 \cdot \frac{[(m+1)P(1)]_m}{1^{m+1}} + \right. \right.$$

$$\left. + \mathfrak{A}_2 \cdot \frac{[(m+1)P(2)]_m}{1^{m-1}2!} + \mathfrak{A}_3 \cdot \frac{[(m+1)P(3)]_m}{1^{m-2}3!} \dots + \mathfrak{A}_m \cdot \frac{[(m+1)P(m)]_m}{1^m} \right\},$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{w+2} &= (n+a)^{w+2} \cdot \left\{ \frac{d^{w+2} Fx}{1^{(w+2)!} \cdot dx^{w+2}} - \left[\alpha_1 \cdot \frac{[(w+2)P(1)]_w}{1^{(w+1)!}} + \right. \right. \\
&\quad + \alpha_2 \cdot \frac{[(w+2)P(2)]_w}{1^{(w+1)!}} + \alpha_3 \cdot \frac{[(w+2)P(3)]_w}{1^{(w-1)!}} \dots + \alpha_w \cdot \frac{[(w+2)P(w)]_w}{1^{2!}} \left. \right] \Big\} + \\
&\quad + \frac{w+2}{1} \cdot \dot{z}_{w+1}, \\
\dot{z}_{w+3} &= (n+a)^{w+3} \cdot \left\{ \frac{d^{w+3} Fx}{1^{(w+3)!} \cdot dx^{w+3}} - \left[\alpha_1 \cdot \frac{[(w+3)P(1)]_w}{1^{(w+2)!}} + \right. \right. \\
&\quad + \alpha_2 \cdot \frac{[(w+3)P(2)]_w}{1^{(w+1)!}} + \alpha_3 \cdot \frac{[(w+3)P(3)]_w}{1^{(w+1)!}} \dots + \alpha_w \cdot \frac{[(w+3)P(w)]_w}{1^{2!}} \left. \right] \Big\} + \\
&\quad + \left\{ \frac{w+3}{1} \cdot \dot{z}_{w+2} - \frac{(w+2)^{2!}}{1^{2!}} \cdot \dot{z}_{w+1} \right\}, \\
\dot{z}_{w+4} &= (n+a)^{w+4} \cdot \left\{ \frac{d^{w+4} Fx}{1^{(w+4)!} \cdot dx^{w+4}} - \left[\alpha_1 \cdot \frac{[(w+4)P(1)]_w}{1^{(w+3)!}} + \right. \right. \\
&\quad + \alpha_2 \cdot \frac{[(w+4)P(2)]_w}{1^{(w+2)!}} + \alpha_3 \cdot \frac{[(w+4)P(3)]_w}{1^{(w+1)!}} \dots + \alpha_w \cdot \frac{[(w+4)P(w)]_w}{1^{4!}} \left. \right] \Big\} + \\
&\quad + \left\{ \frac{w+3}{1} \cdot \dot{z}_{w+3} - \frac{(w+2)^{3!}}{1^{3!}} \cdot \dot{z}_{w+2} + \frac{(w+1)^{2!}}{1^{2!}} \cdot \dot{z}_{w+1} \right\}, \\
\dot{z}_{w+5} &= (n+a)^{w+5} \cdot \left\{ \frac{d^{w+5} Fx}{1^{(w+5)!} \cdot dx^{w+5}} - \left[\alpha_1 \cdot \frac{[(w+5)P(1)]_w}{1^{(w+4)!}} + \right. \right. \\
&\quad + \alpha_2 \cdot \frac{[(w+5)P(2)]_w}{1^{(w+3)!}} + \alpha_3 \cdot \frac{[(w+5)P(3)]_w}{1^{(w+2)!}} \dots + \alpha_w \cdot \frac{[(w+5)P(w)]_w}{1^{5!}} \left. \right] \Big\} + \\
&\quad + \left\{ \frac{w+4}{1} \cdot \dot{z}_{w+4} - \frac{(w+3)^{4!}}{1^{4!}} \cdot \dot{z}_{w+3} + \frac{(w+2)^{3!}}{1^{3!}} \cdot \dot{z}_{w+2} - \frac{(w+1)^{2!}}{1^{2!}} \cdot \dot{z}_{w+1} \right\};
\end{aligned}$$

etc., etc.;

les quantités $[(w+1)P(q)]_w$, $[(w+2)P(q)]_w$, $[(w+3)P(q)]_w$, etc., etc., étant données généralement, pour tous les indices q , depuis $q=1$ jusqu'à $q=w$, par les expressions spéciales (664). Nous pouvons même, en introduisant ces dernières expressions (664) dans les présentes déterminations (666) des coefficients en question, obtenir, pour ces coefficients de la série complémentaire (63g), l'expression immédiate, générale et très-simple que voici. — Pour cela, en considérant, parmi ces coefficients $\dot{z}_{w+1}$, $\dot{z}_{w+2}$, $\dot{z}_{w+3}$, etc.,

en considérant ainsi comme zéro le coefficient $\tilde{z}_w$, qui effectivement n'existe pas dans la série complémentaire (639) dont il s'agit.

Nous aurons alors manifestement, d'après les expressions précédentes (666) et (664), pour la détermination immédiate des coefficients $\tilde{z}_{w+1}$, $\tilde{z}_{w+2}$, $\tilde{z}_{w+3}$, etc. en question, l'expression générale et très-simple . . . (670)

$$\tilde{z}_{w+p} = (n + a)^{w+p} \cdot \left\{ \frac{d^{w+p} Fx}{z^{(w+p)+1} \cdot dx^{w+p}} + \lambda(\psi)^{(w)} \right\} + \tilde{z}(\psi)^{(w)}.$$

Ainsi, par cette détermination définitive (670) des coefficients $\tilde{z}_{w+1}$, $\tilde{z}_{w+2}$, $\tilde{z}_{w+3}$, etc., dont la loi, d'après la déduction que nous venons d'en donner, se trouve maintenant manifeste, la série complémentaire (639), à laquelle appartient ces coefficients, se trouve, à son tour, complètement et rigoureusement déterminée. — Et par conséquent, nous accomplissons ici, par cette détermination de la série complémentaire, la solution de notre grande question présente (638), ayant pour objet la progressive génération théorique de la nature elle-même de toute fonction problématique Fx , donnée par ses différentielles, soit immédiatement, soit médiatement, par des équations quelconques, comme elle est ou peut toujours être donnée de l'une ou de l'autre de ces deux manières.

Bien plus, les déterminations que nous avons obtenues pour cette solution accomplie de notre présente question, soit d'abord par les équations (605), pour découvrir les éléments théoriques $R(\psi)$, $R(\psi)_2$, $R(\psi)_3$, . . . $R(\psi)_w$, soit ensuite par les expressions (635) et (636), pour la construction des quantités $P(1)_w$, $P(2)_w$, $P(3)_w$, . . . $P(\psi)_w$, qui, comme parties constitutantes et essentielles, entrent dans la formation (640) des fonctions génératrices distinctes Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , . . . Ω_w , d'après lesquelles procède la génération théorique (637) de la fonction proposée Fx , soit enfin par les expressions (667), (668) et (669) des éléments techniques qui entrent dans la formation (670) des coefficients $\tilde{z}_{w+1}$, $\tilde{z}_{w+2}$, $\tilde{z}_{w+3}$, etc. de la série complémentaire (639), à l'aide de laquelle s'accomplit, par ce procédé technique, ce qui manque dans la génération théorique (637) de la fonction Fx en question, toutes ces déterminations, disons-nous, sont déjà amenées au dernier degré de simplicité, et par conséquent à un tel point d'accomplissement que, dans tous les cas conservables, l'application de cette méthode primordiale ou universelle, pour arriver ainsi progressivement à la génération théorique de toute fonction problématique Fx , pourra se faire avec une extrême facilité, quelque grand que soit le degré ψ de l'exactitude avec laquelle on veut obtenir cette génération théorique d'une fonction cherchée. — En effet, lorsque ce nombre ψ serait très-grand, la seule de ces déterminations qui pourrait présenter, non pas de la difficulté, mais une opération un peu longue, ce serait la résolution des équations linéaires (605), pour arriver à la détermination des ψ éléments théori-

ques $R(\varpi)_1, R(\varpi)_2, R(\varpi)_3, \dots, R(\varpi)_\infty$; mais c'est là, dans la nature même de notre question, le principe de la détermination de ces éléments, et surtout, ce qu'il faut bien remarquer, le principe le plus simple de cette détermination; car, si ces éléments $R(\varpi)_1, R(\varpi)_2, R(\varpi)_3$, etc., au lieu d'être donnés ainsi par des équations linéaires, se trouvaient, dans leur essence, donnés par des équations de degré supérieur au premier, leur détermination deviendrait beaucoup plus compliquée, et néanmoins il faudrait bien l'obtenir ainsi, par cette voie plus compliquée. Toutefois, autant que le permet la nature de cette question spéciale, nous allons indiquer tous les moyens possibles pour simplifier les procédés de la résolution de ces équations linéaires.

Ainsi, nous renverrons d'abord le lecteur à ce que, dans la seconde section de la Philosophie de la Technique (pages 6 à 14), nous avons déduit de notre loi suprême, concernant la résolution en question des équations linéaires (150) d'un nombre quelconque $(p+1)$ d'inconnues. — Or, nous y avons découvert, par cette application spéciale de notre loi suprême, qu'il existe généralement, pour un tel nombre $(p+1)$ d'inconnues et d'équations linéaires qui servent à les déterminer, un nombre pareil $(p+1)$ de systèmes différents pour la résolution de ces équations; et nous y avons fait connaître, sous les marques (153), (154), (154'), (155), (156), etc., tous ces $(p+1)$ systèmes différents, dont un seul, celui qui y porte la marque (154'), était et est encore le seul connu des géomètres. Et en y déduisant ainsi, de notre loi suprême, ces $(p+1)$ systèmes différents pour la résolution des $(p+1)$ équations linéaires, nous avons en même temps, et pour la première fois, donné la démonstration rigoureuse de toutes ces $(p+1)$ différentes solutions possibles; car, comme nous l'y avons déjà fait observer, la démonstration que Vandermonde, dans son Mémoire sur l'Élimination (*Mémoires de l'Académie de Paris, 1772, seconde partie*), a prétendu en donner, et cela même seulement pour le susdit (154') système connu, n'est proprement qu'une vérification générale de ces seules formules connues (154'), et nullement une véritable démonstration. Et il en est de même de Laplace et de tous les autres géomètres qui, jusqu'à l'apparition de notre loi suprême, seule propre à donner cette démonstration, ont cherché à résoudre cette question. Bien plus, dans la note des pages 12 et 13, nous avons déduit, de cette théorie supérieure de la résolution des équations linéaires, les principes de la théorie générale de nos fonctions schéms, c'est-à-dire, de ces fonctions sous la forme desquelles, dans le cas particulier de la résolution des équations linéaires, se présentent les expressions des numérateurs et des dénominateurs des inconnues données par cette résolution. Et d'après cette théorie générale de nos fonctions schéms, qui se trouve fondée sur l'identité des valeurs des $(p+1)$ inconnues, déterminées différemment dans les $(p+1)$ systèmes différents des résolutions des équations linéaires par lesquelles elles sont

données, on découvre que, pour toute valeur du nombre p , il existe toujours, pour nos fonctions schins, formées de $(p+1)$ éléments, un nombre $p.(p+1)$ de théorèmes fondamentaux et distincts. Et alors, en variant la valeur de ce nombre p , depuis l'unité jusqu'à l'infini, on aura un système infini de théorèmes différents, et par conséquent tous les théorèmes concevables qui peuvent s'établir avec nos fonctions schins; de sorte que la théorie générale de ces fonctions, qui se trouve ainsi établie depuis 1817, est déjà entièrement accomplie, et nous donne le droit de fixer le nom et la notation de ces fonctions, en observant surtout que leur rencontre fortuite, dans la résolution des équations linéaires, n'a pas suffi pour découvrir ni leur principe, ni leur importance, qu'elles reçoivent aujourd'hui de la loi suprême des mathématiques, dont elles sont des parties constituantes.

C'est donc parmi ces $(p+1)$ systèmes différents de solutions possibles pour $(p+1)$ équations linéaires que nous devons choisir celui qui, dans notre question présente, sera le plus convenable pour la résolution des équations linéaires (6o5) dont il est ici question. Et pour ce choix, nous devons ici, en vue de notre progressive génération théorique (637) des fonctions, afin que l'on puisse y augmenter successivement le nombre ω d'éléments et de termes, établir la règle de résoudre nos équations linéaires (6o5), si cela est possible, de manière à ce que, en augmentant le nombre ω des inconnues, et par conséquent le nombre ω de ces équations, on puisse se servir des solutions antérieures, et n'avoir pas besoin de recommencer, à chaque augmentation du nombre ω , toute la solution de ces équations, comme on est forcé de le faire actuellement, dans le seul système connu (154) de la résolution des équations linéaires. — Or, sans entrer ici dans la discussion de nos $(p+1)$ systèmes différents, nous nous bornerons à faire savoir que le système que nous avons fait connaître dans une des notes qui sont annexées à la *Critique de la théorie des fonctions génératrices de Laplace* (pages 128 et 129), pour la résolution d'un nombre indéfini d'équations linéaires, répond parfaitement à la règle que nous venons de fixer. — Voici donc ce système spécial de résolution des équations linéaires, tel que nous l'avons produit dans l'ouvrage que nous venons de citer.

Soit donné le système indéfini d'équations linéaires que voici . . . (671)

$$\begin{aligned} M_0 &= X_0 + X_1.A(1)_1 + X_2.A(2)_1 + X_3.A(3)_1 + \text{etc.}, \\ M_1 &= X_1 + X_2.A(2)_1 + X_3.A(3)_2 + X_4.A(4)_1 + \text{etc.}, \\ M_2 &= X_2 + X_3.A(3)_1 + X_4.A(4)_2 + X_5.A(5)_1 + \text{etc.}, \\ M_3 &= X_3 + X_4.A(4)_1 + X_5.A(5)_2 + X_6.A(6)_1 + \text{etc.}, \\ &\text{etc., etc.}; \end{aligned}$$

ou X_0, X_1, X_2, X_3 , etc. est un nombre indéfini d'inconnues, et les quantités dénotées par les caractéristiques M et A sont autant de quantités connues ou données. — Formons, avec les dernières A de ces quantités, le nouveau

système indéfini des quantités . . . (67a)

$$B(\mu)_1 = -A(\mu+1)_1,$$

$$B(\mu)_2 = -A(\mu+2)_2 - A(\mu+2)_1 \cdot B(\mu)_1,$$

$$B(\mu)_3 = -A(\mu+3)_3 - A(\mu+3)_2 \cdot B(\mu)_2 - A(\mu+3)_1 \cdot B(\mu)_1,$$

$$B(\mu)_4 = -A(\mu+4)_4 - A(\mu+4)_3 \cdot B(\mu)_3 - A(\mu+4)_2 \cdot B(\mu)_2 - A(\mu+4)_1 \cdot B(\mu)_1,$$

$$\text{etc., etc.; et généralement . . . (67a)'} \\ B(\mu)_p = -A(\mu+p)_p - A(\mu+p)_{p-1} \cdot B(\mu)_{p-1} - A(\mu+p)_{p-2} \cdot B(\mu)_{p-2} - A(\mu+p)_{p-3} \cdot B(\mu)_{p-3} - \dots - A(\mu+p)_1 \cdot B(\mu)_1;$$

les indices μ et p étant des nombres entiers quelconques, γ compris zéro, pourvu que l'on remarque que, pour $p=0$, on a généralement . . . (67a)''

$$B(\mu)_0 = 1.$$

Et nous aurons, pour la résolution des équations indéfinies (671), c'est-à-dire, pour la détermination du nombre indéfini d'inconnues X_0, X_1, X_2, X_3 , etc., les expressions très-simples . . . (673)

$$X_0 = M_0 + M_1 \cdot B(0)_1 + M_2 \cdot B(0)_2 + M_3 \cdot B(0)_3 + \text{etc.},$$

$$X_1 = M_1 + M_2 \cdot B(1)_1 + M_3 \cdot B(1)_2 + M_4 \cdot B(1)_3 + \text{etc.},$$

$$X_2 = M_2 + M_3 \cdot B(2)_1 + M_4 \cdot B(2)_2 + M_5 \cdot B(2)_3 + \text{etc.},$$

$$X_3 = M_3 + M_4 \cdot B(3)_1 + M_5 \cdot B(3)_2 + M_6 \cdot B(3)_3 + \text{etc.},$$

etc., etc.

Il est sans doute superflu de prévenir que ce système spécial de procédés, pour la résolution des équations linéaires d'un nombre quelconque (671), provient immédiatement du dernier des susdits $(p+1)$ systèmes différents d'après lesquels peut s'opérer cette résolution, et notamment de celui de ces systèmes qui, dans leur expression générale (153) de la deuxième section de la Philosophie de la Technique, répond à l'indice . . . (674)

$$\mu = p - 1 = 0.$$

Et c'est aussi là le principe de la démonstration que, dans la *Critique de la Théorie de Laplace*, où nous avons produit ce système spécial de résolution d'un nombre indéfini d'équations linéaires, nous avons promis d'en donner.

Or, pour appliquer ce mode ou système de solution à nos équations linéaires (605), qu'il s'agit de résoudre, afin de déterminer les fonctions théoriques $R(\psi)_1, R(\psi)_2, R(\psi)_3$, etc., il suffit de mettre ces équations (605) sous la forme des présentes équations (671), en considérant les inconnues X_0, X_1, X_2 , etc., comme étant nos présentes fonctions en question, savoir . . . (675)

$$X_0 = R(\psi)_1, \quad X_1 = R(\psi)_2, \quad X_2 = R(\psi)_3, \quad \text{etc.},$$

et généralement . . . (675)'

$$X_\gamma = R(\psi)_{\gamma+1}.$$

Ainsi, pour amener les équations (605) à la forme (671), elles prendront d'abord

la forme . . . (676)

$$\begin{aligned} - (1)_2^{(n)} &= R(\omega)_2 + R(\omega)_3 \cdot (3)_1^{(n)} + R(\omega)_3 \cdot (4)_2^{(n)} + R(\omega)_4 \cdot (5)_3^{(n)} + \text{etc.}, \\ - (2)_3^{(n)} &= R(\omega)_3 + R(\omega)_4 \cdot (4)_2^{(n)} + R(\omega)_5 \cdot (5)_3^{(n)} + R(\omega)_6 \cdot (6)_4^{(n)} + \text{etc.}, \\ - (3)_4^{(n)} &= R(\omega)_4 + R(\omega)_5 \cdot (5)_3^{(n)} + R(\omega)_6 \cdot (6)_4^{(n)} + R(\omega)_7 \cdot (7)_5^{(n)} + \text{etc.}, \\ - (4)_5^{(n)} &= R(\omega)_5 + R(\omega)_6 \cdot (6)_4^{(n)} + R(\omega)_7 \cdot (7)_5^{(n)} + R(\omega)_8 \cdot (8)_6^{(n)} + \text{etc.}, \\ &\text{etc., etc.}; \end{aligned}$$

en construisant ici les quantités auxiliaires d'après la formule . . . (676')

$$(p)_q^{(n)} = \frac{p^{(q)} x}{p^{(q-1)} x}.$$

Et alors, la première de ces équations (676) aura déjà la forme de la première des équations (671). — Retranchant ensuite chacune de ces équations de celle qui la suit immédiatement, on obtiendra les équations . . . (677)

$$\begin{aligned} - [(2)_3^{(n)} - (1)_2^{(n)}] &= R(\omega)_2 \cdot [(4)_3^{(n)} - (3)_1^{(n)}] + R(\omega)_3 \cdot [(5)_3^{(n)} - (4)_2^{(n)}] + \text{etc.}, \\ - [(3)_4^{(n)} - (2)_3^{(n)}] &= R(\omega)_3 \cdot [(5)_4^{(n)} - (4)_3^{(n)}] + R(\omega)_4 \cdot [(6)_4^{(n)} - (5)_3^{(n)}] + \text{etc.}, \\ - [(4)_5^{(n)} - (3)_4^{(n)}] &= R(\omega)_4 \cdot [(6)_5^{(n)} - (5)_4^{(n)}] + R(\omega)_5 \cdot [(7)_5^{(n)} - (6)_4^{(n)}] + \text{etc.}, \\ &\text{etc., etc.}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire, les équations . . . (677')

$$\begin{aligned} - (2)_4^{(n)} &= R(\omega)_2 + R(\omega)_3 \cdot (5)_4^{(n)} + R(\omega)_4 \cdot (6)_4^{(n)} + R(\omega)_5 \cdot (7)_4^{(n)} + \text{etc.}, \\ - (3)_5^{(n)} &= R(\omega)_3 + R(\omega)_4 \cdot (6)_5^{(n)} + R(\omega)_5 \cdot (7)_5^{(n)} + R(\omega)_6 \cdot (8)_5^{(n)} + \text{etc.}, \\ - (4)_6^{(n)} &= R(\omega)_4 + R(\omega)_5 \cdot (7)_6^{(n)} + R(\omega)_6 \cdot (8)_6^{(n)} + R(\omega)_7 \cdot (9)_6^{(n)} + \text{etc.}, \\ &\text{etc., etc.}; \end{aligned}$$

en construisant ici les quantités auxiliaires d'après la formule . . . (677)''

$$(p)_q^{(n)} = \frac{[(p)_{q-1}^{(n)} - (p-1)_{q-2}^{(n)}]}{[(q)_{q-1}^{(n)} - (q-1)_{q-2}^{(n)}}.$$

Et parmi ces équations (677)', la première aura la forme de la seconde des équations (671). — Retranchant de nouveau chacune de ces équations (677)' de celle qui la suit immédiatement, on obtiendra les équations . . . (678)

$$\begin{aligned} - [(3)_5^{(n)} - (2)_4^{(n)}] &= R(\omega)_3 \cdot [(6)_5^{(n)} - (5)_4^{(n)}] + R(\omega)_4 \cdot [(7)_5^{(n)} - (6)_4^{(n)}] + \text{etc.}, \\ - [(4)_6^{(n)} - (3)_5^{(n)}] &= R(\omega)_4 \cdot [(7)_6^{(n)} - (6)_5^{(n)}] + R(\omega)_5 \cdot [(8)_6^{(n)} - (7)_5^{(n)}] + \text{etc.}, \\ - [(5)_7^{(n)} - (4)_6^{(n)}] &= R(\omega)_5 \cdot [(8)_7^{(n)} - (7)_6^{(n)}] + R(\omega)_6 \cdot [(9)_7^{(n)} - (8)_6^{(n)}] + \text{etc.}, \\ &\text{etc., etc.}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire, les équations . . . (678)^v

$$\begin{aligned} - (3)_6^{(s)} &= R(\varpi)_3 + R(\varpi)_4 \cdot (7)_6^{(s)} + R(\varpi)_5 \cdot (8)_6^{(s)} + R(\varpi)_6 \cdot (9)_6^{(s)} + \text{etc.}, \\ - (4)_7^{(s)} &= R(\varpi)_3 + R(\varpi)_4 \cdot (8)_7^{(s)} + R(\varpi)_5 \cdot (9)_7^{(s)} + R(\varpi)_6 \cdot (10)_7^{(s)} + \text{etc.}, \\ - (5)_8^{(s)} &= R(\varpi)_3 + R(\varpi)_4 \cdot (9)_8^{(s)} + R(\varpi)_5 \cdot (10)_8^{(s)} + R(\varpi)_6 \cdot (11)_8^{(s)} + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}, \text{ etc.}; \end{aligned}$$

en construisant ici les quantités auxiliaires d'après la formule . . . (678)^v

$$(p)_q^{(s)} = \frac{[(p)_{q-1}^{(s)} - (p-1)_{q-1}^{(s)}]}{[(q)_{q-1}^{(s)} - (q-1)_{q-1}^{(s)}]}.$$

Et parmi ces équations (678), la première a la forme de la troisième des équations (671). — Procédant ici de la même manière pour l'élimination de l'inconnue $R(\varpi)_3$, on obtiendra les équations . . . (679)

$$\begin{aligned} - (4)_8^{(3)} &= R(\varpi)_4 + R(\varpi)_5 \cdot (9)_8^{(3)} + R(\varpi)_6 \cdot (10)_8^{(3)} + R(\varpi)_7 \cdot (11)_8^{(3)} + \text{etc.}, \\ - (5)_9^{(3)} &= R(\varpi)_4 + R(\varpi)_5 \cdot (10)_9^{(3)} + R(\varpi)_6 \cdot (11)_9^{(3)} + R(\varpi)_7 \cdot (12)_9^{(3)} + \text{etc.}, \\ - (6)_{10}^{(3)} &= R(\varpi)_4 + R(\varpi)_5 \cdot (11)_{10}^{(3)} + R(\varpi)_6 \cdot (12)_{10}^{(3)} + R(\varpi)_7 \cdot (13)_{10}^{(3)} + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}, \text{ etc.}; \end{aligned}$$

en construisant ici les quantités auxiliaires d'après la formule . . . (679)^v

$$(p)_q^{(3)} = \frac{[(p)_{q-1}^{(3)} - (p-1)_{q-1}^{(3)}]}{[(q)_{q-1}^{(3)} - (q-1)_{q-1}^{(3)}]}.$$

Et procédant toujours de la même manière pour l'élimination successive des inconnues ultérieures $R(\varpi)_4$, $R(\varpi)_5$, etc., on obtiendra une suite progressive d'équations, où, dans chacune de ces suites, la première équation aura toujours la forme de l'équation correspondante dans les équations (671). — Ainsi, en réunissant toutes ces premières équations, on aura, pour nos équations (605) dont il est question, les équations transformées . . . (680)

$$\begin{aligned} - (1)_9^{(s)} &= R(\varpi)_1 + R(\varpi)_2 \cdot (3)_9^{(s)} + R(\varpi)_3 \cdot (4)_9^{(s)} + R(\varpi)_4 \cdot (5)_9^{(s)} + \text{etc.}, \\ - (2)_{10}^{(s)} &= R(\varpi)_1 + R(\varpi)_2 \cdot (5)_{10}^{(s)} + R(\varpi)_3 \cdot (6)_{10}^{(s)} + R(\varpi)_4 \cdot (7)_{10}^{(s)} + \text{etc.}, \\ - (3)_{11}^{(s)} &= R(\varpi)_1 + R(\varpi)_2 \cdot (7)_{11}^{(s)} + R(\varpi)_3 \cdot (8)_{11}^{(s)} + R(\varpi)_4 \cdot (9)_{11}^{(s)} + \text{etc.}, \\ - (4)_{12}^{(s)} &= R(\varpi)_1 + R(\varpi)_2 \cdot (9)_{12}^{(s)} + R(\varpi)_3 \cdot (10)_{12}^{(s)} + R(\varpi)_4 \cdot (11)_{12}^{(s)} + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}, \text{ etc.}; \end{aligned}$$

les quantités auxiliaires étant construites, pour un indice supérieur μ , d'après la formule générale . . . (680)^v

$$(p)_{\varphi}^{(n)} = \frac{[(p)_{\varphi-1}^{(n-1)} - (p-1)_{\varphi-1}^{(n-1)}]}{[(q)_{\varphi-1}^{(n-1)} - (q-1)_{\varphi-1}^{(n-1)}]} ;$$

en partant des quantités initiales, qui correspondent à l'indice supérieur égal à zéro, et qui, d'après (676)', sont déterminées par la formule . . . (680)''

$$(p)_{\varphi}^{(n)} = \frac{\mathbb{F}^{(n)} x}{\mathbb{F}^{(q)} x}.$$

Donc, en comparant nos présentes équations (680) avec les équations générales (671)', nous aurons d'abord les valeurs . . . (681)

$$M_0 = -(1)_0^{(n)}, \quad M_1 = -(2)_4^{(1)}, \quad M_2 = -(3)_6^{(2)}, \quad \text{etc., etc.,}$$

et généralement, pour un indice p , . . . (681)'

$$M_p = -(p+1)_{(p+1)}^{(p)}.$$

Et nous aurons ensuite, pour les quantités auxiliaires $B(\mu)_1, B(\mu)_2, B(\mu)_3$, etc., en vertu de leurs expressions générales (672), les déterminations présentes et également générales . . . (682)

$$B(\mu)_1 = -(2\mu + 3)_{2+\mu}^{(2)},$$

$$B(\mu)_2 = -(2\mu + 4)_{4+\mu}^{(3)} - (2\mu + 5)_{4+\mu}^{(2)} \cdot B(\mu)_1,$$

$$B(\mu)_3 = -(2\mu + 5)_{5+\mu}^{(4)} - (2\mu + 6)_{5+\mu}^{(3)} \cdot B(\mu)_1 - (2\mu + 7)_{5+\mu}^{(2)} \cdot B(\mu)_2,$$

$$B(\mu)_4 = -(2\mu + 6)_{6+\mu}^{(5)} - (2\mu + 7)_{6+\mu}^{(4)} \cdot B(\mu)_1 - (2\mu + 8)_{6+\mu}^{(3)} \cdot B(\mu)_2 \\ - (2\mu + 9)_{6+\mu}^{(2)} \cdot B(\mu)_3,$$

etc., etc.; et généralement . . . (682)'

$$B(\mu)_p = -(2\mu + p + 2)_{p+\mu}^{(p)} - (2\mu + p + 3)_{p+\mu}^{(p-1)} \cdot B(\mu)_1 \\ - (2\mu + p + 4)_{p+\mu}^{(p-2)} \cdot B(\mu)_2 - (2\mu + p + 5)_{p+\mu}^{(p-3)} \cdot B(\mu)_3 \\ - (2\mu + p + 6)_{p+\mu}^{(p-4)} \cdot B(\mu)_4 \dots - (2\mu + p + 1)_{p+\mu}^{(p-p+1)} \cdot B(\mu)_{p-1}.$$

Et avec ces quantités (681) et (682), nous obtiendrons, en vertu des expressions générales (673), pour la détermination des inconnues $R(\omega)_1, R(\omega)_2, R(\omega)_3$, etc., qui donnent la solution des présentes équations transformées (680), et par conséquent de nos équations primitives (605), les expressions . . . (683)

$$R(\omega)_1 = - \left\{ (1)_2^{(n)} + (2)_4^{(1)} \cdot B(0)_1 + (3)_6^{(2)} \cdot B(0)_2 + (4)_8^{(3)} \cdot B(0)_3 + \text{etc.} \right\},$$

$$R(\omega)_2 = - \left\{ (2)_4^{(1)} + (3)_6^{(2)} \cdot B(1)_1 + (4)_8^{(3)} \cdot B(1)_2 + (5)_{10}^{(4)} \cdot B(1)_3 + \text{etc.} \right\},$$

$$R(\omega)_3 = - \left\{ (3)_6^{(2)} + (4)_8^{(3)} \cdot B(2)_1 + (5)_{10}^{(4)} \cdot B(2)_2 + (6)_{12}^{(5)} \cdot B(2)_3 + \text{etc.} \right\},$$

$$R(\omega)_4 = - \left\{ (4)_8^{(3)} + (5)_{10}^{(4)} \cdot B(3)_1 + (6)_{12}^{(5)} \cdot B(3)_2 + (7)_{14}^{(6)} \cdot B(3)_3 + \text{etc.} \right\},$$

etc., etc.;

en observant que, d'après la susdite relation (681) et (681)' entre nos présentes quantités $(1)_1^{(0)}$, $(2)_4^{(1)}$, $(3)_8^{(2)}$, etc., et les quantités générales M_2 , M_4 , M_8 , etc., les développements (683) que nous venons d'obtenir pour la détermination des inconnues $R(\omega)_1$, $R(\omega)_2$, $R(\omega)_3$, etc., s'arrêtent toujours, pour un nombre quelconque ω de ces inconnues, aux termes qui impliquent la quantité $(\omega)_{2^{\omega-1}}^{(\omega-1)}$. Ainsi, pour les différents nombres donnés ω de ces inconnues, on aura leurs déterminations progressives que voici . . . (684)

Pour $\omega = 1$;

$$R(1)_1 = - (1)_2^{(0)} .$$

. Pour $\omega = 2$;

$$R(2)_2 = - (1)_2^{(0)} - (2)_4^{(1)} \cdot B(1)_1 ,$$

$$R(2)_3 = - (2)_4^{(1)} .$$

Pour $\omega = 3$;

$$R(3)_3 = - (1)_2^{(0)} - (2)_4^{(1)} \cdot B(1)_1 - (3)_8^{(2)} \cdot B(2)_2 ,$$

$$R(3)_4 = - (2)_4^{(1)} - (3)_8^{(2)} \cdot B(1)_1 ,$$

$$R(3)_5 = - (3)_8^{(2)} .$$

etc., etc.

Et l'on voit, dans ces résultats, que, pour l'augmentation progressive de ces inconnues $R(\omega)_1$, $R(\omega)_2$, $R(\omega)_3$, etc., comme on peut en avoir besoin dans l'application de notre présente méthode universelle, il suffit de calculer, dans ces développements (683) et (684), les termes ultérieurs dépendant de ces nouvelles inconnues, sans qu'il soit nécessaire de recommencer toute la résolution des équations linéaires (605) qui déterminent ces inconnues, comme on est obligé de le faire dans le susdit premier système (154)' de cette résolution, notamment dans celui qui est encore le seul connu des géomètres. En effet, comme on le voit par nos présentes constructions consécutives (676)', (677)', (678)', etc. des quantités auxiliaires qui entrent dans nos résultats (683) et (684), les termes antérieurs, ceux qui correspondent à un nombre donné ω des inconnues, et par conséquent des équations en question, ne changent nullement par l'augmentation $(\omega+1)$ de ce nombre ω ; et ce sont seulement les termes nouveaux ou ultérieurs qui, dans les développements (683) et (684), modifient la détermination de ces $(\omega+1)$ inconnues nouvelles. De plus, un avantage majeur qui est attaché à ce mode de la résolution des équations linéaires, surtout lorsque le nombre d'inconnues peut augmenter indéfiniment, consiste encore en ce que, avec les coefficients donnés A et M des équations générales (671), en construisant toujours des fonctions analogues à celles que, pour notre cas présent, nous avons construites progressivement sous les marques

(676)', (677)', (678)', etc., on peut évaluer immédiatement ces fonctions auxiliaires pour éviter l'extrême embarras que produisent aujourd'hui, dans la méthode connue, les termes distincts qu'il faut calculer séparément, et qui, lorsque le nombre d'inconnues serait progressivement 5, 6, 7, etc., se présenteraient déjà au nombre de 120, de 720, de 5040, etc., au numérateur et au dénominateur de l'expression de chaque inconnue, ce qui serait réellement un calcul impraticable. — Nous pensons que, en outre de son application présente, les géomètres nous sauront gré de leur avoir fait connaître, dans nos ouvrages, tous les différents systèmes par lesquels on peut résoudre les équations linéaires, et surtout le présent système (671), (673) et (683), qui est indispensable lorsque le nombre d'inconnues peut augmenter indéfiniment, et dont les géomètres, jusqu'à ce jour, n'ont eu aucune idée.

Nous terminons ainsi, dans tous ses développements, l'exposition et la démonstration rigoureuse de notre présente méthode primordiale ou universelle qui, comme anticipation technique sur notre méthode suprême (142), (143), etc., nous offre la solution directe et toujours praticable de la grande question ayant pour objet la progressive génération théorique de la nature de toute fonction, et par conséquent la résolution de tous les problèmes, pour ouvrir la nouvelle période des mathématiques, comme nous allons le voir à l'instant. — Avant tout, pour éclaircir ce grand et décisif procédé de la science, et surtout pour montrer l'extrême facilité de son application pratique, nous allons en présenter un exemple. Mais, de crainte que les mathématiciens de l'académie des sciences de Paris ne trouvent encore inintelligible ce progrès final de leur science, comme ils s'en vantent publiquement, nous allons prendre cet exemple sur une fonction assez simple pour qu'elle soit à leur portée, en priant les autres géomètres de remarquer que, quelle que soit la fonction proposée, et quelque compliquée que puisse être sa nature, les opérations seraient tout à fait identiques et également faciles.

Or, la fonction simple que nous allons ainsi prendre pour exemple, afin de nous mettre à la portée des illustres académiciens de Paris, est la différentielle d'une fonction transcendante, mais qui elle-même est immanente ou rationnelle, comme on le dit inexactement encore aujourd'hui, et nommément la différentielle du logarithme, savoir . . . (685)

$$dFx = \frac{dx}{x};$$

en supposant que nous ne connaissons pas la nature de cette fonction, et en nous proposant d'en opérer progressivement la génération théorique par l'application de la méthode universelle que nous venons de découvrir. La première chose qu'il faut faire, c'est de déterminer les éléments théoriques $R(\omega)$, $R(\omega)$, $R(\omega)$, etc., de la fonction proposée, par le moyen des équations (605), et nommément par la résolution (683) de ces équations. Et pour cela, il faut

connaître les coefficients des équations (605), qui en sont les données ou les quantités connues, et qui s'y trouvent formées par les successives dérivées différentielles de la fonction cherchée Fx ; dérivées différentielles que, d'après la notation (579) et (579)', nous désignons généralement, pour un indice quelconque μ , par la caractéristique . . . (686)

$$F^{(\mu)}x = \frac{1}{1|\mu|!} \left(\frac{d^\mu Fx}{dx^\mu} \right).$$

Nous aurons donc, dans notre cas présent (685), pour ces dérivées différentielles, les valeurs . . . (687)

$$F^{(1)}x = +\frac{1}{x}, \quad F^{(2)}x = -\frac{1}{2x^2}, \quad F^{(3)}x = +\frac{1}{3x^3}, \quad F^{(4)}x = -\frac{1}{4x^4},$$

etc., etc.; et généralement . . . (687')

$$F^{(\mu)}x = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{1}{\mu \cdot x^\mu}.$$

Et ce seront là les coefficients des équations (605) qui, par leur résolution (683), nous feront connaître les éléments théoriques $R(\omega)_1$, $R(\omega)_2$, $R(\omega)_3$, etc., pour notre fonction proposée Fx . — Mais, pour montrer les opérations successives dans cette génération progressive de la nature de la fonction cherchée Fx , au lieu de nous arrêter tout à coup à ce degré déterminé ω de cette génération, nous allons passer progressivement par les degrés successifs de $\omega=1$, de $\omega=2$, et de $\omega=3$, en nous arrêtant alors, dans cet exemple, à ce dernier degré, comme suffisant pour éclaircir complètement notre présente méthode universelle.

Or, en supposant d'abord $\omega=1$, et en nous arrêtant ainsi à ce premier degré de la génération théorique de la fonction Fx , nous n'aurons que le seul élément $R(1)_1$ à déterminer; élément qui se trouvera donné par la première des équations (605), savoir, par l'équation . . . (688)

$$0 = F^{(0)}x \cdot R(1)_1 + F^{(1)}x,$$

dont la solution immédiate donnerait ici, pour cet élément $R(1)_1$, à l'aide des valeurs (687), la détermination . . . (688')

$$R(1)_1 = -\frac{F^{(1)}x}{F^{(0)}x} = +2x.$$

Mais, pour nous préparer à la solution progressive et générale des équations (605), par notre nouveau procédé (683), observons que, dans le cas présent, ces formules progressives (683), en s'y arrêtant à la première, comme sous la marque (684), donnent aussi immédiatement . . . (689)

$$R(1)_1 = -\frac{F^{(1)}x}{F^{(0)}x} = -\frac{F^{(1)}x}{F^{(0)}x} = +2x.$$

Supposons ensuite que $\mathfrak{G}=2$; et en nous arrêtant ainsi à ce deuxième degré de la génération théorique de la fonction Fx , nous aurons à déterminer les deux éléments $R(2)_1$ et $R(2)_2$; éléments qui se trouveront donnés par les deux premières des équations (605), savoir, par les deux équations . . .

$$\begin{aligned} 0 &= F^{(3)}x.R(2)_2 + F^{(1)}x.R(2)_1 + F^{(1)}x, \\ 0 &= F^{(1)}x.R(2)_2 + F^{(3)}x.R(2)_1 + F^{(3)}x. \end{aligned}$$

Et appliquant ici immédiatement, à la solution de ces équations, nos formules progressives (683), les deux premières de ces formules, comme sous la marque (684), nous donneront immédiatement, pour les deux éléments en question $R(2)_1$ et $R(2)_2$, les valeurs . . . (690)'

$$\begin{aligned} R(2)_1 &= -(1)_{2,1}^{(6)} - (2)_{4,1}^{(1)}.B(0)_1, \\ R(2)_2 &= -(2)_{4,2}^{(1)}; \end{aligned}$$

qui, en y substituant la valeur précédente (689) de la quantité auxiliaire $(1)_{2,1}^{(6)}$, seront simplement . . . (690)''

$$\begin{aligned} R(2)_1 &= +2x - (2)_{4,1}^{(1)}.B(0)_1, \\ R(2)_2 &= -(2)_{4,2}^{(1)}. \end{aligned}$$

Il ne reste donc qu'à connaître les quantités auxiliaires $(2)_{4,1}^{(1)}$ et $B(0)_1$. Et pour cels, les formules (680)' et (682) nous donneront les déterminations immédiates . . . (690)'''

$$\begin{aligned} (2)_{4,1}^{(1)} &= + \frac{(2)_{2,1}^{(6)} - (1)_{2,1}^{(6)}}{(4)_{2,1}^{(6)} - (3)_{2,1}^{(6)}}, \\ B(0)_1 &= -(3)_{2,1}^{(6)}; \end{aligned}$$

dans lesquelles, en vertu de la formule (680)'' et de nos présentes déterminations (687)', on a généralement les valeurs . . . (690)''''

$$(p)_{q,1}^{(6)} = \frac{F^{(p)}x}{F^{(q)}x} = -(-1)^{q-p} \frac{q \cdot x^{q-p}}{p};$$

qui donneront ici . . . (690)'''''

$$\begin{aligned} (2)_{4,1}^{(1)} &= -6 \cdot x^3, \\ B(0)_1 &= + \frac{2}{3x}. \end{aligned}$$

Donc, en substituant ces valeurs dans les expressions (690)'', on obtiendra, pour les deux éléments $R(2)_1$ et $R(2)_2$ du second degré de la génération théorique de notre fonction proposée Fx , les déterminations . . . 691'

$$R(2)_1 = +6x, \quad \text{et} \quad R(2)_2 = +6 \cdot x^3.$$

Supposons enfin que $\varpi=3$; et en nous arrêtant ainsi à ce troisième degré de la génération théorique de la fonction Fx , nous aurons à déterminer les trois éléments $R(3)_1$, $R(3)_2$, $R(3)_3$; éléments qui se trouveront donnés par les trois premières des équations (605), savoir, par les trois équations . . . (692)

$$\begin{aligned} 0 &= F^{(1)}x.R(3)_3 + F^{(2)}x.R(3)_2 + F^{(3)}x.R(3)_1 + F^{(4)}x, \\ 0 &= F^{(2)}x.R(3)_3 + F^{(3)}x.R(3)_2 + F^{(4)}x.R(3)_1 + F^{(5)}x, \\ 0 &= F^{(3)}x.R(3)_3 + F^{(4)}x.R(3)_2 + F^{(5)}x.R(3)_1 + F^{(6)}x. \end{aligned}$$

Et appliquant de nouveau, à la solution de ces équations, nos formules progressives (683), les trois premières de ces formules, comme sous la marque (684), nous donneront immédiatement, pour les trois éléments en question $R(3)_1$, $R(3)_2$, $R(3)_3$, les expressions . . . (692)'

$$\begin{aligned} R(3)_1 &= -(1)_{\frac{1}{6}}^{(1)} - (2)_{\frac{1}{6}}^{(2)}.B(0)_2 - (3)_{\frac{1}{6}}^{(3)}.B(0)_3, \\ R(3)_2 &= -(2)_{\frac{1}{6}}^{(1)} - (3)_{\frac{1}{6}}^{(2)}.B(1)_1, \\ R(3)_3 &= -(3)_{\frac{1}{6}}^{(1)}; \end{aligned}$$

et ces expressions, en y introduisant les valeurs précédentes (691) de $R(2)_1$ et $R(2)_2$, lesquelles, d'après (690)', entrent dans les présentes expressions, seront simplement . . . (692)''

$$\begin{aligned} R(3)_1 &= + 6x - (3)_{\frac{1}{6}}^{(1)}.B(0)_3, \\ R(3)_2 &= + 6.x^2 - (3)_{\frac{1}{6}}^{(2)}.B(1)_1, \\ R(3)_3 &= -(3)_{\frac{1}{6}}^{(1)}. \end{aligned}$$

Il ne reste donc qu'à connaître les quantités auxiliaires $(3)_{\frac{1}{6}}^{(1)}$, $B(0)_3$ et $B(1)_1$. Et pour cela les formules (680)' et (682), nous donneront de nouveau les déterminations consécutives, savoir, d'abord . . . (693)

$$\begin{aligned} (3)_{\frac{1}{6}}^{(1)} &= \frac{(3)_{\frac{1}{6}}^{(2)} - (2)_{\frac{1}{6}}^{(1)}}{(6)_{\frac{1}{6}}^{(1)} - (5)_{\frac{1}{6}}^{(2)}}; \\ B(0)_3 &= - \frac{(4)_{\frac{1}{6}}^{(1)} - (5)_{\frac{1}{6}}^{(2)}.B(0)_1}{(5)_{\frac{1}{6}}^{(1)}}; \\ B(1)_1 &= -(5)_{\frac{1}{6}}^{(1)}; \end{aligned}$$

et ensuite généralement . . . (693)'

$$(p)_{\frac{1}{6}}^{(1)} = \frac{(p)_{\frac{1}{6}}^{(2)} - (p-1)_{\frac{1}{6}}^{(1)}}{(q)_{\frac{1}{6}}^{(1)} - (q-1)_{\frac{1}{6}}^{(2)}};$$

de sorte qu'en y introduisant nos présentes valeurs générales (690)' on obtiendra les quantités . . . (693)''

$$(3)_4^{(1)} = \frac{(3)_4^{(0)} - (2)_3^{(0)}}{(5)_4^{(0)} - (4)_3^{(0)}} = -\frac{10 \cdot x^2}{3},$$

$$(6)_5^{(1)} = \frac{(6)_5^{(0)} - (5)_4^{(0)}}{(5)_5^{(0)} - (4)_4^{(0)}} = -\frac{4}{3x},$$

$$(5)_6^{(1)} = \frac{(5)_6^{(0)} - (4)_5^{(0)}}{(4)_6^{(0)} - (3)_5^{(0)}} = -\frac{6}{5x}.$$

Ainsi, en y joignant les valeurs $(20)_7^{(1)}$ de $(2)_4^{(1)}$ et de $B(0)_2$, et la valeur $(60)_9^{(1)}$ de $(4)_5^{(0)}$, et en introduisant toutes ces valeurs dans les expressions (693) , on obtiendra ici les quantités . . . $(693)''$

$$(3)_{10}^{(1)} = -20 \cdot x^3,$$

$$R(0)_3 = + \frac{3}{10 \cdot x^2},$$

$$B(1)_1 = + \frac{6}{5x};$$

quantités qu'il nous restait à connaître dans les expressions $(692)''$ et qui, en les introduisant dans ces expressions, nous feront obtenir, pour les trois éléments $R(3)_1$, $R(3)_2$, $R(3)_3$ du troisième degré de la génération théorique de la fonction proposée Fx , les déterminations . . . (694)

$$R(3)_1 = + 12x,$$

$$R(3)_2 = + 30 \cdot x^2,$$

$$R(3)_3 = + 20 \cdot x^3.$$

On conçoit qu'en procédant toujours de la même manière, on obtiendra, avec plus de travail sans doute, mais avec la même facilité, les éléments $R(\omega)_1$, $R(\omega)_2$, $R(\omega)_3$, . . . $R(\omega)_m$ pour un degré quelconque ω de la génération théorique de la fonction cherchée Fx . — Seulement, pour éviter des erreurs de calcul dans les déterminations progressives (689) , (691) , (694) , etc., de ces éléments, nommément des suivants par les précédents, il conviendra de les vérifier à chaque fois dans les équations (605) , c'est-à-dire, dans les équations successives (688) , (690) , (692) , etc., par lesquelles ces éléments sont donnés.

Connaissant ainsi ces éléments théoriques qui déterminent la nature de la fonction problématique Fx , on peut maintenant, avec facilité, procéder à la génération elle-même de cette fonction, et nommément, d'abord, à sa génération théorique, d'après la loi (635) ou (636) des parties constituantes de cette génération théorique (637) , et ensuite, à la génération technique de ce qu'il

reste encore à compléter dans cette progressive génération théorique, d'après la loi (670) de la série complémentaire (639). — Nous allons donc, avec les éléments théoriques que nous venons de déterminer, sous les marques (68g), (691), (694), pour la fonction proposée (685) de notre présent exemple, procéder à la génération en question de cette fonction Fx . Et nous le ferons de nouveau séparément, pour les degrés progressifs de $\varpi = 1$, de $\varpi = 2$, et de $\varpi = 3$, afin de montrer comment s'accomplit ainsi progressivement la génération théorique de toute fonction.

Ayant tout, observons que, d'après leur notation (581) et (581)', les quantités $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$, etc., qui, comme coefficients, entrent, d'abord, dans la génération théorique (637), et ensuite, dans la loi (670) de la génération technique complémentaire (639), ont ici, d'après les déterminations présentes (687) et (687)' des dérivées différentielles de la fonction proposée (685), les valeurs . . . (695)

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{a}, \quad \mathfrak{A}_2 = -\frac{1}{2.a^2}, \quad \mathfrak{A}_3 = +\frac{1}{3.a^3}, \quad \mathfrak{A}_4 = -\frac{1}{4.a^4},$$

etc., etc.; et généralement . . . (695')

$$\mathfrak{A}_\mu = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{1}{\mu.a^\mu};$$

la quantité a étant la quantité arbitraire avec laquelle s'opère, d'abord, la génération théorique (637), et ensuite, la génération technique complémentaire (641) et (646). — Et avec toutes ces données, procédons maintenant, comme nous nous le sommes proposé, à la génération en question de notre présente (685) fonction problématique Fx .

D'abord, pour $\varpi = 1$, formant le premier degré de cette génération théorique, pour lequel nous avons déterminé, sous la marque (689), l'élément correspondant $R(1)$, la loi (636), en y faisant $\varpi = 1$, c'est-à-dire, la première des expressions (635), en y faisant de plus $\varpi = 1$, donc, pour la partie constituante $P(1)$, de la génération théorique (637), en y introduisant la fonction (689) qui forme ici l'élément $R(1)$, l'expression . . . (696)

$$P(1) = 1 - \frac{x-a}{2x} = \frac{x+a}{2x}.$$

Et introduisant cette valeur dans la somme (637), on obtiendra, pour le premier degré de la génération théorique de la fonction (685) dont il est question, en ayant égard aux valeurs (695), l'expression . . . (696')

$$\Sigma(1) = \frac{(x+a)(x-a)}{2ax};$$

qui, en vertu de la loi générale (638), donnera, pour la fonction cherchée, la génération complète . . . (697)

$$Fx = Fa + \frac{(x+a)(x-a)}{2ax} + S(a);$$

dans laquelle la quantité $S(a)$ forme la série ou la génération technique complémentaire (639).

Comme tel, ce premier degré de génération théorique de la fonction en question Fx , en y faisant abstraction de la série complémentaire $S(a)$, répond déjà parfaitement à la propriété principale de cette fonction, résultant de sa différentielle proposée (685). En effet, si l'on désigne par x le produit $(y^m \cdot z^n)$ des puissances m et n de deux variables y et z , la différentielle proposée (685) sera alors . . . (698)

$$dFx = \frac{dx}{x} = \frac{d(y^m \cdot z^n)}{y^m \cdot z^n} = m \cdot \frac{dy}{y} + n \cdot \frac{dz}{z};$$

et prenant les intégrales problématiques, on aura . . . (698')

$$Fx = F(y^m \cdot z^n) = m \cdot Fy + n \cdot Fz;$$

de sorte que, donnant aux exposants m et n les valeurs de l'unité, prise successivement comme positive et comme négative, on aura les quatre relations . . . (699)

Pour $m = 1$ et $n = 1$, $F(yz) = Fy + Fz$;

$$m = 1 \text{ et } n = -1, \quad F\left(\frac{y}{z}\right) = Fy - Fz;$$

$$m = -1, \text{ et } n = 1, \quad F\left(\frac{z}{y}\right) = -Fy + Fz = -F\left(\frac{y}{z}\right);$$

$$m = -1, \text{ et } n = -1, \quad F\left(\frac{1}{yz}\right) = -Fy - Fz = -F(yz).$$

Ce sont là, comme on le sait d'ailleurs, les relations fondamentales de la fonction cherchée Fx , telles que ces relations, en y joignant leur corollaire . . . (699')

$$F(1) = 0,$$

s'établissent par la seule différentielle (685) de cette fonction, et par conséquent avant qu'on en connaisse la nature. — Or, en faisant abstraction de la série complémentaire $S(a)$, l'expression (697) devient . . . (700)

$$Fx - Fa = \frac{(x+a)(x-a)}{2ax};$$

et elle montre que déjà ce premier degré de la génération théorique de la fonction en question Fx répond exactement à toutes les relations fondamentales (699) de cette fonction.

Procédons maintenant à la détermination de la série complémentaire $S(a)$ pour accomplir ainsi, par cette génération technique, ce qui manque encore dans ce premier degré (697) de la génération théorique de la fonction en ques-

tion. — Pour cela, suivant la loi générale (670) de nos séries complémentaires, nous aurons, d'abord, en vertu de la notation (581) et (581)', et des présentes valeurs (695) et (695)', pour la première partie constituante de cette loi (670), la détermination . . . (701)

$$\frac{d^{\alpha+\mu} F_x}{(a+\mu)! \cdot dx^{\alpha+\mu}} = A_{\alpha+\mu} = \frac{(-1)^{\alpha+\mu-1}}{(\alpha+\mu) \cdot a^{\alpha+\mu}};$$

qui, pour le premier degré présent, où $\alpha = 1$, sera . . . (701')

$$\frac{d^{1+\mu} F_x}{(1+\mu)! \cdot dx^{1+\mu}} = A_{1+\mu} = \frac{(-1)^{\mu}}{(1+\mu) \cdot a^{1+\mu}}.$$

Pour ce qui concerne ensuite la seconde partie constituante $A(\alpha)^{(n)}$ de la loi générale (670), en y faisant ici $\alpha = 1$, nous aurons, en vertu de son expression générale (668), la détermination . . . (702)

$$A(1)^{(n)} = A_1 \cdot T(1)_0^{(n-1)} = \frac{T(1)_0^{(n-1)}}{a};$$

dans laquelle la quantité auxiliaire $T(1)_0^{(n-1)}$, en vertu de sa formation (667) et (667)', est . . . (702')

$$T(1)_0^{(n-1)} = \frac{1}{1^{(n-1)}!} \cdot d^{n-1} \left(\frac{1}{R(1)} \right) \cdot \frac{1}{dx^{n-1}};$$

c'est-à-dire, en y introduisant la fonction (689) pour $R(1)$, cette quantité sera ici . . . (702)''

$$T(1)_0^{(n-1)} = \frac{1}{1^{(n-1)}!} \cdot d^{n-1} \left(\frac{1}{2x} \right) \cdot \frac{1}{dx^{n-1}}.$$

Mais on a . . . (702)'''

$$d \left(\frac{1}{2x} \right) = - \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x^2}, \quad d^2 \left(\frac{1}{2x} \right) = + \frac{1^{(2)}}{2} \cdot \frac{dx^2}{x^3}, \quad d^3 \left(\frac{1}{2x} \right) = - \frac{1^{(3)}}{2} \cdot \frac{dx^3}{x^4},$$

etc.; et généralement . . . (702)'''

$$d^p \left(\frac{1}{2x} \right) = (-1)^p \cdot \frac{1^{(p)}}{2} \cdot \frac{dx^p}{x^{p+1}}.$$

On aura donc . . . (703)

$$T(1)_0^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2 \cdot x^n};$$

et par conséquent, pour la valeur finale $x = a$, en tenant compte des valeurs (695), on aura . . . (703)'

$$A(1)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2 \cdot a^{1+\mu}}.$$

Pour ce qui concerne enfin la troisième partie constituante $\Sigma(1)^{(2)}$ de la loi générale (670), elle est donnée immédiatement par son expression (669), en y faisant $\varpi=1$.

Ainsi, en réunissant ces trois parties constituantes $(701)'$, $(703)'$, et (669), d'après la loi (670), et en y donnant à la quantité arbitraire n la valeur $n=a$, pour ne pas introduire d'inutiles quantités arbitraires, nous aurons, en vertu de cette loi (670), pour les coefficients de la série complémentaire (639), qui forme ici notre série $S(2)$, l'expression générale . . . (704)

$$\Sigma_{\mu+a} = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{\mu-1}{\mu+1} + \frac{\mu}{1} \cdot \Sigma_{\mu} - \frac{2^{\mu-1}}{1!} \cdot \Sigma_{\mu-1} + \\ + \frac{2^{\mu-2}}{1!} \cdot \Sigma_{\mu-2} - \frac{2^{\mu-3}}{1!} \cdot \Sigma_{\mu-3} \dots (-1)^{\mu} \cdot \frac{2^{\mu-1}}{1!} \cdot \Sigma_1;$$

en ne perdant pas de vue que le coefficient Σ_1 , qui n'existe pas, est zéro. En évaluant cette formule avec les valeurs consécutives de $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, etc., on trouvera, pour ces coefficients, les quantités . . . (705)

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = -\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{3}, \quad \Sigma_3 = 0, \quad \Sigma_4 = -\frac{4}{1} \cdot \frac{2}{5}, \\ \Sigma_5 = 0, \quad \Sigma_6 = -\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{7}, \quad \Sigma_7 = 0, \quad \Sigma_8 = -\frac{4}{1} \cdot \frac{4}{9}, \\ \Sigma_{10} = 0, \quad \Sigma_{11} = -\frac{4}{1} \cdot \frac{5}{11}, \text{ etc., etc.};$$

en observant que la loi que suivent ces valeurs pour les coefficients à indices impairs $(2\lambda+1)$, est . . . (705')

$$\Sigma_{2\lambda+1} = -\frac{4}{1} \cdot \frac{\lambda}{1 \cdot (2\lambda+1)}.$$

On aura donc, pour la génération complète (697) de la fonction proposée (685), en réunissant, au premier degré (696)' de sa génération théorique, la présente (704) génération technique complémentaire, l'expression . . . (706)

$$F_x = F_a + \frac{(x+a)(x-a)}{2a \cdot x} \\ - \frac{4}{1} \cdot \left\{ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^3 + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^5 + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^7 + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^9 + \text{etc.} \right\}.$$

Nous ne nous arrêterons pas ici à signaler l'utilité que présente cette nouvelle formule pour le calcul des logarithmes. Nous en parlerons ci-après. — Procédons aux degrés ultérieurs de la génération théorique de la même fonction (685).

Pour $\varpi=2$, c'est-à-dire, pour le deuxième degré de cette génération, pour lequel nous avons déterminé, sous la marque (691), les deux éléments théoriques $R(2)$, et $R(2)'$, savoir . . . (707)

$$R(2)_1 = + 6x, \quad \text{et} \quad R(2)_2 = + 6.x^2,$$

si l'on introduit ces éléments dans la loi (636), c'est-à-dire, dans les deux premières des expressions (635), on obtiendra, pour la somme (637), par laquelle s'opère la génération théorique en question, les deux parties constituan-
tes . . . (707)

$$P(1)_2 = 1 - (x-a)^2 \cdot \frac{1}{6.x^2},$$

$$P(2)_2 = 1 - (x-a) \cdot \frac{1}{x} + (x-a)^2 \cdot \frac{1}{6.x^2}.$$

Et cette somme (637), en y introduisant en outre les valeurs (695), donnera alors, pour le deuxième degré de génération théorique, dont il est question, l'expression . . . (708)

$$\begin{aligned} \Sigma(2) &= \frac{1}{a} \cdot \left\{ 1 - (x-a)^2 \cdot \frac{1}{6.x^2} \right\} \cdot (x-a) \\ &\quad - \frac{1}{2.a^2} \left\{ 1 - (x-a) \cdot \frac{1}{x} + (x-a)^2 \cdot \frac{1}{6.x^2} \right\} \cdot (x-a)^2; \end{aligned}$$

expression qui se réduit à la forme très-simple . . . (708')

$$\Sigma(2) = \frac{(x+a)(x-a)}{12.a^2.x^2} \cdot \left\{ 8ax - (x^2 + a^2) \right\}.$$

Ainsi, la loi générale (638) donnera, à l'aide de cette génération théorique du second degré, pour notre fonction cherchée (685), la génération complète
... (709)

$$Fx = Fa + \frac{(x+a)(x-a)}{12.a^2.x^2} \cdot \left\{ 8xa - (x^2 + a^2) \right\} + S(3).$$

Et faisant ici abstraction de la série complémentaire S(3), qu'il nous reste à déterminer, la présente génération théorique du second degré répond de nouveau et nécessairement aux susdites propriétés fondamentales (699) de la fonction dont il s'agit.

Procédons maintenant à la détermination de la série complémentaire S(3), qui, comme nous le savons déjà, doit accomplir, par cette génération technique, ce qui manque encore dans le présent deuxième degré de la génération théorique de la fonction cherchée. — Pour cela, suivant toujours la loi générale (670) de ces séries complémentaires, nous aurons d'abord, pour la première partie constituante de cette loi, en vertu de la détermination (701) de cette première partie, en y faisant $\mathfrak{C} = 2$, la quantité : . . . (710)

$$\frac{a^{2+\mu} Fx}{(a+\mu)^2 \cdot dx^{2+\mu}} = 2_{2+\mu} = \frac{(-1)^{1+\mu}}{(2+\mu) \cdot a^{2+\mu}}.$$

Et nous aurons ensuite, pour la seconde partie constituante $\mathfrak{A}(\mathfrak{A})^{(2)}$ de la loi générale (670), lorsque $\mathfrak{A} = 2$, en vertu de son expression générale (668), la détermination . . . (711)

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A})^{(2)} = \mathfrak{A}_1 \cdot T(\mathfrak{A})_0^{(\mu-1)} + \mathfrak{A}_2 \cdot \left\{ T(\mathfrak{A})_1^{(\mu-1)} - T(\mathfrak{A})_0^{(\mu-2)} \right\} ;$$

dans laquelle les quantités auxiliaires $T(\mathfrak{A})_0^{(\mu-1)}$ et $T(\mathfrak{A})_1^{(\mu-1)}$, en vertu de leur formation (667) et (667)', sont . . . (711)'

$$T(\mathfrak{A})_0^{(\mu-1)} = \frac{1}{1^{(\mu-1)}!} \cdot d^{\mu-1} \left(\frac{1}{R(\mathfrak{A})_2} \right) \cdot \frac{1}{dx^{\mu-1}} ;$$

$$T(\mathfrak{A})_1^{(\mu-1)} = \frac{1}{1^{(\mu-1)}!} \cdot d^{\mu-1} \left(\frac{R(\mathfrak{A})_1}{R(\mathfrak{A})_2} \right) \cdot \frac{1}{dx^{\mu-1}} ;$$

quantités qui, en y introduisant les présentes valeurs (707) des deux éléments théoriques $R(\mathfrak{A})_1$ et $R(\mathfrak{A})_2$, deviendront ici . . . (711)''

$$T(\mathfrak{A})_0^{(\mu-1)} = \frac{1}{1^{(\mu-1)}!} \cdot d^{\mu-1} \left(\frac{1}{6x^2} \right) \cdot \frac{1}{dx^{\mu-1}} ;$$

$$T(\mathfrak{A})_1^{(\mu-1)} = \frac{1}{1^{(\mu-1)}!} \cdot d^{\mu-1} \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{dx^{\mu-1}} .$$

Mais on a généralement . . . (711)'''

$$d^k \left(\frac{1}{6x^2} \right) = (-1)^k \cdot \frac{1^{(k+1)}! \cdot dx^k}{6 \cdot x^{k+3}} , \text{ et}$$

$$d^k \left(\frac{1}{x} \right) = (-1)^k \cdot \frac{1^{k!} \cdot dx^k}{x^{k+1}} ,$$

pour un ordre quelconque k . On aura donc . . . (712)

$$T(\mathfrak{A})_0^{(\mu-1)} = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{\mu}{6 \cdot x^{\mu+1}} , \quad T(\mathfrak{A})_1^{(\mu-1)} = (-1)^{\mu} \cdot \frac{\mu-1}{6 \cdot x^{\mu}} ;$$

$$T(\mathfrak{A})_1^{(\mu-1)} = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{1}{x^{\mu}} ;$$

et par conséquent, pour la valeur finale $x = a$, en tenant compte des valeurs (695), on aura . . . (712)'

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A})^{(2)} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{a^{\mu+1}} \cdot \left\{ \frac{\mu}{6} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\mu-1}{6} \right) \right\} ;$$

c'est-à-dire . . . (713)

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A})^{(2)} = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{\mu-5}{12 \cdot a^{\mu+1}} .$$

Enfin, pour ce qui concerne la troisième partie constituante $\mathfrak{A}(\mathfrak{A})^{(3)}$ de la

loi générale (670), son expression (669) la donnera de nouveau immédiatement en y faisant $\omega = 2$.

Ainsi, en réunissant ces trois parties constituant (710), (713), et (669), d'après la loi (670), et en y donnant de nouveau à la quantité arbitraire n la valeur $n = a$, par la raison que nous avons déjà alléguée, nous aurons définitivement, en vertu de cette loi (670), pour les coefficients de la série complémentaire (639), qui forme ici, dans la génération complète (709), notre présente série en question S(3), l'expression générale . . . (714)

$$\begin{aligned} \Xi_{\mu+p} = & (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{2^{\mu}}{1 \cdot 3} \cdot \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{\mu+2} + \frac{\mu+1}{1} \cdot \Xi_{\mu+p} \\ & - \frac{(\mu+1)^{\mu-1}}{1 \cdot 2!} \cdot \Xi_{\mu} + \frac{(\mu+1)^{\mu-1}}{1 \cdot 3!} \cdot \Xi_{\mu-1} \dots (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{(1+\mu)^{(\mu-1)-1}}{1 \cdot (\mu-1)!} \cdot \Xi_1 ; \end{aligned}$$

en faisant attention que les coefficients Ξ_1 et Ξ_2 , qui n'existent pas dans cette série, sont zéro. Et en évaluant cette formule pour les valeurs consécutives de $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = 3$, etc., on trouvera, pour ces coefficients, les quantités . . . (715)

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= 0, \quad \Xi_2 = 0, \quad \Xi_3 = +\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{5}, \quad \Xi_4 = 0, \\ \Xi_5 &= +\frac{16}{3} \cdot \frac{3}{7}, \quad \Xi_6 = 0, \quad \Xi_7 = +\frac{16}{3} \cdot \frac{6}{9}, \quad \Xi_8 = 0, \\ \Xi_9 &= +\frac{16}{3} \cdot \frac{10}{11}, \quad \Xi_{10} = 0, \quad \text{etc., etc.} ; \end{aligned}$$

en observant que la loi que suivent ces valeurs pour les coefficients à indices impairs $(2\lambda+1)$, est . . . (715')

$$\Xi_{2\lambda+1} = +\frac{16}{3} \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2\lambda+1)} .$$

On aura donc, pour la génération complète (709) de la fonction proposée (685), en réunissant au second degré (708') de sa génération théorique, sa présente (714) génération technique complémentaire, l'expression . . . (716)

$$\begin{aligned} Fx = & Fa + \frac{(x+a)(x-a)}{12 \cdot x^2 \cdot a} \cdot \left\{ 8xa - (x^2 + a^2) \right\} + \\ & + \frac{16}{3} \cdot \left\{ \frac{1}{5} \cdot \frac{(x-a)^5}{(x+a)} + \frac{3}{7} \cdot \frac{(x-a)^7}{(x+a)} + \frac{6}{9} \cdot \frac{(x-a)^9}{(x+a)} + \frac{10}{11} \cdot \frac{(x-a)^{11}}{(x+a)} + \text{etc.} \right\} . \end{aligned}$$

Nous ne nous arrêterons pas non plus à signaler ici l'utilité supérieure de cette formule pour le calcul des logarithmes, utilité dont nous parlerons à l'instant. — Procédons d'abord au troisième degré de la génération théorique de cette même fonction proposée (685).

Or, pour $\omega = 3$, c'est-à-dire, pour le troisième degré de cette génération,

pour lequel nous avons déterminé, sous la marque (694), les trois éléments théoriques $R(3)_1$, $R(3)_2$, $R(3)_3$, savoir . . . (717)

$$R(3)_1 = 12x, \quad R(3)_2 = 3n.x^2, \quad R(3)_3 = 20.x^3;$$

si l'on introduit ces éléments dans la loi (636), c'est-à-dire, dans les trois premières des expressions (635), on obtiendra, pour la somme (637), par laquelle s'opère la génération théorique en question, les trois parties constituantes . . . (717)

$$P(1)_3 = 1 - (x-a)^3 \cdot \frac{1}{20.x^3},$$

$$P(2)_3 = 1 - (x-a)^2 \cdot \frac{3}{5.x^2} + 2.(x-a)^3 \cdot \frac{1}{20.x^3},$$

$$P(3) = 1 - (x-a) \cdot \frac{3}{2x} + (x-a)^2 \cdot \frac{3}{5.x^2} - (x-a)^3 \cdot \frac{1}{20.x^3}.$$

Et cette somme (637), en y introduisant en outre les valeurs (695), donnera alors, pour le troisième degré de génération théorique, dont il est question, l'expression . . . (718)

$$\begin{aligned} \Sigma(3) = & \frac{1}{a} \cdot \left\{ 1 - (x-a)^3 \cdot \frac{1}{20.x^3} \right\} \cdot (x-a) \\ & - \frac{1}{2.a} \cdot \left\{ 1 - (x-a)^2 \cdot \frac{3}{5.x^2} + 2.(x-a)^3 \cdot \frac{1}{20.x^3} \right\} \cdot (x-a)^2 \\ & + \frac{1}{3.a} \cdot \left\{ 1 - (x-a) \cdot \frac{3}{2x} + (x-a)^2 \cdot \frac{3}{5.x^2} - (x-a)^3 \cdot \frac{1}{20.x^3} \right\} \cdot (x-a)^3; \end{aligned}$$

expression qui se réduit également à la forme très-simple . . . (718)

$$\Sigma(3) = \frac{(x+a)(x-a)}{60.x^3.a} \cdot \left\{ (x-a)^4 + 5xa \cdot [8xa - (x^2 + a^2)] \right\}.$$

Ainsi, la loi générale (638) donnera, à l'aide de cette génération théorique du troisième degré, pour notre fonction proposée (685), la génération complète . . . (719)

$$Fx = Fa + \frac{(x+a)(x-a)}{60.x^3.a} \cdot \left\{ (x-a)^4 + 5xa \cdot [8xa - (x^2 + a^2)] \right\} + S(4).$$

Et faisant ici abstraction de la série complémentaire $S(4)$, qu'il nous reste à déterminer, on verra que la présente génération théorique du troisième degré répond de nouveau, et à plus forte raison, aux susdites propriétés fondamentales (699) de la fonction dont il s'agit.

Procédons enfin à la détermination de la série complémentaire $S(4)$ qui, par sa génération technique, doit accomplir ce qui manque encore dans le présent troisième degré de la génération théorique de la fonction cherchée Fx . — Pour

cela, suivant toujours la loi générale (670) de nos séries complémentaires, nous aurons d'abord, pour la première partie constituante de cette loi, en vertu de la détermination (701) de cette première partie, en y faisant $\alpha=3$, la quantité . . . (720)

$$\frac{d^3 + \mu Fx}{i^{(3+\mu)|1} \cdot dx^{3+\mu}} = \lambda_{3+\mu} = \frac{(-1)^\mu}{(3+\mu) \cdot i^{3+\mu}}.$$

Et nous aurons ensuite, pour la seconde partie constituante $\lambda(\alpha)^{(n)}$ de la loi générale (670), lorsque $\alpha=3$, en vertu de son expression générale (668), la détermination . . . (721)

$$\lambda(3)^{(n)} = \lambda_1 \cdot T(3)_0^{(n-1)} + \lambda_2 \cdot \left\{ T(3)_1^{(n-1)} - 2 \cdot T(3)_0^{(n-2)} \right\} + \\ + \lambda_3 \cdot \left\{ T(3)_1^{(n-1)} - T(3)_2^{(n-2)} + T(3)_0^{(n-3)} \right\};$$

dans laquelle les quantités auxiliaires $T(3)_0^{(n-2)}$, $T(3)_1^{(n-2)}$, $T(3)_2^{(n-2)}$, en vertu de leur formation (667) et (667)', sont . . . (721')

$$T(3)_0^{(n-2)} = \frac{1}{i^{(n-2)|1}} \cdot d^{n-2} \left(\frac{1}{R(3)_3} \right) \cdot \frac{1}{dx^{n-2}},$$

$$T(3)_1^{(n-2)} = \frac{1}{i^{(n-2)|1}} \cdot d^{n-2} \left(\frac{R(3)_1}{R(3)_3} \right) \cdot \frac{1}{dx^{n-2}},$$

$$T(3)_2^{(n-2)} = \frac{1}{i^{(n-2)|1}} \cdot d^{n-2} \left(\frac{R(3)_2}{R(3)_3} \right) \cdot \frac{1}{dx^{n-2}};$$

quantités qui, en y introduisant les présentes valeurs (717) des trois éléments théoriques $R(3)_1$, $R(3)_2$, $R(3)_3$, deviendront . . . (722)

$$T(3)_0^{(n-2)} = \frac{1}{i^{(n-2)|1}} \cdot d^{n-2} \left(\frac{1}{20 \cdot x^3} \right) \cdot \frac{1}{dx^{n-2}},$$

$$T(3)_1^{(n-2)} = \frac{1}{i^{(n-2)|1}} \cdot d^{n-2} \left(\frac{3}{5 \cdot x^3} \right) \cdot \frac{1}{dx^{n-2}},$$

$$T(3)_2^{(n-2)} = \frac{1}{i^{(n-2)|1}} \cdot d^{n-2} \left(\frac{3}{2 \cdot x} \right) \cdot \frac{1}{dx^{n-2}}.$$

Mais on a généralement . . . (722')

$$d^h \left(\frac{1}{20 \cdot x^3} \right) = \frac{(-1)^h}{20} \cdot \frac{i^{(h+1)|1}}{i^{h|1}} \cdot \frac{dx^h}{x^{3+h}},$$

$$d^h \left(\frac{3}{5 \cdot x^3} \right) = (-1)^h \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{i^{(h+1)|1}}{i^{h|1}} \cdot \frac{dx^h}{x^{3+h}},$$

$$d^h \left(\frac{3}{2 \cdot x} \right) = (-1)^h \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{i^{h|1}}{i^{h|1}} \cdot \frac{dx^h}{x^{1+h}}.$$

pour un ordre quelconque k . On aura donc . . . (723)

$$T(3)_a^{(\mu-1)} = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{\mu^{11}}{11!} \cdot \frac{1}{x^{\mu+1}},$$

$$T(3)_a^{(\mu-2)} = (-1)^{\mu} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{(\mu-1)^{11}}{11!} \cdot \frac{1}{x^{\mu+2}},$$

$$T(3)_a^{(\mu-3)} = (-1)^{\mu+1} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{(\mu-2)^{11}}{11!} \cdot \frac{1}{x^{\mu+3}};$$

$$T(3)_a^{(\mu-4)} = (-1)^{\mu+2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\mu}{1} \cdot \frac{1}{x^{\mu+4}},$$

$$T(3)_a^{(\mu-5)} = (-1)^{\mu} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\mu-1}{1} \cdot \frac{1}{x^{\mu+5}};$$

$$T(3)_a^{(\mu-1)} = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{\mu}}.$$

Et par conséquent, en introduisant ces valeurs dans l'expression (721) et en y tenant compte des valeurs (695), on obtiendra, pour cette deuxième partie constituante $\mathfrak{A}(3)^{(a)}$ de la loi (670), la quantité . . . (723')

$$\mathfrak{A}(3)^{(a)} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{120 \cdot a^{\mu+1}} \cdot \left\{ (\mu^3 + 3\mu + 2) - 12 \cdot (\mu + 2) + 60 \right\};$$

c'est-à-dire . . . (723'')

$$\mathfrak{A}(3)^{(a)} = (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{\mu^3 - 9\mu + 38}{120 \cdot a^{\mu+1}}.$$

Quant à la troisième partie constituante $\mathfrak{B}(3)^{(a)}$ de la loi générale (670), son expression générale (669) la donnera encore immédiatement, en y faisant $\varpi = 3$.

Ainsi, en réunissant les présentes trois parties constituantes (720), (723)'', et (669), d'après la loi (670), et en y donnant toujours à la quantité arbitraire a la valeur $a = a$, nous aurons définitivement, en vertu de cette loi (670), pour les coefficients de la série complémentaire (639), qui forme ici, dans la génération complète (719), notre présente série en question S(4), l'expression générale . . . (724)

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_{\mu+\mu} &= (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{2^{\mu}}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{\mu+3} + \frac{\mu+2}{1} \cdot \mathfrak{Z}_{\mu+\mu} - \frac{(\mu+2)^{11-1}}{1^{11}} \cdot \mathfrak{Z}_{\mu+\mu} \\ &+ \frac{(\mu+2)^{11-2}}{1^{11}} \cdot \mathfrak{Z}_{\mu} - \frac{(\mu+2)^{11-3}}{1^{11}} \cdot \mathfrak{Z}_{\mu-1} \cdot \cdot \cdot \cdot (-1)^{\mu} \cdot \frac{(\mu+2)^{11-(\mu-1)-1}}{1^{11-(\mu-1)-1}} \cdot \mathfrak{Z}_4; \end{aligned}$$

en ne perdant pas de vue que les coefficients Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 , qui n'existent pas dans cette série, sont zéro par eux-mêmes. Et en évaluant cette formule pour les valeurs consécutives de $\mu=1, \mu=2, \mu=3$, etc., on trouvera, pour ces coefficients, les quantités . . . (725)

$$\begin{aligned}\Xi_4 &= 0, \quad \Xi_5 = 0, \quad \Xi_6 = 0, \quad \Xi_7 = -\frac{32}{5} \cdot \frac{1}{7}, \quad \Xi_8 = 0, \\ \Xi_9 &= -\frac{32}{5} \cdot \frac{4}{9}, \quad \Xi_{10} = 0, \quad \Xi_{11} = -\frac{32}{5} \cdot \frac{10}{11}, \quad \Xi_{12} = 0, \\ \Xi_{13} &= -\frac{32}{5} \cdot \frac{20}{13}, \quad \Xi_{14} = 0, \quad \text{etc., etc.};\end{aligned}$$

en observant que la loi que suivent ces valeurs pour les coefficients à indices impairs ($2\lambda+1$), est . . . (725')

$$\Xi_{2\lambda+1} = -\frac{32}{5} \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2\lambda+1)}.$$

On aura donc, pour la génération complète (719) de la fonction proposée (685), en réunissant au troisième degré (718') de sa génération théorique, sa présente (725) génération technique complémentaire, l'expression . . . (726)

$$\begin{aligned}Fx &= Fa + \frac{(x+a)(x-a)}{60 \cdot x \cdot a} \cdot \left\{ (x-a)^4 + 5xa \cdot [8xa - (x^2 + a^2)] \right\} \\ &\quad - \frac{32}{5} \cdot \left\{ \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^7 + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^9 + \frac{10}{11} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^{11} + \frac{20}{13} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^{13} + \text{etc.} \right\}.\end{aligned}$$

On conçoit facilement qu'en procédant toujours, dans cette application de notre méthode primordiale ou universelle (638) à la génération théorique de la fonction proposée (685), de la manière que nous venons de le faire pour arriver aux trois premiers degrés consécutifs (706), (716), (726), de cette génération, on parviendra, avec plus de travail sans doute, mais sans difficulté et par des moyens éminemment praticables et en quelque sorte mécaniques, aux degrés ultérieurs de cette progressive génération théorique de la même fonction (685), aussi loin qu'on pourra en avoir besoin. Et l'on conçoit en même temps que, par des procédés tout à fait identiques et également simples, on parviendra toujours, pour ainsi dire mécaniquement, à tel degré que l'on voudra de la génération théorique de toute fonction proposée par ses différentielles, quelque variable et compliquée que puisse être sa nature.

Quant au degré précis auquel, pour toute fonction cherchée, il faut ainsi étendre sa génération théorique, il est manifeste que ce degré dépend de deux conditions auxquelles cette détermination de la nature d'une fonction proposée doit satisfaire, savoir, d'abord, d'une condition indispensable, consistant en ce que la série complémentaire soit devenue convergente à ce degré de génération, comme elle le deviendra évidemment toujours par la nature même de cette génération théorique des fonctions, dont le but est précisément de réduire ainsi

de plus en plus près de zéro cette série complémentaire, et ensuite la condition arbitraire, consistant en ce que cet évanouissement progressif de la série complémentaire soit tel qu'on peut le désirer. En effet, il ne faut pas perdre de vue que l'objet principal de notre méthode suprême (142), (143), etc., que nous venons de réaliser, par anticipation technique, dans notre présente méthode primordiale ou universelle (638), consiste à réduire progressivement, le plus près de zéro, la série complémentaire, c'est-à-dire, la génération technique par laquelle, dans cette progressive génération absolue des fonctions, s'accomplit ce qui y manque encore, à chaque degré, dans la génération théorique elle-même de la nature de ces fonctions, comme on le voit clairement par les conditions consécutives (143)', (144)', (145)', etc., qui opèrent cet évanouissement progressif de la série complémentaire (143)', (144)' (145)', etc.; conditions dont la réalisation, dans notre présente méthode primordiale (637) et (638), nous a précisément fait découvrir les équations (605) par lesquelles nous parvenons à déterminer les éléments théoriques $R(\mathfrak{G})$, $R(\mathfrak{G})_1$, $R(\mathfrak{G})_2$, etc., de toute fonction, qui, en servant ainsi à opérer la génération théorique de la nature elle-même de cette fonction, excluent par là même et nécessairement sa superflue génération technique. Aussi, dans l'exemple précédent (685), sommes-nous parvenus réellement à ce grand résultat, à celui de faire, de cette manière, évanouir progressivement la série complémentaire. En effet, par les déterminations progressives (704), (714), (724) de l'expression générale des coefficients de cette série complémentaire, on découvre facilement que la loi de ces expressions générales, pour un degré quelconque $\mathfrak{G}$ auquel on étend la génération théorique, est . . . (727)

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}+\mathfrak{P}} = (-1)^{\mathfrak{P}-1} \cdot \frac{2^{\mathfrak{P}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mathfrak{P}} \cdot \frac{(\mu-1)^{\mathfrak{P}-1}}{\mu+\mathfrak{G}} + \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})^{(\mathfrak{P})};$$

la quantité médiate $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})^{(\mathfrak{P})}$ étant toujours donnée par l'expression générale (669) et dépendant ainsi des premiers coefficients $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}+1}$, $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}+2}$, $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}+3}$, etc. Or, dans cette loi, la factorielle . . . (727)

$$(\mu-1)^{\mathfrak{P}-1} = (\mu-1)(\mu-2)(\mu-3) \cdots (\mu-\mathfrak{G}),$$

indique manifestement que tous les premiers coefficients $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}+1}$, $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}+2}$, $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}+3}$, etc., jusqu'à $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}+\mathfrak{G}}$ de la série complémentaire, deviennent zéro et disparaissent ainsi dans cette série. Et l'on voit que le nombre de ces termes qui s'évanouissent ici dans la série complémentaire, est toujours égal au degré $\mathfrak{G}$ auquel on étend la génération théorique (637) de la fonction proposée; de sorte que, lorsque ce degré deviendrait indéfiniment grand, la série complémentaire s'évanouirait entièrement. Il faut encore remarquer que les termes qui disparaissent ainsi progressivement dans la série complémentaire, sont précisément ceux qui auraient le plus d'influence, comme étant les plus grands, à cause qu'ils impliquent les plus petites puissances de la fonction

génératrice (641), savoir, de la fonction . . . (727)''

$$p_x = \frac{x - a}{x + a},$$

qui, par suite du nombre arbitraire a , peut, pour toute valeur de la variable x , former un nombre plus petit que l'unité.

C'est ici le lieu, en remarquant cette disparition progressive des premiers termes de la série complémentaire, de signaler l'utilité des résultats (706), (716), (726), que nous avons obtenus dans le précédent exemple (685), surtout si l'on étendait, au delà du troisième degré, cette progressive génération théorique de la fonction proposée, qui, comme nous le savons, est la fonction logarithmique. On conçoit, en effet, qu'en portant cette génération théorique du logarithme seulement jusqu'au sixième degré, ce qui, par les procédés que nous venons de suivre, est très-facile à faire, le premier terme qui ne disparaîtra pas dans la série complémentaire, impliquera la 13^e puissance de la fonction génératrice (727)''; et si l'on adopte alors, pour le système logarithmique, celui qui répond au système binaire des nombres, pour lequel la fonction Fa sera donnée par les exposants des puissances entières de la base 2, la fonction génératrice (727)'' ne pourra jamais former un nombre plus grand que 1, de sorte que la plus grande valeur possible du premier terme de la série complémentaire serait . . . (728)

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{13} = 0,000\ 000\ 000\ 819\ 2.$$

On pourrait donc alors, en se bornant à sept décimales dans le calcul des logarithmes, négliger toute la série complémentaire, et se servir uniquement de la fonction rationnelle (637) qui, pour le degré $\mathfrak{C}=6$, formerait la génération théorique de cette fonction logarithmique. Et considérant que cette fonction rationnelle (637), qui n'exigerait ainsi aucune extraction de racines et qui n'impliquerait que les puissances du nombre 2, pourrait, pour tout nombre x , être évaluée très-facilement, surtout en se préparant des tarifs ou des tables auxiliaires, on conçoit que le travail de Briggs, pour calculer nos logarithmes tabulaires, travail qui a déjà coûté de nombreuses années, pourrait être accompli, par un seul homme, dans la durée de six mois, et très-commodément dans la durée d'un an; car, pour ce qui concerne la conversion de ce système binaire de logarithmes, en notre système décimal, par le module 0,301 029 955 663 98, ce travail accessoire, en préparant ce module pour ses multiples de 1 à 100, ne mériterait pas d'être compté. — Mais, quelque grande que soit ainsi l'utilité de la présente génération théorique de la fonction logarithmique (685), même dans tous les autres calculs concernant les logarithmes, nous ne faisons que la mentionner accessoirement, pour servir d'exemple à toutes nos progressives générations théoriques des fonctions. Ce qui nous intéresse ici principalement, c'est cette génération théorique elle-même de toutes les fonctions problématiques, comme accomplissement actuel de la science.

Eh résumant ici la méthode primordiale et universelle que, par une anticipation technique sur notre méthode suprême (142), (143), etc., nous venons de découvrir et de développer dans tous ses éléments, nous aurons, pour le schéma ou pour la règle des procédés de cette méthode, d'après les expressions (637), (638), (639), et (670), la loi universelle . . . (729)

$$Fx = Fa + \Sigma(\mathfrak{G}) + S(\mathfrak{G} + 1);$$

dans laquelle la génération théorique et fondamentale $\Sigma(\mathfrak{G})$, d'après (637), est . . . (729)

$$\Sigma(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}_1.P(1)_w.(x-a) + \mathfrak{A}_2.P(2)_w.(x-a)^2 + \mathfrak{A}_3.P(3)_w.(x-a)^3 + \mathfrak{A}_4.P(4)_w.(x-a)^4 + \dots + \mathfrak{A}_w.P(\mathfrak{G})_w.(x-a)^w;$$

les parties constitutives $P(1)_w$, $P(2)_w$, $P(3)_w$, etc., avec leurs coefficients $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, etc., étant donnés par les expressions (635), (636), (581); et dans laquelle la loi universelle (729) la génération technique et cosupplémentaire $S(\mathfrak{G} + 1)$, d'après (639), est . . . (729)

$$S(\mathfrak{G} + 1) = \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^{w+1} \cdot \left\{ \mathfrak{E}_{w+1} + \mathfrak{E}_{w+1} \cdot \left(\frac{x-a}{n+x}\right) + \mathfrak{E}_{w+1} \cdot \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^2 + \mathfrak{E}_{w+1} \cdot \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3 + \text{etc., etc.} \right\};$$

les coefficients $\mathfrak{E}$ de cette série étant, d'après (670), déterminés par l'expression générale . . . (729)

$$\mathfrak{E}_{w+\mu} = (n+a)^{w+\mu} \cdot \left\{ \frac{d^{w+\mu} Fx}{1(w+\mu)! \cdot dx^{w+\mu}} + \mathfrak{N}(\mathfrak{G})^{(n)} \right\} + \mathfrak{E}(\mathfrak{G})^{(n)},$$

où les parties constitutives $\mathfrak{N}(\mathfrak{G})^{(n)}$ et $\mathfrak{E}(\mathfrak{G})^{(n)}$ sont données par les formules (668) et (669). — Telle est donc cette loi universelle que, depuis trente ans, nous avons promis aux géomètres de donner comme dernier fruit de notre philosophie absolue, et qu'enfin nous leur donnons aujourd'hui pour ouvrir la nouvelle période historique des mathématiques, et, ce qui est plus, pour accomplir définitivement cette grande science. — En effet, comme on le conçoit facilement, pour peu que l'on ait approfondi la science, tous les problèmes des mathématiques, à l'exception seulement de ceux de la Théorie des Nombres, qui dépendent de notre loi téléologique, pourront dorénavant, à l'aide de cette loi ou méthode universelle, être résolus directement, parce que, dans tous ces problèmes, les différentielles des fonctions cherchées, qui sont les seuls éléments de cette méthode, sont toujours données, soit immédiatement, par elles-mêmes, soit médiatement par des équations, dont on peut les déduire dans tous les cas. Et quelque manifeste que soit cette vérité, nous allons la constater facilement par le fait, en montrant ici que, dans tous les cas, en exceptant seulement les susdits problèmes singuliers de la Théorie des Nombres, que nous avons résolus, à leur tour, déjà dans le présent ouvrage, par

l'application de la loi téléologique de la finalité dans les nombres, tous les grands et importants problèmes des mathématiques, sans la moindre exception, pourront être résolus directement par l'application de la présente méthode universelle, ou bien par l'application immédiate de la méthode suprême elle-même, de laquelle, par anticipation technique, nous venons de déduire cette présente méthode primordiale.

D'abord, lorsque les différentielles des fonctions cherchées sont données immédiatement, comme elles le sont précisément dans nos lois dynamiques de la Mécanique céleste, telles que nous avons produit ces lois dans les *Protégomènes du Messianisme*, l'application de la présente méthode universelle (729) à la détermination de ces fonctions, c'est-à-dire, à l'intégration de ces différentielles données, s'opère immédiatement par elle-même, comme nous venons de l'appliquer à la détermination de la fonction logarithmique, donnée par sa différentielle (685). — Mais, il ne faut pas perdre de vue qu'il ne s'agit pas ici du petit nombre d'intégrales finies que l'on peut retrouver pour les différentielles provenant directement et uniquement de ces intégrales, et que l'on ne peut ainsi retrouver que parce que précisément on sait d'avance que les différentielles proposées, soit sous la forme donnée, soit par quelque transformation, proviennent de ces intégrales cherchées. C'est, en effet, à ce simple retour aux fonctions dont on connaît d'avance les différentielles, que se réduisent tous les procédés d'intégration finie; et ces intégrales finies, comme nous venons de le dire, sont ainsi nécessairement en très-petit nombre. Il faut donc, en ne perdant pas de vue qu'il ne s'agit pas ici de retrouver de telles intégrales connues, concevoir et bien reconnaître la question présente comme ayant pour objet de déterminer, par leur progressive génération théorique, la nature des fonctions qui sont les intégrales des fonctions quelconques proposées, en considérant ces dernières comme différentielles et en observant que, presque généralement, ces fonctions, comme différentielles, ne proviennent d'aucune fonction finie, connue ou même existante. Et pour l'intelligence de cette grande question, il faut ici bien méditer ce que, dans le Programme pour l'Accomplissement de la Réforme des Mathématiques, constituant la première partie du présent ouvrage, nous avons dit concernant l'origine philosophique des fonctions algorithmiques, élémentaires et systématiques, c'est-à-dire, concernant les principes premiers de leur existence, et surtout ce que nous avons dit, dans ce Programme, et ce que nous disons dans l'Introduction à la Résolution téléologique des équations (dans le troisième des ouvrages présents), concernant la progressive génération indéfinie de toutes les fonctions problématiques, d'après le mode absolu de cette génération, tel qu'il est fixé par la loi suprême des mathématiques. — Toutefois, comme absolu, ce mode de génération des fonctions par leurs différentielles, c'est-à-dire, par des fonctions données et considérées comme étant

les différentielles de ces fonctions problématiques, doit nécessairement embrasser tous les modes concevables d'une telle intégration des fonctions, même le susdit mode d'intégration finie, où l'on ne fait que retrouver les intégrales connues des différentielles proposées. Ainsi, pour toutes les fonctions dont les différentielles d'un ordre quelconque deviennent zéro, on pourra, par la présente méthode universelle, découvrir ces fonctions par leurs différentielles. En effet, si la différentielle de l'ordre $(\omega+1)$ d'une fonction quelconque Fx est zéro, le terme qui, dans la première des équations (605), a le facteur $F^{(\omega+1)}x$, c'est-à-dire, le terme $F^{(\omega+1)}x.R(\omega)_\omega$ aura ce facteur égal à zéro, et l'élément correspondant $R(\omega)_\omega$ devra être considéré comme infini pour que ce terme puisse former une quantité finie, à l'égal des autres termes de cette première des équations (605), dans lesquels termes les éléments correspondants $R(\omega)_{\omega-1}$, $R(\omega)_{\omega-2}$, . . . $R(\omega)_1$, seront conséquemment des quantités finies mais indéterminées. Et alors, en vertu de leurs lois (635) et (636), les parties constituantes $P(1)_\omega$, $P(2)_\omega$, $P(3)_\omega$, . . . $P(\omega)_\omega$ de la génération théorique (729) d'une telle fonction seront toutes égales à l'unité, et les parties constituantes $F^{(\omega+1)}a$ et $\mathfrak{A}(\omega)^{(a)}$ des coefficients (729) dans sa génération technique complémentaire (729)'' seront zéro, la première $F^{(\omega+1)}a$ par elle-même et la seconde $\mathfrak{A}(\omega)^{(a)}$ en vertu de ses éléments (667) et (667)'; de sorte que la génération absolue (729) de cette fonction se réduira alors à la forme finie . . . (730)

$Fx = Fa + \mathfrak{A}_1.(x-a) + \mathfrak{A}_2.(x-a)^2 + \mathfrak{A}_3.(x-a)^3 . . . \mathfrak{A}_\omega.(x-a)^\omega$, qui, à l'aide d'une quantité constante Fa , fera découvrir, dans toute sa généralité, la fonction en question Fx . Par exemple, si la différentielle d'une telle fonction était . . . (731)

$$dFx = \{ p + q(x-r)^2 \} . dx ;$$

p , q , r étant trois quantités constantes, on aurait, pour les équations (605), qui doivent déterminer les éléments théoriques $R(\omega)_1$, $R(\omega)_2$, etc., les différentielles consécutives . . . (731')

$$d^2Fx = 2q(x-r).dx^2, \quad d^3Fx = 2q.dx^3,$$

$$d^4Fx = 0, \quad d^5Fx = 0, \quad \text{etc.} = 0.$$

Ainsi, pour $\omega=3$, c'est-à-dire, pour le troisième ordre de la génération théorique de la fonction cherchée Fx , la première des équations (605) sera . . . (732)

$$0 = 0.R(3)_3 + \frac{q}{2}.R(3)_2 + q(x-r).R(3)_1 + \left[p + q(x-r)^2 \right] ;$$

et elle donnera . . . (732')

$R(3)_3 = \text{infini}$; et par conséquent, $R(3)_2 = \frac{0}{0}$, et $R(3)_1 = \frac{0}{0}$.

Donc, en vertu de la loi (635) et (636), nous aurons ici, pour les parties

constituantes P de la génération théorique (729)', les valeurs . . . (732)''

$$P(1)_1 = 1, \quad P(2)_1 = 1, \quad \text{et} \quad P(3)_1 = 1.$$

Et en vertu des valeurs (731)' et des éléments (667) et (667)', nous aurons, pour les parties constituantes $F^{(w+\mu)}_a$ et $X^{(\mu)}_a$ des coefficients de la série complémentaire (729)'', les valeurs . . . (732)'''

$$F^{(3+\mu)}_a = 0, \quad \text{et} \quad X^{(\mu)}_a = 0;$$

de sorte que cette série complémentaire disparaît ici entièrement. Ainsi, en observant qu'en vertu de la notation (581), nous avons ici, pour les coefficients λ_1 , λ_2 , et λ_3 de la génération théorique, les valeurs . . . (733)

$$\lambda_1 = [p + q \cdot (a-r)^2], \quad \lambda_2 = q \cdot (a-r), \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{1}{3} \cdot q;$$

nous aurons définitivement, en vertu de la loi universelle (729) et de son expression accessoire (729)', pour la fonction cherchée Fx , la génération finie . . . (733)'

$$Fx = Fa + p \cdot (x-a) + \frac{1}{3} \cdot q \cdot (x-a) \cdot \left\{ 3(a-r)^2 + 3(a-r)(x-a) + (x-a)^2 \right\};$$

c'est-à-dire, en formant la constante arbitraire . . . (734)

$$C = Fa - pa - \frac{1}{3} \cdot q \cdot (a-r)^3,$$

nous aurons . . . (734)'

$$Fx = C + px + \frac{1}{3} \cdot q \cdot (x-r)^3.$$

Et c'est là l'intégrale de la différentielle proposée (731).

Il en serait évidemment de même pour toute fonction dont la différentielle d'un ordre quelconque deviendrait zéro. — Et c'est là manifestement le principe de toutes les intégrations finies des fonctions qui ne sont pas transcendentes et qui, soit directement par elles-mêmes, soit indirectement par des transformations quelconques des variables, sont telles que leurs différentielles d'un ordre quelconque deviennent zéro. En effet, toute fonction différentielle non transcendante, pour qu'elle puisse être intégrée d'une manière finie, doit toujours, d'après notre présente loi absolue (729), appartenir, soit directement par elle-même, soit indirectement par la transformation des variables, à la forme générale . . . (735)

$$dFx = A + B \cdot x + C \cdot x^2 + D \cdot x^3 \dots + M \cdot x^m,$$

dans laquelle m est un nombre entier; car, ce n'est qu'alors que les différentielles des ordres supérieurs à m deviennent zéro et que la loi (729) arrête, à ce terme m , la génération absolue de cette fonction. Aussi, toutes les fonctions différentielles non transcendentes qui n'ont pas la forme (735) et qui, par aucune transformation des variables, ne peuvent être amenées à cette forme

finie, telle que l'est la fonction de l'exemple (685), toutes ces fonctions différentielles, disons-nous, ne sauraient méthodiquement recevoir une intégration finie; car, la génération absolue de ces fonctions, d'après la loi universelle (729), ne pourrait alors s'arrêter à aucun terme fini. Quant aux fonctions différentielles transcendentes, qui, par aucune transformation des variables, ne sauraient jamais être amenées à la forme (735), leur intégration finie, lorsqu'elle peut avoir lieu, n'est manifestement rien autre qu'un simple retour aux fonctions connues dont on sait d'avance que proviennent ces différentielles transcendentes. Il ne saurait en effet exister, pour ces fonctions transcendentes, aucun véritable procédé d'une telle intégration finie, puisque, moins encore que pour les fonctions différentielles non transcendentes, la loi (729) de leur génération absolue ne pourrait s'arrêter à aucun terme ou degré de cette génération. Bien plus, une telle intégration finie des fonctions différentielles transcendentes, qui, comme nous venons de le remarquer, n'est qu'un simple retour aux fonctions connues dont dérivent ces différentielles, n'est même qu'une transposition du problème, et non une véritable génération de la fonction cherchée ou de l'intégrale en question. En effet, par une telle intégration finie des fonctions différentielles transcendentes, on ne fait que retrouver d'autres fonctions transcendentes; et, comme il faut le savoir, toutes les fonctions transcendentes en général ne sont que des problèmes, dont la science ne possède encore la solution que par une génération technique à l'aide de séries ou d'autres algorithmes techniques, et nullement par une véritable génération théorique elle-même; de sorte que le problème primitif de découvrir une fonction qui soit l'intégrale d'une fonction différentielle transcendente, n'est alors qu'échangé contre le problème de découvrir la génération théorique de la fonction transcendente que l'on a ainsi retrouvée comme étant l'intégrale de la différentielle proposée. Mais, pour la parfaite intelligence de ces hautes considérations scientifiques, il faut d'abord bien comprendre ce que c'est que les *FONCTIONS TRANSCENDENTES*, c'est-à-dire, quelle en est la véritable essence ou le principe qui les distingue des autres fonctions; de celles que, par suite de cette opposition, nous nommons *FONCTIONS IMMANENTES*.

Or, sans entrer ici dans de hautes déductions philosophiques, nous nous bornerons à faire remarquer que celles des fonctions algorithmiques qui, dans leur nature ou dans leur construction, impliquent manifestement des éléments que la raison seule peut concevoir, et qui, en eux-mêmes, comme éléments de cette construction, ne peuvent être réalisés dans l'expérience, sont des *fonctions transcendentes*, tandis que les fonctions algorithmiques qui, dans leur nature ou dans leur construction, n'impliquent que des éléments tels que, comme éléments ostensibles de cette construction, ils peuvent eux-mêmes être réalisés dans l'expérience, sont des *fonctions immanentes*. Ainsi, l'idée de l'INFINI ne peut, dans sa pureté, être conçue que par la raison, qui en est

le créateur. Lorsque, par l'intervention de la faculté du jugement, cette idée se manifeste dans l'expérience, elle y est entravée par les conditions du temps et se transforme alors en idée de l'INFINI, comme nous l'avons montré fort en détail dans notre *Philosophie de l'Infini* (déjà en 1814). De même, l'idée des QUANTITÉS IDEALES, que par une bécue psychologique, aussi étrange que manifeste, les académiciens de Paris nomment encore *quantités imaginaires*, ne peut également être conçue que par la raison, qui seule en est aussi le créateur, comme nous l'avons montré dans la *Philosophie des Mathématiques* (en 1811), en y faisant voir qu'elle dépend immédiatement de l'idée de l'infini. Ces quantités idéales ne peuvent même, d'aucune manière, par l'influence d'aucune de nos facultés cognitives, être réalisées dans l'expérience, quoiqu'elles puissent, dans ce domaine du temps, être employées comme le sont les quantités expérimentales et conjointement avec elles, et quoiqu'elles conduisent ainsi, dans ce domaine de l'expérience, à des résultats très-importants et éminemment vrais; ce qui atteste, tout à la fois, et leur validité idéale et l'erreur des géomètres qui croient que ces idées ne sont que des produits de l'imagination (*). — Or, les quantités ou les fonctions qui, dans leur nature ou dans leur construction, impliquent, comme éléments de cette construction, ces idées de pure raison, l'infini ou les quantités idéales, sont conséquemment des quantités ou des fonctions TRANSCENDANTES, parce que, dans ces éléments de leur construction, elles dépassent le domaine de l'expérience; et par opposition à ces quantités supérieures, les fonctions ou les quantités qui n'impliquent ostensiblement, dans leur construction, comme éléments de cette construction, que des idées soumises aux conditions du temps, et par conséquent réalisables dans l'expérience, telles que sont les idées des trois algorithmes primitifs, de la sommation (addition et soustraction), de la reproduction (multiplication et division), et de la graduation (puissances et racines), et les idées des deux algorithmes qui en dérivent immédiatement, de la numération et des facultés, toutes ces quantités ou fonctions, disons-nous, qui, dans toute leur construction, sont soumises aux conditions du temps, sont des quantités ou des fonctions IMMANENTES, parce qu'elles demeurent dans le domaine de l'expérience. A la vérité, et nous devons encore le faire savoir pour compléter cette haute classification philosophique de la science du géomètre, il existe, parmi les quantités ou fonctions immanentes, des fonctions qui, non dans leur

(*) Le philosophe et mathématicien Krause paraît avoir compris cette haute attribution que, dans notre *Philosophie des Mathématiques*, nous avons donnée à ces quantités idéales. Et il a en appréhiver l'usage nouveau que nous faisons de ces quantités, en lui employant dans cette haute attribution d'une pure idéalité rationnelle; usage qui nous a conduits, entre autres résultats, à la détermination définitive, par le simple algorithme des périmètres, du fameux et si longtemps problématique nombre qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre du cercle.

construction ostensible, formant leur détermination, mais dans leur réalisation expérimentale, formant leur génération, impliquent, non pas l'idée pure de l'infini, mais au moins l'idée temporelle de l'indéfini, telle que nous venons de la déduire plus haut. Ces fonctions spéciales, ce sont les puissances et les facultés à exposants fractionnaires, dans lesquelles ces exposants, comme éléments de la construction de ces quantités, sont évidemment des quantités finies et par conséquent immanentes, et seulement les éléments de la génération de ces quantités, c'est-à-dire, leurs FACTEURS ÉLÉMENTAIRES, tels que nous les avons dévoilés dans notre *Philosophie des Mathématiques*, impliquent la susdite idée temporelle de l'indéfini, laquelle, comme résultat de l'idée de l'infini, quoiqu'elle soit engendrée originairement par la raison hors de l'expérience, se manifeste ici sous les conditions du temps et, rentrant ainsi dans le domaine de l'expérience, se revêt alors du caractère des idées immanentes. Les géomètres nomment IRRATIONNELLES cette classe de fonctions immanentes, c'est-à-dire, les puissances et les facultés à exposants fractionnaires; et ils nomment RATIONNELLES toutes les autres fonctions immanentes, c'est-à-dire, toutes celles qui ne contiennent pas des radicaux ou des puissances à exposants fractionnaires, et qui par conséquent, d'après notre *Philosophie des Mathématiques*, n'impliquent même pas l'idée temporelle de l'indéfini. On voit maintenant, en découvrant dans la raison la source de l'idée de l'infini, que c'est précisément la dénomination erronée qui serait conforme à la vérité. Mais, pour ne pas introduire de la confusion dans ces noms, et pour laisser cette fausse dénomination comme un document de ce que, jusqu'à notre présente réforme, la science du géomètre était restée privée de véritables principes philosophiques, nous continuerons à nous en servir comme le font les géomètres. Et alors, le bon M. Arago, ce savant secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Paris, qui déclare ne pouvoir comprendre nos ouvrages mathématiques, ne nous accusera plus d'inventer ou de forger, comme il le dit, des mots nouveaux. En général, si cet astronome, ou physicien, ou opticien, ou météorologue, ou homme d'État, car nous ne savons pas au juste ce qu'il est réellement, prend la peine d'étudier l'ouvrage présent, nous espérons qu'il verra enfin, peut-être trop tard, que ce ne sont pas des mots que nous apportons à la science.

Revenons à nos susdites fonctions transcendentes qui, comme nous l'avons avancé, lorsqu'elles résultent de l'intégration d'autres fonctions, transcendentes et même immanentes, ne présentent pas déjà la génération théorique elle-même des intégrales cherchées, mais seulement le problème mieux déterminé de cette génération, et n'offrent ainsi qu'une transposition du premier problème, de celui qui est proposé immédiatement par les fonctions différentielles et dont l'objet est également de découvrir la génération théorique des fonctions qui sont les intégrales de ces fonctions différentielles. En effet, les fonctions transcendentes, quelles qu'elles aient, ne pouvant elles-mêmes être réalisées dans

l'expérience, parce que, comme nous venons de l'apprendre, les éléments de leur construction dépassent les conditions du temps, ne sont encore que des problèmes qui demandent leur réalisation sous les conditions du temps, c'est-à-dire, qui demandent la GÉNÉRATION INFINIE des quantités qu'elles désignent. Or, cette génération indéfinie et problématique peut avoir lieu de deux manières, savoir, d'abord, comme simple génération TECHNIQUE, par le moyen des séries ou de quelque autre algorithme technique (Voyez le Système architectonique de l'Algorithme dans l'ouvrage présent), lorsqu'il ne s'agit encore que de fixer la VALEUR numérique de ces quantités transcendentes, et ensuite, comme une véritable génération MATHÉMATIQUE, par le moyen de la loi suprême des mathématiques et par les méthodes qui sont immédiatement fondées sur cette loi suprême, telle que l'est notre présente méthode primordiale ou universelle (729), lorsqu'il s'agit finalement de découvrir la NATURE algorithmique elle-même de ces fonctions transcendentes dont il est question. — Jusqu'à présent, la science, en ce qui concerne les fonctions transcendentes, et généralement toutes les fonctions qui exigent une génération indéfinie, ne connaît encore que la première espèce de cette génération indéfinie, c'est-à-dire, la génération technique, par des séries ou par d'autres algorithmes techniques; et elle ne connaît ainsi que la valeur numérique de ces quantités supérieures, et nullement leur nature algorithmique elle-même. De là, c'est-à-dire de ces limites actuelles de la science, vient précisément, comme on le conçoit maintenant sans difficulté, son impuissance actuelle de résoudre, d'une manière satisfaisante, les grands problèmes qu'elle a mission de résoudre; car, comme cela est manifeste, cette simple évaluation numérique des quantités, qui d'ailleurs devient précise aussitôt que les séries ou les autres algorithmes techniques tombent dans des résultats divergents, comme cela arrive le plus souvent, cette simple évaluation, disons-nous, ne peut pénétrer dans la nature ou dans la construction algorithmique elle-même de ces quantités, et ne peut conséquemment découvrir leurs propriétés essentielles, ces propriétés dont la connaissance devient indispensable pour la solution des problèmes, lorsqu'ils impliquent de pareilles quantités, dont les propriétés sont essentiellement inhérentes à leur nature elle-même. — Or, c'est la susdite seconde espèce de la génération indéfinie des quantités, celle qui, par son défaut, a laissé la science dans son actuelle impuissance, c'est, disons-nous, la génération théorique de la nature elle-même des quantités que nous avons apportée à la science dans notre LOI SUPRÊME des mathématiques, et dans la MÉTHODE SUPRÊME (142), (143), etc., qui en résulte immédiatement, et que, pour en préparer l'usage par un moyen provisoire, nous réalisons aujourd'hui par notre présente MÉTHODE PRIMORDIALE et universelle (729), comme le reconnaîtront facilement tous les géomètres qui auront approfondi ces dérivées et finales méthodes de la science.

Pour éclaircir ce que nous venons de dire concernant généralement la pré-

sente génération théorique des fonctions, et pour compléter ce qui concerne spécialement cette même génération théorique des fonctions transcendentes, qui, lorsque leurs différentielles sont aussi des fonctions transcendentes, se reproduisent dans cette génération des intégrales, et doivent en être éliminées, nous allons ajouter quelques indications positives sur les modes de cette progressive génération théorique des fonctions transcendentes en général. — Or, d'après notre déduction philosophique des fonctions transcendentes, telle que, suivant le loi de création, nous l'avons produite d'abord dans notre *Philosophie des Mathématiques*, et reproduite récemment dans le susdit tableau génétique de l'Algorithmie, développé dans les *Prolegomènes du Messianisme*, et démontré dans l'ouvrage présent, il existe deux grandes classes fondamentales de fonctions transcendentes, formant, parmi les algorithmes théoriques élémentaires, les deux algorithmes transitifs, et constituant, l'une, la classe des fonctions logarithmiques de tous les ordres, et l'autre, la classe des fonctions périodiques, les sinus et les cosinus de tous les ordres. La première de ces classes a pour caractère distinctif l'idée de l'infini, comme élément ostensible de sa construction, ainsi qu'on le voit dans l'expression que Halley a découverte pour le premier ordre de ces fonctions logarithmiques, savoir, dans l'expression . . . (736)

$$Lx = \infty \cdot \left\{ x^{\frac{1}{\infty}} - 1 \right\} ;$$

et la seconde classe de ces fonctions transcendentes a pour caractère distinctif les quantités idéales (vulgairement dites imaginaires), comme étant, à leur tour, les éléments ostensibles de la construction de cette deuxième classe, ainsi qu'on le voit dans les expressions qu'Euler a découvertes pour le premier ordre de ces fonctions périodiques, pour les sinus et cosinus circulaires, savoir, dans les expressions . . . (737)

$$\sin x = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{-1}} \cdot \left\{ e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} \right\} ,$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \cdot \left\{ e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} \right\} ;$$

le nombre e étant la base des logarithmes naturels. — Comme telles, ces deux classes de fonctions transcendentes (736) et (737), ne sont évidemment que des problèmes, parce que l'infini ∞ , qui est l'élément ostensible dans la construction de la première (736) de ces classes, et la quantité idéale $\sqrt{-1}$, qui, à son tour, est l'élément ostensible dans la construction de la seconde (737) de ces classes, ne peuvent être ni réalisés, ni même conçus, sous les conditions du temps, dans le domaine de l'expérience. Il s'agit donc, pour résoudre ces problèmes, de réaliser, dans ce domaine de l'expérience, les quantités qui sont les objets respectifs de ces expressions (736) et (737), et cela par une génération indéfinie qui seule, d'après la déduction que nous avons donné

plus haut de l'idée de l'infini, peut réaliser ainsi, sous les conditions du temps, les idéalités qui forment les éléments dans ces expressions; car, comme nous l'avons déjà dit, la quantité idéale $\sqrt{-1}$ est aussi fondée immédiatement sur l'idée de l'infini. Et c'est effectivement par une telle génération indéfinie, et nommément d'abord par la susdite première espèce de cette génération, c'est-à-dire, par la génération technique, au moyen des séries, que la science est parvenue à réaliser ces quantités transcendentes, en fixant ainsi, pour toute variable x , leurs valeurs numériques, mais sans pouvoir encore déterminer, dans le domaine de l'expérience, la nature elle-même ou la construction algorithmique de ces fonctions transcendentes. C'est donc par la susdite deuxième espèce de la génération indéfinie dont il est question, c'est-à-dire, par la génération théorique, au moyen de la loi suprême des mathématiques, qu'il s'agit maintenant d'accomplir la réalisation dans l'expérience de ces mêmes quantités transcendentes, en y découvrant ainsi, par une telle progressive génération théorique, la nature ou la construction algorithmique elle-même de ces fonctions transcendentes. Et c'est ce que la science pourra déjà faire maintenant par l'application de la méthode primordiale et universelle (729) que nous venons de lui dévoiler, et qui, comme nous l'avons vu plus haut, dans la déduction de cette méthode, dérive effectivement de la loi suprême des mathématiques, en formant une réalisation provisoire de la méthode suprême (142), (143), etc., qu'offre immédiatement cette grande et archi-absolue loi de la science.

Telle est, en effet, l'intégration définitive que nous avons donnée de la fonction (685), par la progressive génération théorique (706), (716), (726), etc., de l'intégrale dont cette fonction (685) est la différentielle, c'est-à-dire, par une telle génération théorique de la fonction transcendente (736) formant le logarithme; de sorte que ces progressives expressions théoriques (706), (716), (726), etc., donnent à la fois la solution des deux problèmes, de celui de l'intégration définitive de la différentielle (685), et de celui de la réalisation temporelle, dans l'expérience, de la fonction transcendente ou idéale (736). Et il faut ici remarquer que la présente intégration progressive de la différentielle (685) est, pour la première fois, la véritable intégration théorique de cette différentielle logarithmique; car, lors même que l'on attribuerait au logarithme sa susdite (736) expression transcendente de Halley, l'intégration finie . . . (738)

$$\int \left(\frac{dx}{x} \right) = Lx = \infty \cdot \left\{ x^{\frac{1}{\infty}} - 1 \right\},$$

ne ferait, comme nous l'avons déjà dit, que changer le problème, parce que cette expression transcendente, comme idéale, demande elle-même une réalisation temporelle dans l'expérience; réalisation qui, précisément parce qu'elle est temporelle, peut seule former la véritable intégration théorique de cette différentielle logarithmique. Sans doute, les expressions (736) et (737) de Halley et d'Euler sont de grandes découvertes, en tant qu'elles satisfont complètement la

raison sur la nature de ces quantités transcendentes (*); mais, elles n'en sont pas moins de simples expressions idéales, qui n'ont encore de la validité que dans les régions supérieures de la raison, hors des conditions du temps, et qui, par là même, comme simples problèmes, demandent leur réalisation, sous les conditions du temps, par une génération tout à la fois, et indéfinie dans son ensemble, et finie pour chaque degré de cette génération des quantités en question. Et c'est précisément cette génération, tout à la fois, et indéfinie et finie, qui constitue la PROGRESSIVE GÉNÉRATION THÉORIQUE que nous venons de dévoiler à la science dans notre présente méthode primordiale et universelle (729), telle qu'elle réalise provisoirement la méthode suprême elle-même (142, 143), etc., des mathématiques.

Pour compléter la présente question de l'intégration théorique et universelle des fonctions différentielles, il ne nous reste qu'à ajouter les quelques mots que nous avons annoncés plus haut, concernant les fonctions transcendentes qui, comme différentielles, se reproduisent dans la présente génération théorique des intégrales, et qu'il faut conséquemment en éliminer. — Nous le ferons brièvement, en faisant remarquer que, pour toute fonction différentielle proposée qui contiendrait déjà son intégrale, immédiatement ou médiatement par ses différentielles ultérieures, lorsque d'ailleurs il n'existerait aucune autre détermination de l'intégrale cherchée, par quelque équation, primitive ou différentielle, les degrés successifs de sa génération théorique, par notre méthode universelle (729), offriraient eux-mêmes autant d'équations progressives et propres à l'élimination de l'intégrale, et même de ses fonctions quelconques qui se trouveraient

(*) C'est ici une occasion d'admirer la profonde science mathématique des illustres académiciens de Paris. — En effet, dans sa géométrie, dans ce merveilleux produit de la philosophie du dix-huitième siècle, l'illustre académicien Legendre, en y reproduisant les présentes expressions (729) d'Euler, dit que ce sont des *expressions succinctes des valeurs des sinus et cosinus*. C'est donc là, dans le mot d'*expression succincte*, l'esprit sublime de la science que ces maîtres peuvent concevoir! Et remarquez que, dans le rapport que l'illustre Legendre, ce savant académicien, a fait, conjointement avec M. Arago, sur votre *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, il prétend, lui, et son collègue, l'illustre M. Arago, ou peut-être tous les deux, qu'ils précisément qui, sans doute par dépit, n'ont rien fait pour la science, connaissant seuls le secret de la science, et non pas les géomètres allemands, qui, comme Euler, leur fournissent les *maillots d'expressions succinctes*, et qui, comme Gauss, ont appelé à l'illustre Legendre les véritables principes de la *Théorie des Nombres*. C'est certainement par surprise pour de pareils services que l'illustre académicien Legendre, et son digne collègue, l'illustre M. Arago, ces profonde connaisseurs du secret de la science, ne trouvant pas de meilleure occasion, ont ainsi celle de notre *Réfutation de Lagrange* pour nous faire l'honneur de dénigrer, à notre sujet, les géomètres allemands, qui cependant étaient bien innocents de la *Réfutation de Lagrange*.

Remarquez surtout que le reproche que ces savants académiciens de Paris font ainsi aux géomètres allemands, c'est qu'ils occupent des *calculs* des fonctions, de ces développements qui, sans parler qu'ils contiennent l'absence de toutes les mathématiques modernes, forment précisément l'unique base de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, que ces maîtres ont si victorieusement défendue contre notre réfutation. — En vérité, c'est trop de science à la fois!

impliquées dans cette progressive génération théorique ou absolue de la fonction intégrale en question. En effet, si l'on désigne par x la fonction Fx , c'est-à-dire, l'intégrale cherchée, et par A , la constante Fa de cette intégration théorique, la loi universelle (729), en y faisant abstraction de la série complémentaire $S(\varpi+1)$, donnera, pour un degré quelconque ϖ de cette génération progressive, l'équation . . . (739)

$$z = A + \Sigma(\varpi) ;$$

la somme $\Sigma(\varpi)$, formant, pour ce degré ϖ , la génération théorique (729)'. Et si l'on poursuit cette génération progressive au degré suivant $(\varpi+1)$, on aura également l'équation . . . (739)'

$$z = A + \Sigma(\varpi+1) ;$$

de sorte qu'entre ces deux équations, qui, comme nous le supposons, impliquent la quantité z dans leurs sommes respectives $\Sigma(\varpi)$ et $\Sigma(\varpi+1)$, on pourra éliminer cette quantité z , de manière à ne la laisser subsister que dans une équation du premier degré . . . (740)

$$0 = M + N.z ,$$

qui servira à déterminer cette quantité z suffisamment pour que, dans les fonctions génératrices (640), qui forment la somme $\Sigma(\varpi+1)$, on puisse ensuite introduire convenablement, à sa place, la valeur que lui assigne cette équation résultante (740). — Sans doute, les deux équations (739) et (739)' ne sont pas encore vraies rigoureusement, quoiqu'elles approchent d'autant plus de la vérité que le degré ϖ de cette génération progressive est plus grand, au point que, lorsque ce degré ϖ serait indéfiniment grand, les deux équations (739) et (739)' en question seraient vraies rigoureusement. Mais, il faut observer que, par leur équation résultante (740), ces deux équations (739) et (739)' ne servent pas ici à déterminer définitivement l'intégrale cherchée z , mais seulement une quantité ou une fonction approchée qui, à la place de cette intégrale z , puisse être introduite convenablement dans les fonctions génératrices (640) par lesquelles se forme la somme théorique $\Sigma(\varpi+1)$; et cela afin que ces fonctions génératrices (640) approchent le plus près possible de l'intégrale cherchée z que donne ensuite cette somme théorique $\Sigma(\varpi+1)$ avec sa série complémentaire correspondante $S(\varpi+2)$, en vertu de la loi universelle (729), savoir, en vertu de la loi . . . (741)

$$z = A + \Sigma(\varpi+1) + S(\varpi+2) .$$

En effet, lorsqu'il n'existe, pour la détermination de cette intégrale z , rien autre que sa fonction différentielle, c'est-à-dire, lorsqu'il n'existe d'ailleurs, pour sa détermination, aucune équation, ni primitive ni différentielle, comme nous le supposons ici, on conçoit que les deux équations (739) et (739)' peuvent seules donner, par l'équation résultante (740), non-seulement une première détermination de cette intégrale z qui soit suffisante pour la remplacer dans la

somme théorique $\Sigma(\xi + 1)$, où nous supposons ici qu'elle se trouve impliquée, mais de plus la détermination la plus proche que l'on puisse obtenir à ce degré ξ de la génération progressive de la fonction z en question. D'ailleurs, ce qu'il y a ainsi d'inexact encore dans cette première détermination (740) de la fonction z , considérée ici seulement comme partie constituante de ses propres fonctions génératrices (640), et par conséquent ce qu'il y a ainsi d'inexact encore dans ces fonctions génératrices (640), et dans la somme $\Sigma(\xi + 1)$, formant la génération théorique (739)', se trouve ensuite rectifié entièrement par la série complémentaire $S(\xi + 2)$, formant la génération technique (739)"; de sorte qu'en définitive la génération totale (741) de l'intégrale cherchée z demeure toujours rigoureusement exacte.

Ainsi, l'intégration théorique et générale des fonctions, quelles qu'elles puissent être, immanentes ou transcendentes, se trouve enfin, par notre présente réalisation provisoire (739) de la méthode suprême, au pouvoir de la science, et doit maintenant, dans la nouvelle période historique que cette méthode ouvre aux mathématiques, remplacer cette précise intégration technique que l'on opère par le moyen des séries, et qui, depuis la découverte du calcul différentiel, c'est-à-dire, depuis l'établissement des mathématiques modernes, était, jusqu'à ce jour, le seul et tout à fait impuissant moyen des géomètres pour résoudre les grands problèmes de la science. Et pour se former une idée de l'énorme difficulté qu'il a fallu vaincre pour amener la science à ce haut accomplissement, nous nous bornerons à rappeler aux géomètres que leur chef moderne, Lagrange, reprochait à Condorcet et à Fontaine d'avoir cherché des méthodes directes d'intégration, et paraissait convaincu que c'est une véritable folie de penser à en découvrir (Voyez le *Supplément à l'Éloge de Lagrange*, dans le n° 57 du *Moniteur*, samedi, 26 février 1814).

Quoi qu'il en soit, pour donner un grand et décisif exemple de la haute et indispensable utilité des présentes méthodes absolues, nous signalerons, par anticipation, l'objet de l'ouvrage dont nous venons d'extraire ces méthodes, c'est-à-dire, notre Réforme de la Mécanique Céleste, qui, d'après le Programme précédent, sera l'objet du deuxième des ouvrages dont nous produisons ici le premier. — Or, la méthode primordiale (739) que nous venons de découvrir, conduit directement, et même très-facilement, à l'intégration théorique, aussi exacte qu'on le voudra, de toutes les fonctions différentielles qui, dans les lois dynamiques de la nouvelle mécanique céleste, telles qu'elles sont produites dans les *Prolégomènes du Messianisme*, en forment des éléments et doivent être intégrées pour accomplir la réforme mathématique de cette physique céleste. Bien plus, cette provisoire méthode suprême (739) sert manifestement à réaliser, de la manière la plus complète, l'accomplissement algorithmique de la mécanique céleste, tel que nous en avons posé le problème, déjà en 1815, dans la première section de notre Philosophie de la Technique algorithmique, et

tel que nous l'avons rappelé dans le Programme qui forme la première partie de l'ouvrage présent. En effet, la loi primordiale (729) de la génération théorique des fonctions, que nous venons de dévoiler comme réalisation provisoire de la méthode suprême (142), (143), etc., à l'occasion de laquelle nous avons fixé, dans l'ouvrage que nous citons, le problème et les conditions de cet accomplissement algorithmique de la mécanique céleste dont il est question, nous conduit réellement, pour tout mouvement céleste, d'abord, à la quantité constante Fa , qui doit proprement former ce que l'on nomme l'époque de ce mouvement, ensuite, à la somme théorique $\Sigma(\omega)$ qui, dans ses parties constituantes (729), comme fonctions génératrices (640) de ce même mouvement, présente en toute réalité ce que l'on nomme ses *équations périodiques*, enfin, à la série complémentaire $S(\omega + 1)$ qui, dans sa génération technique (729)', s'évanouit progressivement à volonté, et forme ainsi ce que l'on nomme *équation séculaire* du mouvement en question. Et, pour mieux préciser cet accomplissement algorithmique de la mécanique céleste, nous allons ici reproduire encore une fois le passage qui, à la fin de la première section de la Philosophie de la Technis (pages 285 et 286), caractérise cette perfection définitive, et jusqu'ici idéale, dans la physique céleste, passage que nous avons déjà reproduit dans le susdit Programme pour la présente suite d'ouvrages, mais que nous allons ici adapter à l'actuelle réalisation provisoire (729) de la méthode suprême, pour démontrer positivement cette décisive perfection mathématique à laquelle on peut maintenant porter la mécanique céleste. — Voici donc ce passage, tel que son objet se trouve effectivement réalisé aujourd'hui :

« On aura surtout l'avantage de pouvoir juger les véritables progrès de la mécanique céleste. Car, pour chaque mouvement faisant partie du système du monde, le tout consiste évidemment, d'après la présente méthode universelle (729), à réduire le plus possible la valeur absolue de la série complémentaire (729)'' qui forme l'équation séculaire de ce mouvement ; de sorte que, pour donner un véritable avancement à la science, il faudra, d'après les procédés de cette nouvelle ou plutôt unique génération théorique des fonctions, découvrir, pour les fonctions génératrices (640), une fonction ultérieure . . . (742)

$$\Omega_{m+1} = P(\omega + 1)_{m+1} \cdot (x - a)^{m+1}$$

à la suite des fonctions déjà connues $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_m$, qui forment la génération du mouvement dont il est question, et qui en sont les équations périodiques, et il faudra, par là même, modifier celles de ces fonctions génératrices qui sont déjà connues, de manière à ce que, par ce double perfectionnement, la série complémentaire (729)'' constituant l'équation séculaire, soit réduite à une valeur plus petite que celle qu'on aura déjà obtenue. On aura ainsi un critérium précis et infailible pour reconnaître une véritable découverte en mécanique céleste, et en même temps, pour estimer, à leur juste valeur, ce

tas de formules rhapsodiques que, sous le nom pompeux d'*équations astronomiques*, on ne cesse d'accumuler et d'ajuster pour compléter certains mouvements célestes, par exemple, celui de la Lune. »

Nous pouvons donc, dès aujourd'hui, considérer comme accomplie, sous le point de vue algorithmique, la réforme de la mécanique céleste, par la présente (729) réalisation provisoire de la méthode suprême (142), (143), etc., réalisation par le moyen de laquelle des hommes spéciaux, pour bien mériter de la science, ou sur la demande des Gouvernements, pourront maintenant, et avec facilité, intégrer les fonctions différentielles qui entrent, comme parties constitutives, dans les nouvelles et véritables lois dynamiques de la mécanique céleste, telles que nous les avons dévoilées dans les *Prologomènes du Messianisme*. Et nous pourrions ainsi terminer ce paragraphe, qui avait pour objet cet accomplissement algorithmique de la nouvelle mécanique céleste.

Mais, nous avons avancé plus haut que tous les problèmes des mathématiques, à l'exception seulement des problèmes singuliers de la Théorie des Nombres, qui dépendent de notre loi téléologique, et dont nous avons donné la solution au commencement de cet ouvrage, peuvent maintenant être résolus généralement, dans toute leur rigueur, par la présente réalisation provisoire (729) de la méthode suprême; et nous avons promis de le montrer par le fait même. — Or, nous venons de le montrer effectivement pour tous les problèmes où les fonctions différentielles des fonctions cherchées sont données immédiatement, lors même que ces différentielles impliqueraient déjà les intégrales cherchées. Il nous reste donc à le montrer également pour tous les problèmes où les fonctions différentielles, qui entrent ainsi comme éléments dans la présente méthode absolue (729), ne sont données que par des équations, soit immédiatement, par des équations différentielles, totales ou partielles, soit médiatement, par des équations primitives, immanentes ou transcendentes, dont on peut notoirement déduire toujours les différentielles des quantités inconnues. — Nous allons le faire.

D'abord, il est manifeste, par tout ce que nous avons déjà appris sur l'application de la présente méthode universelle (729), que, dans tous les cas où l'on peut déduire, des équations qu'il s'agit de résoudre, les différentielles des quantités inconnues, de manière à ce que les fonctions qui forment ces différentielles n'impliquent pas ces quantités inconnues, c'est-à-dire, leurs propres intégrales, on peut immédiatement appliquer la méthode (729) à la génération théorique des fonctions intégrales cherchées, tout comme nous l'avons fait pour l'intégration immédiate des fonctions différentielles données, que nous avons éclaircie par l'exemple (685). Et il est également manifeste que, lorsqu'il s'agit de la résolution des équations primitives, immanentes, et même transcendentes, où l'inconnue entre seule, c'est-à-dire, indépendamment de ses différentielles, comme dans les équations algébriques ordinaires, les différentielles des

inconnues, que l'on déduira de ces équations, quoiqu'elles puissent impliquer ces inconnues, pourront servir pour opérer, par notre méthode (729), la génération théorique de ces inconnues, parce qu'à l'aide des équations proposées, on pourra ensuite éliminer, de cette génération théorique des intégrales, ces mêmes intégrales qui y seront impliquées; et cela de la même manière que nous l'avons fait plus haut pour l'élimination de l'intégrale z par les équations (739), (739)' et (740), en observant qu'à la place de l'une des deux équations (739) et (739)', on aurait ici immédiatement l'équation proposée elle-même.

Il n'existe donc ici une question nouvelle que dans les cas, assez nombreux sans doute, où les équations proposées qu'il s'agit de résoudre, surtout les équations différentielles, sont telles que l'on ne peut ni l'on ni l'autre, ni en déduire les différentielles indépendamment des intégrales inconnues, ni éliminer de la génération théorique (729) de ces intégrales, par le moyen de telles équations proposées, ces mêmes intégrales ou leurs différentielles, totales ou partielles, qui pourraient être impliquées dans cette génération théorique. Et alors, sans avoir égard aux deux cas précédents qui, comme nous venons de le voir, rentrent dans la question antérieure de l'intégration immédiate des différentielles données, et qui sont assez rares, il se présente ici, pour la résolution générale des équations de tous les genres, par la présente méthode universelle (729), le problème spécial de découvrir les moyens pour pouvoir, dans tous les cas, éliminer de cette génération théorique (729) des intégrales cherchées, formant les inconnues dans les équations proposées, ces mêmes intégrales ou leurs différentielles qui, les unes ou les autres, ou les unes et les autres, peuvent être impliquées dans la génération théorique (729) par laquelle doit ainsi être opérée la résolution de ces équations. Il faut donc ici, avant tout, aborder la solution de ce problème spécial; solution qui, comme nous venons de le voir, est indispensable pour cet accomplissement de la science.

Pour procéder à cette solution, observons d'abord qu'elle doit être donnée en quelque sorte indépendamment de la loi universelle (729) ou de la génération théorique à laquelle préside cette loi, et à laquelle, indépendamment d'elle-même, la solution en question doit ici venir en aide. Et observons ensuite que, nonobstant cette indépendance, cette solution n'est pas impossible, puisque, comme nous l'avons vu à l'occasion de l'élimination de l'intégrale z entre les équations (739) et (739)', il ne s'agit pas proprement de déterminer ainsi cette intégrale théorique z elle-même, mais seulement une fonction suffisamment approchée pour que, sans altérer l'exactitude progressive de la génération théorique (729), elle puisse remplacer cette intégrale z dans les fonctions génératrices (640) ou (729)', en ne perdant pas de vue que la série complémentaire (729)'' redressera ensuite et toujours ce qu'il peut y avoir d'inexactitude dans la fonction approchée qu'il s'agit de découvrir.

Or, sous ce point de vue de simple approximation de la fonction intégrale

qu'il s'agit ainsi d'éliminer des fonctions génératrices (64n), et par conséquent de la génération théorique elle-même (729), lorsque cette intégrale, seule ou avec des différentielles, s'y trouve impliquée, la première solution de ce problème spécial ou secondaire, telle qu'elle s'offre d'abord, c'est de déterminer la fonction approchée dont il est question, par sa génération technique, c'est-à-dire, par le moyen des séries ou de quelque autre algorithmique technique. Mais, sans considérer que cette génération technique ne saurait, dans tous les cas, déterminer généralement l'intégrale en question, pour toutes les valeurs de la variable dont elle dépend, en ce qu'elle tombe alors, et la plus souvent, dans des résultats divergents, elle serait en outre, dans maints cas, tout à fait impossible, et nous replacerait ainsi dans les difficultés et les embarras où la science, bornée à cette génération technique, se trouve actuellement; difficultés et embarras d'où il s'agit précisément de sortir aujourd'hui. On ne saurait non plus découvrir l'intégrale approchée dont il s'agit, par le moyen de notre génération-neutre relative, telle que nous l'avons fait connaître vers la fin de la seconde section de la Philosophie de la Technie, parce que les procédés de cette relative génération-neutre ne font qu'opérer une transformation des séries, de sorte que là où l'application des séries est impossible, cette génération-neutre devient également impossible. Cependant, pour employer ici des moyens différents de la génération théorique elle-même (729), comme il faut le faire pour découvrir les fonctions approchées des intégrales qu'il s'agit d'éliminer dans cette génération théorique (729), il faut absolument se servir de la génération technique que nous venons de reconnaître, comme impropre à cette fin, lorsqu'on la prend isolée ou en elle-même. Il faut donc chercher à la combiner avec la génération théorique (729), pour ne prendre, dans cette génération technique, que ce qu'elle peut ici offrir d'utile et de praticable toujours, en la rendant purement accessoire à la génération théorique et principale (729). Et c'est ainsi en effet que nous allons résoudre le susdit problème spécial et secondaire, celui de découvrir, par le moyen des équations proposées, les fonctions approchées des inconnues qui, comme intégrales, servent à la résolution de ces équations, et nommément les fonctions approchées de ces intégrales qu'il faut éliminer, elles-mêmes ou leurs différentielles, de la génération théorique (729), lorsqu'elles s'y trouvent impliquées. — Or, c'est là précisément l'objet de la MÉTHODE SECONDAIRE, formant la deuxième méthode absolue, et servant ainsi à compléter la MÉTHODE SUPPLÉMENTAIRE (142), (143), etc., cette première et principale méthode absolue, que, par une anticipation technique, nous venons de réaliser provisoirement dans notre présente MÉTHODE PRÉLIMINAIRE (729), destinée à ouvrir la nouvelle période historique des mathématiques.

Pour peu qu'on y réfléchisse, on conçoit en effet que, pour combiner ainsi la génération théorique (729) avec la génération technique, et pour rendre par là toujours utile et praticable cette dernière dans la résolution approchée

des équations quelconques, primitives ou différentielles, comme nous en avons besoin ici pour accomplir la science par l'application universelle de la génération théorique (729) à la résolution des équations de tous les genres, afin de pouvoir éliminer, de cette génération théorique, les intégrales inconnues et leurs différentielles, qui peuvent y être impliquées, il faut manifestement, dans toute équation proposée, séparer tout ce qui peut y être résolu par l'application immédiate de la méthode (729), c'est-à-dire, par une progressive génération théorique de l'inconnue, ou même, lorsque cela est possible, par une génération théorique finie, c'est-à-dire, par une des méthodes propres à opérer une telle résolution finie des équations, et il faut ensuite, après avoir obtenu ainsi ce résultat théorique, le compléter par ce qui reste de termes ou de fonctions dans l'équation proposée, en appliquant à ce reste la génération technique qui, comme secondaire ou comme subordonnée alors à la résolution théorique de la principale partie de l'équation proposée, se trouve toujours, et à volonté, retenue dans des limites où elle devient utile et praticable généralement.

Or, c'est là l'objet de notre PROBLÈME-UNIVERSIEL, constituant la seconde loi fondamentale des mathématiques; loi dont on découvre ici la haute importance, comme étant, d'après ce que nous venons de reconnaître, indispensable à l'accomplissement de la science. En effet, la forme de ce problème-universel, telle que nous l'avons rappelée dans le précédent Programme pour cette suite d'ouvrages, est . . . (743)

$$0 = fx + x_1 \cdot f_1 x + x_2 \cdot f_2 x + x_3 \cdot f_3 x + \text{etc., etc.};$$

où les caractéristiques f, f_1, f_2, f_3 , etc. dénotent des fonctions quelconques de l'inconnue x , immanentes ou transcendentes, primitives ou dérivées, aux différences ou aux différentielles, et où les coefficients x_1, x_2, x_3 , etc., sont des quantités quelconques dont cette inconnue x se trouve ainsi constituer une fonction qu'il s'agit de découvrir par la résolution de cette équation universelle. Mais, ce qu'il y a de distinctif dans ce problème-universel, c'est que la première fx de ses fonctions représente, pour toute équation proposée, sa susdite partie intégrante et principale, qui, en la considérant comme formant l'équation séparée . . . (743')

$$0 = fx,$$

peut toujours être résolue, ou par une génération théorique finie de l'inconnue x , d'après les méthodes propres à une telle résolution finie, ou généralement par la progressive et indéfinie génération théorique de cette inconnue x , d'après notre présente méthode primordiale (729). Et alors, la résolution générale de ce problème-universel (743), résolution que l'on peut appliquer à toute équation proposée, aura évidemment pour objet de compléter la détermination de l'inconnue x , en joignant à sa génération théorique et principale que donne

l'équation distincte (743)', sa génération technique et purement accessoire qui résulte de la partie secondaire . . . (743)''

$$(x_1 \cdot f_1 x + x_2 \cdot f_2 x + x_3 \cdot f_3 x + \text{etc. ; etc.}),$$

par laquelle cette équation universelle (743) se trouve complétée.

Tel est, en effet, le caractère général, et nommément la forme ou la construction, et l'essence ou la solution du problème universel (743) que nous avons dévoilé à la science, comme constituant la seconde loi fondamentale des mathématiques, et dont nous découvrons ici la décisive importance, comme loi indispensable à l'accomplissement de la science, pour l'établissement de la susdite méthode secondaire, formant la deuxième méthode absolue. — Dans la première section de la *Philosophie de la Technique algorithmique*, sous les marques (51) et (53), nous avons déduit de la loi suprême elle-même cette forme universelle (743) pour toutes les équations qui peuvent exister en mathématiques, quelle que soit leur nature spéciale, comme immanentes ou transcendentes, et comme primitives ou dérivées, aux différences ou aux différentielles, totales ou partielles. Et déjà dans la *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, nous avons donné, par anticipation, la solution générale de ce problème-universel, telle précisément que nous venons de la caractériser. — Il ne nous reste donc qu'à l'appliquer ici au présent accomplissement de la science, c'est-à-dire, à la présente résolution générale des équations de tous les genres, en combinant ce problème-universel, comme résultat de la loi suprême, avec la présente réalisation méthodique de cette loi suprême dans la progressive génération théorique (729) de toutes les fonctions algorithmiques, et par conséquent de celles qui constituent les inconnues dans toutes les équations concevables. Et c'est cette application du problème universel à la résolution générale des équations de tous les genres qui devait être l'objet de la seconde partie de la troisième et dernière section de la *Philosophie de la Technique algorithmique*, à la suite et comme complément indispensable de la première partie de cette troisième section, de cette première partie qui, comme nous l'avons déjà dit plus haut, devait avoir pour objet la présente réalisation provisoire (729) de la méthode suprême (142), (143), etc.; le tout afin que, dans cette troisième et dernière section de notre *Philosophie de la Technique*, se trouvât ainsi réalisée la réforme elle-même des mathématiques, pour laquelle les deux premières sections de cette même philosophie n'offraient encore que la préparation; ainsi qu'on le déclarait formellement dans le titre de la seconde de ces trois sections. — Or, dans le Programme pour la présente suite d'ouvrages, nous avons annoncé que cette résolution générale des équations de tous les genres par le problème-universel, ou plus exactement par la combinaison de ce problème-universel avec la méthode suprême, c'est-à-dire, par la combinaison des deux premières lois fondamentales des mathématiques, fera l'objet spé-

cial du cinquième des ouvrages présents. — Nous pourrions donc renvoyer à ce cinquième ouvrage notre présente question de l'élimination des intégrales inconnues et de leurs différentielles dans la progressive génération théorique (729) des fonctions, lorsque, pour la résolution des équations quelconques proposées, cette génération théorique (729) des intégrales, servant à déterminer les inconnues des équations proposées, impliquerait ces intégrales et leurs différentielles. Et nous pourrions le faire ici d'autant plus convenablement, que, pour l'accomplissement algorithmique de notre nouvelle mécanique céleste, qui fera l'objet du deuxième des ouvrages présents, nous n'avons plus besoin d'aucune résolution d'équations, et surtout d'équations différentielles. En effet, nos nouvelles lois dynamiques de la mécanique céleste, telles qu'elles sont produites dans les *Prolegomènes du Messianisme*, n'impliquent que des intégrales; et, pour ce qui concerne la détermination de ces intégrales, surtout leur détermination théorique, nous venons de découvrir, dans la présente réalisation provisoire de la méthode suprême (142), (143), etc., la méthode primordiale et universelle (729), par laquelle, comme nous le savons déjà, on pourra déterminer ainsi, d'une manière théorique, toutes ces intégrales qui entrent, comme parties constitutives, dans nos lois dynamiques de la mécanique céleste. — Mais, pour compléter la présente exposition des méthodes absolues des mathématiques, et pour montrer ainsi aux géomètres, dès aujourd'hui, que leur science se trouve réellement accomplie par la présente réforme des mathématiques, nous allons ici, par anticipation sur le cinquième des ouvrages présents, donner au moins quelques indications générales qui suffiront pour faire comprendre comment, par cette finale application du problème-universel (743), formant la deuxième méthode absolue, nommée la *Méthode Secondaire*, la science reçoit effectivement, et dès ce moment, son dernier accomplissement, celui dont il est ici question.

Pour cela, il suffira de renvoyer le lecteur à ce que nous avons produit à l'Académie des sciences de Paris, et publié en France il y a plus de trente-trois ans, sans qu'aucun de ces illustres savants se soit aperçu qu'il y avait là, en toute réalité, comme nous allons le leur montrer aujourd'hui, ce final accomplissement de la science, dont nous venons de reconnaître l'indispensable nécessité. En effet, après avoir donné, dans la *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, publiée en 1812, et communiquée à l'Académie des sciences de Paris en 1811, la susdite résolution générale du problème-universel, et cela même sous la forme absolue de cette résolution, c'est-à-dire, par ses derniers éléments, comme on le voit sous les marques (13), (14) et (15) de cet ouvrage, nous y avons joint immédiatement, sous les marques (17) et (23), l'application de cette solution générale à la résolution des équations de tous les genres, à celle précisément dont nous venons de reconnaître la nécessité pour le présent accomplissement final de la science. Eh

bien, les savants académiciens de Paris n'y ont vu rien; cependant, sous la marque (24), nous avons déduit, de cette haute résolution de notre problème-universel, le célèbre théorème de Lagrange, qui forme la découverte principale de ce grand géomètre, et qui néanmoins, comme Lagrange en est convenu lui-même dans son rapport antérieur (en 1810), n'est qu'un « CAS TRÈS-PARTICULIER » de notre loi suprême, et spécialement de notre problème-universel, résultant de cette loi archi-absolue. Bien plus, les très-savants commissaires de cette savante Académie, les illustres MM. Legendre et Arago, prenant le nom de H. Wronski pour un nom allemand, déclarèrent formellement, dans leur rapport sur la susdite Réfutation de Lagrange, que les géomètres allemands ne connaissent pas le SECRET DE LA SCIENCE, et qu'eux seuls, les académiciens de Paris, connaissent ce grand secret, en vertu duquel ils rejetaient le PROBLÈME-UNIVERSSEL, cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, comme une production imaginaire, inepte même, puisque, comme ils le prétendaient, « l'auteur n'était pas capable de la démontrer. » — Nous n'avons pas besoin, sans doute, de rendre attentif à ce qu'il y a de ridicule dans cette jactance, où ces Messieurs se déclarent eux-mêmes supérieurs aux savants étrangers; mais nous devons faire remarquer jusqu'à quelle dangereuse audace peut se porter une telle organisation de l'ignorance en corps savant, privilégié par l'autorité politique, puisque, un an après que Lagrange, le premier géomètre de l'époque, avait déclaré à la même Académie que la loi suprême des mathématiques, découverte par l'auteur, embrassait toutes les mathématiques modernes, et que toutes les productions que les savants y ont faites, depuis Leibnitz et Newton, jusqu'à Lagrange, c'est-à-dire, depuis le théorème de Taylor jusqu'au susdit théorème de Lagrange, n'étaient même que des « CAS TRÈS-PARTICULIERS » de cette loi suprême, deux savants par brevet, tels que Legendre et Arago, qui n'ont rien fait pour la science, qui ne lui ont apporté aucun, absolument aucun, pas le moindre de ces « cas très-particuliers » que l'auteur aurait pu, comme toutes les autres productions mathématiques modernes, déduire de la loi suprême et ranger ainsi pour la nouvelle période historique que cette loi archi-absolue ouvre actuellement à la science, puisque, disons-nous, un an après cette solennelle et inattendue déclaration de Lagrange, deux savants par brevet, tels que Legendre et Arago, viennent, au nom d'un corps savant, qui tout entier n'a fait RIEN DE FONDAMENTAL pour la science, insulter officiellement l'auteur de cette loi suprême des mathématiques, en osant le taxer eux-mêmes d'incapacité scientifique! Et cette audace ne serait, à son tour, que le comble du ridicule, et ne mériterait même pas le mépris de l'auteur, si, comme nous venons de la caractériser, et comme on en aura maintenant une preuve irréfragable, elle n'était pas aussi dangereuse qu'elle est ridicule. On conçoit en effet que de pareilles déclarations officielles, étant répandues dans les écoles publiques, et parmi tous ceux qui, par le moyen de la science, cherchent à

arriver à quelque position sociale, et qui ne peuvent obtenir cette position que par l'approbation expresse de tels académiciens privilégiés, seuls juges et distributeurs de ces positions scientifiques, étaient plus que suffisantes pour faire détruire en France les ouvrages mathématiques de l'auteur, en forçant leur propriétaire de les vendre à la halle de Paris au prix du poids du papier. Ainsi, et l'on n'en pourra plus douter désormais, cette organisation privilégiée de l'ignorance en corps savant, du moins chez ceux qui sont tels effectivement, ne peut avoir, sinon pour but, du moins pour résultat, rien autre qu'un insurmontable empêchement contre la production dans le monde des grandes et fondamentales vérités scientifiques, et bien souvent leur destruction elle-même; car, comme on le verra peut-être dans notre cas présent, peu s'en est fallu que tous ces résultats ne fussent perdus pour jamais. — Mais, laissons là ces misères humaines; et, en nous fondant pour l'avenir sur la protection de la Providence, abordons notre dernière et grande question présente, pour laquelle nous supposons que le lecteur aura sous les yeux l'ouvrage que nous venons de citer, la *Refutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, en nous bornant ici à nommer les marques des formules dont nous allons faire usage.

Or, en ne perdant pas de vue que notre méthode primordiale et universelle (799) donne immédiatement, par le moyen des fonctions différentielles que, pour les inconnues, on peut toujours tirer des équations qui les proposent, les intégrales ou la génération théorique de ces inconnues, et qu'il ne s'agit, par la présente application du problème-universel à la solution de ces mêmes équations, de rien autre que de découvrir, pour leurs inconnues en question, des fonctions approchées qui soient propres à éliminer ces mêmes inconnues dans le progrès de leur susdite génération théorique (729), c'est-à-dire, dans les fonctions génératrices (640) ou (729)' de cette génération théorique, ou comprendra facilement, pour peu que l'on approfondisse l'application que, dans la *Refutation de Lagrange*, sous les marques (17) à (23), nous faisons du problème-universel à la résolution générale des équations de tous les genres, ou comprendra, disons-nous, que cette application nous conduira, dans tous les cas, à la découverte de ces fonctions approchées qu'il nous reste à connaître pour la formation des fonctions génératrices (64n) ou (729)', et qui, dans cet état mixte d'approximation, mi-théorique et mi-technique, sont parfaitement suffisantes pour cette formation. Nous allons donc faire abstraction provisoirement de la génération théorique (729) elle-même, par laquelle doivent finalement être résolues toutes les équations quelconques, pour ne nous occuper d'abord, du moins par une rapide anticipation sur le cinquième des ouvrages présents, de la résolution approchée de ces équations par le problème-universel, afin de nous préparer ainsi les fonctions nécessaires et suffisantes à la formation des fonctions génératrices (640) ou (729)' pour la finale génération

théorique (729) des inconnues de ces mêmes équations. Et comme nous l'avons déjà dit, c'est dans l'application que, dans la Réfutation de Lagrange, sous les marques (17) à (23), nous avons faite de notre problème-universel, que nous trouverons immédiatement les moyens pour cette résolution auxiliaire des équations, c'est-à-dire, la méthode secondaire dont il s'agit actuellement.

En nous servant donc ici, purement et simplement, de ces formules (17) à (23) de la Réfutation de Lagrange, sans autre explication, nous ferons remarquer que, dans l'équation générale (17) qu'il s'agit de résoudre, savoir, dans l'équation

$$0 = \Phi(x, a),$$

la quantité a qui entre dans la fonction générale et quelconque $\Phi(x, a)$, est précisément la quantité qu'il faut introduire dans toute équation proposée afin que, dans le cas où cette quantité a devient zéro, cette équation proposée se réduise à une équation que l'on puisse résoudre par une véritable génération théorique de l'inconnue, soit d'une manière finie, à l'aide des méthodes connues pour cette génération finie, soit d'une manière indéfinie, à l'aide de notre présente méthode primordiale et universelle (729). — Or, comme on le conçoit facilement, il n'y avait, dans notre Réfutation de Lagrange, telle qu'elle fut présentée à l'Académie des sciences de Paris en 1811, aucune nécessité de donner immédiatement la présente et décisive explication de la vraie signification de cette quantité a qui entre dans l'équation générale (17), c'est-à-dire, dans la présente équation (744). Il fallait au contraire y laisser subsister cette quantité a dans toute sa signification générale, comme un des éléments de l'équation générale (17), qu'il s'agissait ainsi de résoudre par le problème-universel (13), en laissant aux géomètres la faculté de n'y voir qu'un des éléments qui fait une partie constituante essentielle de toute équation proposée, et en leur laissant en même temps le génie de découvrir, par eux-mêmes, dans cette quantité a en question, une quantité arbitraire par laquelle toute équation proposée peut, en l'y introduisant convenablement, être réduite à une équation du même genre qui admette immédiatement une solution par les méthodes connues. Nous réservions ainsi aux géomètres le plaisir de pouvoir, par eux-mêmes, découvrir la haute et décisive importance de notre problème-universel (13) dans son application à la solution générale des équations de tous les genres, et surtout le plaisir de découvrir en même temps que, dans l'accomplissement final de la science, il n'existera jamais, pour la résolution générale des équations de tous les genres, aucun autre moyen universel et différent de la méthode absolue que présente ainsi la solution (15) de ce problème-universel (13), formant la seconde loi fondamentale des mathématiques. Nous nous réservions au moins de conduire insensiblement les géomètres à ces décisives découvertes dans le développement progressif de notre Philosophie de la Technique, de cette nouvelle et finale branche des mathématiques. Mais, le stupide

accueil que ce problème-universel, cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, a trouvé auprès de l'Académie des sciences de Paris, nous a imposé l'obligation, pour démasquer une telle ignorance privilégiée, de ne dévoiler la véritable signification de ce décisif nombre arbitraire a , qui entre dans l'équation générale (17) et qui rend ainsi possible la solution immédiate des équations de tous les genres, par l'application de notre problème-universel, de ne dévoiler cette signification, disons-ous, qu'après de longues années, lorsque notre silence aurait ainsi constaté le génie mathématique des hommes qui, pour se faire considérer comme principe de la gloire nationale, de cette gloire infinie qui émane de bien autres sources, trompent la nation en lui faisant accroire qu'eux seuls connaissent les SECRETS DES SCIENCES, eux précisément qui n'ont découvert à priori AUCUNE VÉRITÉ FONDAMENTALE. — Aussi, n'est-ce que dans le second des ouvrages présents, dans la Réforme de la Mécanique céleste, c'est-à-dire, près de quarante ans après notre première publication du problème-universel, de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, que nous nous proposons, en y donnant, par anticipation sur notre cinquième ouvrage, la résolution générale des équations de tous les genres par l'application de ce problème-universel, de dévoiler enfin la signification aussi décisive que mystérieuse du nombre arbitraire a qui entre dans l'équation générale (17), produite à l'Académie des sciences de Paris, déjà en 1811. Mais, par les raisons que nous avons alléguées plus haut, en parlant de la Méthodologie des sciences, ayant été forcés de donner ici, par anticipation sur notre deuxième ouvrage, le paragraphe qui traite de l'Accomplissement algorithmique de la Mécanique céleste, et qui, pour cela, expose toutes les méthodes absolues des mathématiques, nous donnons, dès aujourd'hui, comme nous venons de le dire, un exposé rapide de la méthode secondaire qui, par l'application du problème-universel, conduit à la solution générale des équations de tous les genres, et par conséquent, nous dévoilons ici le sens mystérieux de la susdite équation générale (17), c'est-à-dire, de la présente équation (744). — Or, comme nous venons de le déclarer, la mystérieuse quantité a , dans ces équations (17) ou (744), est la quantité arbitraire qu'il faut y introduire de manière à ce que, dans le cas où $a = 0$, cette équation proposée (17) ou (744) se réduise à une équation du même genre que l'on puisse résoudre par une véritable génération théorique de l'inconnue x , soit par un procédé fini, à l'aide des méthodes connues pour cette génération finie, soit par un procédé infini, à l'aide de notre présente méthode primordiale et universelle (729). Et cette équation réduite ainsi, savoir, l'équation

$$0 = \Phi(x, 0),$$

sera précisément la susdite équation (743) dont la fonction Φx forme le premier terme dans notre problème-universel (743), et qui, comme partie princi-

pale et essentielle de l'équation proposée, peut ainsi recevoir sa solution par une véritable génération théorique de la fonction qui constitue son inconnue (*). — Et quant à la manière dont la quantité auxiliaire a doit être introduite dans une équation proposée (744), elle peut avoir lieu par deux modes, savoir, d'une part, suivant les principes de la théorie des différences et différentielles, par le mode de sommation, comme coefficient des quantités qui, par la valeur $a = 0$, doivent disparaître dans l'équation proposée (744), et de l'autre part, suivant les principes de notre théorie des grades et gradules, par le mode de graduation, comme exposant des quantités qui, pour cette valeur $a = 0$, doivent également disparaître dans l'équation proposée (744). Et cette introduction de la quantité auxiliaire a peut manifestement avoir lieu ou par un seul de ces deux modes, ou par tous les deux à la fois, suivant les circonstances de la construction de l'équation proposée. Mais, quoique cette introduction de la quantité auxiliaire a soit ainsi tout à fait arbitraire, on conçoit, par tout ce que nous avons dit plus haut concernant cette application du problème-universel (743), que, pour arriver le plus rapidement et le plus simplement à cette résolution générale des équations, il faut suivre la règle que, par une telle disparition des termes dans l'équation proposée (744), à l'aide de la valeur $a = 0$, cette équation proposée, en la réduisant ainsi à l'équation (745) que l'on puisse résoudre par une véritable génération théorique de son inconnue, se trouve altérée le moins possible et conserve alors, dans cette équation réduite (745), son essence ou son caractère principal, autant que cela pourra se faire. Par exemple, dans l'équation différentielle du troisième ordre

$$0 = \xi \cdot d^3 x - 3x^2 \cdot dx \cdot d\xi^2 + \xi^3 \cdot x^5 \cdot d^2 x \cdot dx, \quad (746)$$

en considérant l'inconnue x comme une fonction de la variable ξ , on pourrait d'abord, en divisant cette équation par ξ , introduire la quantité auxiliaire a de la manière que voici . . . (747)

$$0 = \frac{d^3 x}{d\xi^3} - 3 \cdot \left(\frac{x^2}{\xi} \right) \cdot \frac{dx}{d\xi} + (\xi^2 \cdot x^5) \cdot \frac{d^2 x \cdot dx}{d\xi^2},$$

(*) C'est ici le lieu de prévenir pour que l'on ne confonde pas, avec notre problème-universel, le célèbre théorème de Lagrange, en voyant que ce théorème en dérive comme un cas particulier, ainsi que cela doit être, puisque ce problème-universel est une loi fondamentale des mathématiques, de laquelle dérivent nécessairement tous les théorèmes qui concernent les équations. — Ce qui, dans son application présente, forme le caractère distinctif de notre problème-universel (743), c'est qu'il sert à séparer, dans toute équation proposée, sa partie en quelque sorte essentielle qui forme l'équation distincte (743) et qui, n'importe quelle soit la nature de l'équation proposée, peut toujours être résolue par une véritable génération théorique de l'inconnue dans cette équation réduite (743), afin de pouvoir ensuite, par une génération technique faisant partie de ce même problème-universel, compléter la détermination totale de l'inconnue par rapport à la partie complémentaire (743) de l'équation proposée. Or, rien de pareil ne se trouve dans le théorème de Lagrange, ni dans son fait, ni même dans son intention ou destination.

afin que, pour $\alpha = 0$, conformément à l'équation réduite générale (743)', la présente équation se réduise à l'équation . . . (747)''

$$0 = \frac{d^3 x}{d\xi^3} - 3 \cdot \frac{dx}{d\xi} + \frac{d^2 x \cdot dx}{d\xi^3},$$

qui, en donnant la différentielle de l'ordre le plus élevé indépendamment de l'inconnue x , savoir, . . . (747)''

$$\frac{d^3 x}{d\xi^3} = 3 \cdot \frac{dx}{d\xi} - \frac{d^2 x \cdot dx}{d\xi^3},$$

pourrait être intégrée immédiatement par notre présente méthode universelle (729), c'est-à-dire, par une progressive génération théorique de l'inconnue x . Mais, cette intégrale (729), en y faisant abstraction de la série complémentaire $S(\varpi + 1)$, savoir, l'intégrale . . . (748)

$$x = F\xi = \mathfrak{A}_0 + \Sigma(\varpi),$$

impliquerait, en outre des trois constantes $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, ce qui doit être, les deux différentielles dx et d^2x des ordres inférieurs à l'ordre le plus élevé d^3x qui est donné par l'équation (747)'. Il faudrait donc, pour pouvoir éliminer ces deux différentielles des ordres inférieurs, prendre, sur l'intégrale (748), ses trois différentielles consécutives, afin d'avoir les trois équations . . . (748)'

$$dx = d\Sigma(\varpi), \quad d^2x = d^2\Sigma(\varpi), \quad d^3x = d^3\Sigma(\varpi),$$

qui, après y avoir fait disparaître, par l'équation (747)'', les différentielles supérieures, conduiraient, par l'élimination des deux différentielles inférieures dx et d^2x , aux deux équations . . . (748)''

$$0 = m + n \cdot \frac{dx}{d\xi}, \quad \text{et} \quad 0 = p + q \cdot \frac{d^2x}{d\xi^2},$$

par lesquelles ces deux différentielles inférieures pourraient être éliminées dans les fonctions génératrices (729)' qui forment la somme $\Sigma(\varpi)$ dans la présente intégrale (748). Et ce n'est qu'après avoir ainsi déterminé complètement les fonctions génératrices dans cette somme $\Sigma(\varpi)$, qu'il faudrait procéder à la détermination correspondante (729)'' et (729)''' de la série complémentaire $S(\varpi + 1)$ pour avoir, dans l'équation réduite (747)', la génération totale de l'intégrale cherchée ou de l'inconnue x , savoir . . . (748)'''

$$x = \mathfrak{A}_0 + \Sigma(\varpi) + S(\varpi + 1).$$

Mais, si l'on introduisait la quantité auxiliaire α dans l'équation proposée (746) de la manière différente que voici . . . (749)

$$0 = \frac{d^3 x}{d\xi^3} - 3 \cdot \left(\frac{x}{\xi}\right)^{\alpha} \cdot \frac{dx}{d\xi} + \left(\xi^{\frac{5}{2}} \cdot x \cdot \frac{dx}{d\xi}\right)^{\alpha} \cdot \frac{d^2 x}{d\xi^2},$$

afin que, pour $a = 0$, conformément à l'équation réduite générale (743)', la présente équation se réduise à l'équation . . . (749)'

$$0 = \frac{d^3 x}{d\xi^3} - 3 \frac{dx}{d\xi} + \frac{d^3 x}{d\xi^3},$$

on pourrait intégrer immédiatement cette équation réduite par la méthode générale que, sous les marques (93) à (95), nous avons donnée, dans la *Critique de la théorie des fonctions génératrices de Laplace*, pour l'intégration des équations différentielles d'un ordre quelconque μ , lorsque leurs coefficients sont des nombres constants. En effet, appliquant ici cette méthode (93) à (95), on obtiendrait, pour la présente équation différentielle (749)', l'intégrale finie . . . (749)''

$$x = M_1 + M_2 \cdot e^{\beta \xi} + M_3 \cdot e^{\epsilon \xi};$$

dans laquelle, e étant le nombre philosophique des logarithmes, M_1 , M_2 , M_3 seraient trois constantes arbitraires, et les exposants β et ϵ auraient les valeurs . . . (749)'''

$$\beta = -\frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{13}), \quad \text{et} \quad \epsilon = -\frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{13}).$$

Or, en comparant les deux équations réduites (747)' et (749)' avec l'équation proposée pour exemple (746), on reconnaît facilement que la première (747)' de ces réduites s'éloigne moins que la seconde de la nature générale de cette équation proposée (746). Et par conséquent, d'après la règle que nous avons établie plus haut pour cette réduction des équations proposées par l'introduction de la quantité auxiliaire a , afin de pouvoir appliquer ici notre problème-universel, il est manifeste que, si l'y avait pas d'autres inconvénients, la réduction (747)' serait préférable à la réduction (749)'. Mais, les difficultés que présentent, dans la première de ces réductions, les éliminations (748)' et (748)'' des différentielles des ordres inférieurs, et l'inexactitude qui s'attacherait à ces éliminations opérées sur l'intégrale incomplète (748)', puisqu'on y néglige la série complémentaire $S(\omega + 1)$, formeraient des inconvénients assez graves et plus que suffisants pour que l'on préférât ici la réduction (749)' où, comme nous venons de le voir, on peut obtenir immédiatement, et avec une exactitude rigoureuse, l'inconnue x de cette équation réduite. Et ces inconvénients, c'est-à-dire, les difficultés qui les produiraient, seraient même insurmontables pour les équations aux différentielles partielles, où il deviendrait impraticable d'éliminer ainsi, entre les équations différentielles prises sur l'intégrale, d'après des procédés analogues à (748)', (748)' et (748)'', toutes les différentielles partielles qui se trouvaient impliquées dans les fonctions génératrices (729)' de la progressive génération théorique (729) de leurs intégrales.

Nous concluons donc que la règle générale et la plus convenable pour l'introduction de la quantité auxiliaire a dont il est question, afin de pouvoir réduire les équations proposées (744) à la forme (745), propre à l'application de notre problème-universel à la résolution générale de ces équations, consiste manifestement en ce que ces équations réduites (745), qui résultent de la valeur de $a = 0$, puissent, dans tous les cas, être résolues immédiatement PAR UNE GÉNÉRATION THÉORIQUE FINIE, en ayant toutefois égard, dans cette réduction (745), de s'écarter le moins possible de la nature générale des équations proposées (744). Et dans l'état auquel nous amenons la science, cette règle générale pourra être suivie facilement dans tous les cas, c'est-à-dire, pour les équations de tous les genres, quelles qu'elles puissent être, soit primitives, immanentes ou transcendantes, soit dérivées, aux différentielles totales ou aux différentielles partielles, et même aux différences, totales ou partielles, comme nous allons le voir.

Pour ce qui concerne, en premier lieu, les équations différentielles, et d'abord les équations aux différentielles totales, on pourra toujours, par l'introduction de la quantité auxiliaire a , réduire ces équations à la forme des équations linéaires à coefficients constants, quels que soient l'ordre des différentielles et la construction des équations proposées, comme nous venons, dans l'exemple précédent (746), de réduire cette équation proposée (746) à la forme (749). Et alors, la susdite méthode générale que nous avons produite dans la *Critique de Laplace*, sous les marques (93) à (95), donnera toujours et immédiatement, avec toutes leurs constantes arbitraires, l'intégration théorique et finie de ces équations différentielles réduites, quel que soit l'ordre μ de leurs différentielles les plus élevées. — Ensuite, pour les équations aux différentielles partielles, quels que soient le nombre des variables indépendantes et l'ordre le plus élevé des différentielles dans les équations proposées, on pourra de même et toujours, par l'introduction de la quantité auxiliaire a , réduire ces équations à la forme des équations linéaires à coefficients constants, telles que sont, dans notre *Critique de Laplace*, pour ces équations aux différentielles partielles, d'abord, à deux variables indépendantes, la forme (103)', et ensuite, à un nombre quelconque des variables indépendantes, la forme (138). Et alors, la méthode générale que, dans cette *Critique de Laplace*, nous avons produite sous les marques (119) et (130), et appliquée aux différentielles sous les marques (108)' et (142), donnera toujours, avec toutes leurs fonctions arbitraires, l'intégration théorique finie de ces équations réduites, quels que soient, comme nous venons de le supposer, le nombre n des variables indépendantes et l'ordre μ des différentielles les plus élevées.

Pour ce qui concerne, en second lieu, les équations primitives, et d'abord les équations immanentes, c'est-à-dire, les équations algébriques ordinaires, celles que, dans notre *Philosophie des Mathématiques*, nous nommons équations

tions d'équivalence, on pourra facilement, par l'introduction de la quantité auxiliaire a , réduire ces équations, entre mille formes différentes, à la forme de celles que l'on nomme équations réciproques, et qui consistent en ce que les coefficients des termes correspondants aux puissances de l'inconnue dont la somme des exposants est égale au degré de l'équation, sont égaux. Ces équations réciproques pourront toujours être formées de manière à ce qu'elles s'éloignent le moins possible de la nature générale des équations proposées; et, comme cela est bien notoire, ces équations réciproques pourront alors être résolues d'une manière théorique et finie. — Ensuite, pour les équations transcendentes, dont la forme est indéfiniment variable, on conçoit néanmoins que, sous toutes leurs formes, on pourra toujours, par l'introduction de la quantité auxiliaire a dont il est question, suivant l'un ou l'autre des deux modes susdits de cette introduction, savoir, comme coefficient ou comme exposant des quantités que l'on veut ainsi faire disparaître, on pourra toujours, disons-nous, réduire ces équations à la forme des équations immanentes ou des équations algébriques ordinaires, de celles précisément dont nous venons de parler d'abord. Et alors, ces équations réduites pourront être résolues d'une manière théorique et finie, comme les équations algébriques ordinaires dont elles auront la forme.

Ainsi, dans tous les cas, les équations proposées de tous les genres (744), quelles qu'elles soient, soit primitives, immanentes ou transcendentes, soit dérivées, aux différentielles, totales ou partielles, et même aux différences, totales ou partielles, comme nous le verrons à l'instant, pourront toujours, par l'introduction de la quantité auxiliaire dont il s'agit, être réduites à la forme (745) sous laquelle, en s'éloignant le moins possible de la nature générale des équations proposées (744), ces équations réduites (745) pourront être résolues préalablement, d'une manière théorique et finie, dans la vue de préparer par là les éléments nécessaires pour l'application du problème-universel à la résolution générale et complète des équations proposées (744), pour cette application susdite que, depuis plus de trente ans, nous avons fait connaître aux académiciens de Paris, sans que, durant tout ce temps, ces savants par brevets aient pu y apercevoir autre chose que des motifs pour insulter publiquement l'auteur dans leurs journaux politiques. — Montrons donc, en peu de mots, par anticipation sur le cinquième des ouvrages présents, en quoi consiste cette application du problème-universel à la résolution générale des équations, telle que nous l'avons fait connaître, sous les susdites marques (17) à (23), dans la *Réfutation de Lagrange*, cette application qui, comme on va le voir, pourra devenir élémentaire pour les écoles, et qui, à la hauteur de la science des illustres académiciens de Paris, leur paraissait, comme toutes les autres productions mathématiques de l'auteur, des énigmes de Sibylle, ainsi que ces Messieurs s'en vantent publiquement.

Après avoir introduit, dans les équations proposées (744), quelles qu'elles soient, la quantité auxiliaire a qui, comme nous venons de l'indiquer, doit les réduire à l'équation (745), propre à recevoir une solution théorique et finie, il faut d'abord, d'après ce que prescrit la formule (18), développer la fonction $\Phi(x, a)$, au moyen de la loi (19) ou (20), par rapport aux puissances progressives d'une fonction génératrice φa , savoir . . . (750)

$$0 = \Phi(x, a) = A_0 + A_1(\varphi a) + A_2(\varphi a)^2 + A_3(\varphi a)^3 + \text{etc.}, \text{ etc.}$$

Et, d'après les considérations qui nous ont déterminé sous la marque (641), la forme la plus convenable de la présente fonction génératrice φa serait . . . (750')

$$\varphi a = \frac{a - \omega}{n + a},$$

n étant une quantité arbitraire, et ω une quantité avec laquelle, à la place de a , l'équation réduite (745), savoir . . . (750'')

$$0 = \Phi(x, \omega),$$

pourra être résolue progressivement, quantité qui, dans sa première détermination, d'après ce que nous venons de reconnaître, sera $\omega = 0$. Mais, pour éviter les complications dans ce développement (750) de la fonction $\Phi(x, a)$, il conviendra de prendre d'abord, dans la présente fonction génératrice (750'), pour la quantité arbitraire n , la quantité $(1 - a)$ qui réduira cette fonction génératrice à la forme simple . . . (751)

$$\varphi a = (a - \omega),$$

dont la première dérivée différentielle $\frac{d\varphi a}{da}$, qui entre dans les lois (19) et (20) du développement en question (750'), sera égale à l'unité. Ainsi, d'après la formule (18), ce développement (750) sera alors simplement . . . (752)

$$0 = \Phi(x, a) = A_0 + A_1(a - \omega) + A_2(a - \omega)^2 + A_3(a - \omega)^3 + \text{etc.};$$

et d'après les lois (19) et (20), les coefficients de ce développement auront les valeurs générales . . . (752')

$$A_0 = \Phi(x, \omega), \quad A_1 = \frac{d\Phi(x, \omega)}{1 \cdot d\omega}, \quad A_2 = \frac{d^2\Phi(x, \omega)}{1 \cdot 2 \cdot d\omega^2}, \text{ etc.};$$

et généralement, pour un indice quelconque μ , . . . (752'')

$$A_\mu = \frac{d^\mu \Phi(x, \omega)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot d\omega^\mu};$$

valeurs où, pour la première opération, il faut faire $\omega = 0$, afin que l'équation réduite (745), savoir, $\Phi(x, \omega) = 0$, puisse être résolue immédiatement par une génération théorique et finie de l'inconnue x .

Ainsi, dans l'exemple précédent (746), où, d'après (749), la fonction d'équation $\Phi(x, a)$ sera . . . (753)

$$\Phi(x, a) = \frac{d^3 x}{d\xi^3} - 3 \cdot \left(\frac{x^3}{\xi}\right)^a \cdot \frac{dx}{d\xi} + \left(\xi^3 \cdot x^5 \cdot \frac{dx}{d\xi}\right)^a \cdot \frac{d^2 x}{d\xi^2};$$

nous aurons, pour le développement (752) de cette fonction, dans le cas initial où $a=0$, d'abord, la valeur . . . (753')

$$A_0 = \frac{d^3 x}{d\xi^3} - 3 \cdot \frac{dx}{d\xi} + \frac{d^2 x}{d\xi^2};$$

et ensuite, pour tous les coefficients A_1, A_2, A_3 , etc., l'expression générale . . . (753'')

$$A_p = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p} \cdot \left\{ 3 \cdot \frac{dx}{d\xi} \cdot \left[L\left(\frac{x^3}{\xi}\right) \right]^p - \frac{d^2 x}{d\xi^2} \cdot \left[L\left(\xi^3 \cdot x^5 \cdot \frac{dx}{d\xi}\right) \right]^p \right\}.$$

Or, en vertu des expressions qui, dans la *Réfraction de Lagrange*, précèdent l'équation (21), ayant la forme de notre problème-universel (743), on aura, pour les fonctions fx, f_1x, f_2x, f_3x , etc., qui entrent dans sa construction, en vertu des présents coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc. dans le développement (752) de la fonction $\Phi(x, a)$ de l'équation proposée (744), les déterminations . . . (754)

$$fx = \Phi(x, \omega), \quad f_1x = \frac{d\Phi(x, \omega)}{d\omega}, \quad f_2x = \frac{d^2\Phi(x, \omega)}{d\omega^2}, \text{ etc.};$$

et généralement . . . (754')

$$f_{\mu}x = \frac{d^{\mu}\Phi(x, \omega)}{d\omega^{\mu}};$$

en faisant $\omega=0$ pour la première opération.

Ainsi, dans l'exemple (746), nous aurons, en vertu de l'expression générale (753) de la fonction d'équation $\Phi(x, a)$, pour les fonctions fx, f_1x, f_2x, f_3x , etc. en question, les déterminations générales . . . (755)

$$fx = \frac{d^3 x}{d\xi^3} - 3 \cdot \left(\frac{x^3}{\xi}\right)^a \cdot \frac{dx}{d\xi} + \left(\xi^3 \cdot x^5 \cdot \frac{dx}{d\xi}\right)^a \cdot \frac{d^2 x}{d\xi^2},$$

$$f_1x = -3 \cdot \frac{dx}{d\xi} \cdot \left(\frac{x^3}{\xi}\right)^a \cdot \left[L\left(\frac{x^3}{\xi}\right) \right]^a + \frac{d^2 x}{d\xi^2} \cdot \left(\xi^3 \cdot x^5 \cdot \frac{dx}{d\xi}\right)^a \cdot \left[L\left(\xi^3 \cdot x^5 \cdot \frac{dx}{d\xi}\right) \right]^a;$$

qui, pour l'opération initiale où $\omega=0$, se réduisent aux expressions . . . (755')

$$fx = \frac{d^3 x}{d\xi^3} - 3 \cdot \frac{dx}{d\xi} + \frac{d^2 x}{d\xi^2},$$

$$f_1x = -3 \cdot \frac{dx}{d\xi} \cdot \left[L\left(\frac{x^3}{\xi}\right) \right]^0 + \frac{d^2 x}{d\xi^2} \cdot \left[L\left(\xi^3 \cdot x^5 \cdot \frac{dx}{d\xi}\right) \right]^0.$$

Or, ce sont ces fonctions fx , et f_1x, f_2x, f_3x , etc., telles qu'elles sont déterminées en général par les expressions précédentes (754), et telles qu'elles le sont en particulier, pour l'exemple (746), par les présentes expressions (755), ce sont, disons-nous, ces fonctions fx , et f_1x, f_2x, f_3x , etc. qui entrent dans les expressions (23) des coefficients Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc., par lesquels, dans l'expression (22) de cette même *Réfraction de Lagrange*, on trouve donnée définitivement l'inconnue x de l'équation proposée (744), c'est-à-dire, de l'équation

$$0 = \Phi(x, a),$$

en y faisant $a = t$. Mais, et c'est là le point essentiel de cette résolution générale des équations par le problème-universel, dans les expressions (23) des coefficients Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc. que nous venons de signaler, l'inconnue x dont sont formées les fonctions fx , et f_1x, f_2x, f_3x , etc. composant le problème-universel (743), doit être déterminée par l'équation réduite (743)', savoir, $fx = 0$, c'est-à-dire, par l'équation réduite (745) qui, dans le développement (750) et (752), résulte du premier terme A_0 de ce développement, et qui, dans l'exemple précédent (746), forme l'équation (749)' résultant effectivement de la valeur (753)' de ce premier terme A_0 . Comme telle, cette valeur de x , qui provient ainsi d'une résolution théorique et finie des équations réduites (743)', (745), et (749)', lesquelles constituent les PARTIES ESSENTIELLES des équations proposées (743), (744), et (746), doit être considérée comme étant la VALEUR FONDAMENTALE de l'inconnue x dans ces équations proposées; valeur fondamentale à laquelle s'attache ensuite et accessoirement la valeur complémentaire de cette inconnue x , provenant de la partie secondaire (743)'' dans la forme du problème-universel (743).

Il faut ici remarquer que, lorsque les équations proposées (743) ou (744) sont des équations primitives, et non des équations différentielles, les équations réduites (743)' ou (745) contiennent immédiatement l'inconnue x elle-même et elle seule; de sorte qu'elles servent alors à déterminer directement sa valeur fondamentale que nous venons de signaler. — Mais, lorsque les équations proposées (743) ou (744) sont des équations différentielles, leurs équations réduites (743)' ou (745) contiennent en outre les différentielles de l'inconnue x , et souvent même ces différentielles toutes seules, comme on le voit dans l'exemple (749); de sorte qu'on ne peut alors déterminer la saidite valeur fondamentale de cette inconnue x que par l'intégration de ces équations réduites (743)' ou (745), comme nous l'avons fait, sous la marque (749)'', pour l'exemple (749)' que nous venons de citer. Toutefois, ces équations réduites (743)' ou (745), comme équations différentielles, suffisent complètement et par elles seules pour que, par leur intégration, qui est toujours théorique et finie, on parvienne ainsi à déterminer, pour l'inconnue x , sa valeur fondamentale en question; car, ces équations réduites (743)' ou (745) expriment alors une certaine relation entre les différentielles de l'inconnue x ,

et par conséquent, sans que l'on ait besoin de connaître la nature de ces différentielles, telle que pourrait la faire connaître l'équation proposée (743) ou (744), du moins pour la différentielle de l'ordre le plus élevé, l'intégration pure et simple de ces équations réduites (743)' ou (745), telle que l'est l'intégration (749)'' dans l'exemple (749)', suffit et doit suffire toute seule, sans intervention d'aucune valeur prise dans l'équation proposée (744), pour déterminer, dans l'inconnue x , la seule valeur qui puisse satisfaire à cette relation de ses différentielles. Et c'est là précisément, pour les équations proposées (743) ou (744), lorsqu'elles sont différentielles, la susdite valeur fondamentale de l'inconnue x . Aussi, comme telle, en prenant simplement les différentielles de la fonction qui forme cette valeur fondamentale, suffit-elle, en même temps, pour déterminer, non-seulement les valeurs correspondantes de toutes les différentielles des ordres inférieurs à l'ordre de la différentielle qui, dans les équations proposées (743) ou (744), forme l'ordre le plus élevé, et qui, la première dans ces ordres ascendants, se trouve donnée par ces équations proposées au moyen de ces différentielles des ordres inférieurs, mais de plus les valeurs de cette différentielle de l'ordre le plus élevé et de toutes les autres différentielles des ordres supérieurs, sans que l'on doive ici recourir à la détermination des valeurs de ces différentielles des ordres supérieurs par les équations proposées (743) ou (744). Ainsi, dans notre susdit exemple (749)', la fonction (749)'' qui résulte de l'intégration immédiate de cette équation réduite (749)', et qui forme alors, pour l'inconnue x , sa valeur fondamentale en question, donne immédiatement, par ses différentielles successives, savoir, par les différentielles . . . (757)

$$\begin{aligned} dx &= \left\{ M_1 \cdot e^{\beta_1} \cdot \beta + M_2 \cdot e^{\beta_2} \cdot 6 \right\} \cdot d\xi, \\ d^2x &= \left\{ M_1 \cdot e^{\beta_1} \cdot \beta^2 + M_2 \cdot e^{\beta_2} \cdot 6^2 \right\} \cdot d\xi^2, \\ d^3x &= \left\{ M_1 \cdot e^{\beta_1} \cdot \beta^3 + M_2 \cdot e^{\beta_2} \cdot 6^3 \right\} \cdot d\xi^3, \\ &\text{etc., etc.,} \end{aligned}$$

les valeurs de toutes les différentielles de l'inconnue x , correspondantes à sa valeur fondamentale (749)'', telles que ces valeurs sont destinées à servir, lorsqu'il en est besoin, pour la solution ou pour l'intégration de l'équation (746) par l'application du problème-universel (743) dont il s'agit.

Il faut encore remarquer que, lorsque les équations proposées (743) ou (744) sont différentielles, et lorsque, par conséquent, les expressions (23) des susdits coefficients Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc., et nommément les fonctions f_x , et $f_x x, f_x x^2, f_x x^3$, etc. qui entrent dans la construction de ces coefficients, contiennent les différentielles de l'inconnue x , ces différentielles doivent y être considérées comme des fonctions de cette inconnue x lorsqu'on y prend les différentielles des fonctions $f_x, f_x x, f_x x^2, f_x x^3$, etc., ainsi que

nous l'avons déjà dit dans la *Réfutation de Lagrange*, à la suite des expressions (23), en y ajoutant qu'après les opérations, il faut substituer, à la place de ces dérivées différentielles de tous les ordres, leurs valeurs données par l'équation réduite (743)' ou (745), c'est-à-dire, par la susdite valeur fondamentale de l'inconnue x , résultant de l'intégration théorique de ces équations réduites (743)' ou (745), comme nous venons d'en présenter un exemple dans les expressions (757) de ces différentielles en question (*). Mais, en considérant ainsi les différentielles qui entrent dans les expressions (23) des coefficients Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc., comme étant des fonctions de l'inconnue x , par rapport à laquelle on doit prendre ultérieurement les dérivées différentielles dans ces expressions (23), il est manifeste qu'on sera conduit à des différentielles réciproques. Par exemple, pour les différentielles totales, on aura . . . (758)

$$\frac{d\left(\frac{d^n x}{d\xi^n}\right)}{dx} = \left(\frac{d^{n+1} x}{d\xi^{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{d\xi}{dx}\right),$$

$$\frac{d^2\left(\frac{d^n x}{d\xi^n}\right)}{dx^2} = \left(\frac{d^{n+2} x}{d\xi^{n+2}}\right) \cdot \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^{n+1} x}{d\xi^{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{d^2 \xi}{dx^2}\right),$$

etc., etc.;

et l'on sera ainsi conduit aux différentielles réciproques $\frac{d\xi}{dx}, \frac{d^2 \xi}{dx^2}, \frac{d^3 \xi}{dx^3}$, etc. Et de même, pour les différentielles partielles, on aura . . . (758')

$$\frac{d\left(\frac{d^{n+a} x}{d\xi^n \cdot d\zeta^a}\right)}{dx} = \left(\frac{d^{n+a+1} x}{d\xi^{n+1} \cdot d\zeta^a}\right) \cdot \left(\frac{d\xi}{dx}\right) + \left(\frac{d^{n+a+1} x}{d\xi^n \cdot d\zeta^{a+1}}\right) \cdot \left(\frac{d\zeta}{dx}\right),$$

etc., etc.;

(*) Dans la *Réfutation de Lagrange*, nous nous étions notre présente expression de notre méthode asymptotique, n'ayant pas encore jugé nécessaire de préciser que la quantité a dans l'équation (12) est une quantité arbitraire qui, par sa valeur $a=0$, ou généralement $a=m$, est destinée à réduire toute équation proposée à la forme où elle peut recevoir immédiatement sa solution par des procédés théoriques, nous avons dit, à la suite des expressions (23) des coefficients Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , etc., qu'il faut substituer, à la place des dérivées différentielles qui entrent dans ces expressions (23), leurs valeurs données par les équations différentielles de l'équation proposée (12), en y supposant conséquemment, d'après l'opinion de la solution (14) et (15) de notre problème-universel (13), et sans qu'il eût été nécessaire de le dire alors, que ces valeurs des dérivées différentielles que l'on doit tirer de l'équation (12), ne doivent en être tirées qu'après qu'on y aura fait $a=0$, ou généralement $a=m$, c'est-à-dire, après que cette équation (12) sera réduite au premier terme A_0 dans son développement (18).

et l'on sera encore conduit aux différentielles réciproques $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d^2\xi}{dx^2}$, etc., et $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d^2\xi}{dx^2}$, etc. Il importe donc de connaître les lois que suit la formation de ces différentielles réciproques, savoir, la formation . . . (759)

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) &= \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)}, \\ \left(\frac{d^2\xi}{dx^2}\right) &= -\left(\frac{d^2x}{d\xi^2}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3}, \\ \left(\frac{d^3\xi}{dx^3}\right) &= \frac{3 \cdot \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^2x}{d\xi^2}\right) \cdot \left(\frac{d^3x}{d\xi^3}\right)}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^5}, \\ &\text{etc., etc.}\end{aligned}$$

Et ces lois, nous les avons fait connaître, sous les marques (311) et (312), dans la seconde section de la *Philosophie de la Technique* (pages 228 et 229). — Il importera encore, pour la généralité des procédés requis dans la présente application du problème-universel à la résolution des équations, de connaître les lois que suit la formation des différentielles des fonctions F dont la variable x est elle-même fonction d'une autre variable y ; et ces lois, nous les avons également fait connaître, sous les marques (459), (459)', etc., dans cette même deuxième section de la *Philosophie de la Technique* (pages 457 et 458). — Enfin, pour éclaircir complètement la présente méthode secondaire, c'est-à-dire, les procédés que, sous les marques (17) à (23), nous avons fait connaître, dans la *Refutation de Lagrange*, pour appliquer notre problème-universel, cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, à la résolution générale des équations de tous les genres, il ne nous reste qu'à prévenir, pour les équations aux différentielles partielles, que les valeurs des différentielles de tous les ordres qui, d'après ce que nous avons dit plus haut, peuvent être contenues dans les expressions (23 des coefficients Q_0 , Q_1 , Q_2 , Q_3 , etc., et qui ne peuvent être déduites de l'équation proposée (744) elle-même, doivent également et exclusivement être déduites de l'équation réduite (745), c'est-à-dire, de la susdite valeur fondamentale de l'inconnue x ; telle que cette valeur résulte ici, à son tour, de l'intégration théorique et préalable de cette équation réduite (745) aux différentielles partielles, par les susdites méthodes que nous avons fait connaître, sous les marques (108)', (142)', etc., dans la *Critique de la Théorie des fonctions génératrices de Laplace*.

Ainsi, la présente méthode secondaire, c'est-à-dire, le procédé en ques-

tion que, sous les marques (17) à (23), nous avons fait connaître dans la *Refutation de Lagrange*, se trouve maintenant éclairci dans ses moindres détails ; et nous ne doutons pas que les géomètres qui auront approfondi cette grande question de l'application de notre problème-universel à la résolution générale des équations de tous les genres, ne comprennent que, quelle que soit l'équation proposée, soit primitive, immanente ou transcendante, soit dérivée, aux différentielles, totales ou partielles, ils pourront toujours, par ce procédé universel (17) à (23), où se trouve combinée la génération théorique avec la génération technique de l'inconnue x , et qui constitue ainsi une absolue GÉNÉRATION-MIXTE des quantités, parvenir directement, et sans difficulté ultérieure quelconque, à la détermination de cette inconnue par l'expression (22), savoir, par l'expression . . . (760)

$$x = Q_0 + Q_1.(a - \omega) + Q_2.(a - \omega)^2 + Q_3.(a - \omega)^3 + \text{etc.}, \text{ etc. ;}$$

dans laquelle, pour la première détermination de cette inconnue x , il faut faire $\omega = 0$, afin de réduire d'abord l'équation proposée (744) à la forme (745) qui, comme partie essentielle de cette équation proposée (744), pourra, par une génération théorique, être résolue d'une manière finie et donner ainsi la susdite valeur fondamentale de l'inconnue x . On aura donc, pour cette première détermination, l'expression . . . (761)

$$x = Q_0 + Q_1.a + Q_2.a^2 + Q_3.a^3 + \text{etc.}, \text{ etc.}$$

Et vu la susdite combinaison de la génération théorique avec la génération technique, combinaison qui est le CARACTÈRE SPÉCIAL ET DISTINCTIF de la présente détermination de cette inconnue x , on concevra facilement que, lorsqu'il ne s'agit que d'avoir, pour cette inconnue x , des fonctions approchées et propres à la formation des fonctions génératrices (640) ou (729) dans la définitive génération théorique absolue (729), c'est-à-dire, propres à l'élimination de cette inconnue x et de ses différentielles qui peuvent être impliquées dans cette génération théorique (729), et lorsque surtout l'équation réduite (745) qu'on résout préalablement, différerait peu de l'équation proposée (744), on pourrait déjà, dans cette expression (761), donner à la quantité auxiliaire a la valeur $a = 1$, par laquelle l'équation auxiliaire (744) se trouve ramenée à la véritable forme de l'équation proposée ; et l'on aurait ainsi, pour ces fonctions approchées de l'inconnue x en question, l'expression . . . (762)

$$x = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \text{etc.}, \text{ etc. ;}$$

dont les deux ou trois premiers termes seraient suffisants pour ce but de la formation des fonctions génératrices (640) ou de l'élimination de cette inconnue x dans sa génération théorique (729).

Mais, pour arriver rapidement, dans l'expression (762), à la valeur de

l'inconnue x , il faut, à la place du développement ou de la génération purement technique (752) de la fonction d'équation $\Phi(x, a)$, opérer déjà, comme on peut le faire maintenant, la génération ou le développement théorique de cette fonction, par l'application préalable de la méthode primordiale (729) elle-même. En effet, par cette application immédiate de la méthode primordiale (729), les coefficients A_1, A_2, A_3 , etc., dans le développement en question (752), auront, d'après la génération théorique (729)' des termes successifs de ce développement, les valeurs . . . (763)

$$A_1 = \mathfrak{A}_1.P(1)_w, \quad A_2 = \mathfrak{A}_2.P(2)_w, \quad A_3 = \mathfrak{A}_3.P(3)_w,$$

et généralement . . . (763')

$$A_n = \mathfrak{A}_n.P(n)_w,$$

dans lesquelles les quantités $P(1)_w, P(2)_w, P(3)_w$, etc., en vertu de leurs expressions générales (635) et (636), où il faudrait substituer $(a-w)$ à la place de $(x-a)$, contiendraient, dans leurs éléments $R(\omega)_1, R(\omega)_2, R(\omega)_3$, etc., les dérivées différentielles de la fonction d'équation $\Phi(x, a)$, prises par rapport à la quantité a , considérée ici comme variable; et comme tels, ces termes théoriques A_1, A_2, A_3 , etc., dans le développement (752) de la fonction d'équation $\Phi(x, a)$, rendraient alors ce développement aussi convergent qu'on pourrait le désirer, en augmentant à volonté le nombre ω de ces termes théoriques; de sorte que l'application du problème-universel (743, à la solution de cette équation (752) rendue ainsi convergente à volonté, conduirait alors rapidement, dans l'expression finale (762) de cette solution, à la détermination de l'inconnue x par un très-petit nombre des premiers termes Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc. qui forment cette expression finale (762). Et cette détermination plus rapide de l'inconnue x devient ici d'autant plus importante que, par la concision de son expression, résultant ainsi d'un petit nombre des termes Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc., cette expression sera plus apte à l'élimination de cette inconnue x et de ses différentielles dans la génération théorique (729) par laquelle, au moyen de cette méthode primordiale (729), il s'agit ici de résoudre tout à fait théoriquement l'équation proposée (744), c'est-à-dire, l'équation $\Phi(x, a) = 0$, en y faisant $a = 1$; car, il ne faut pas perdre de vue que nous n'appliquons ici, à la solution spéciale (762) de cette même équation $\Phi(x, a) = 0$, notre méthode secondaire, c'est-à-dire, notre problème-universel (743); que pour pouvoir opérer, dans la génération théorique (729) de la nature elle-même de l'inconnue x , les éliminations de cette inconnue et de ses différentielles, ou généralement de celles des quantités qui dépendent de cette inconnue x et qui ne peuvent être déduites immédiatement de l'équation proposée $\Phi(x, 1) = 0$. Aussi, en ayant égard à la série complémentaire (729)'', qui, comme nous l'avons déjà fait remarquer, rend toujours rigoureusement exacte cette génération

théorique (729) des quantités, peut-on provisoirement, pour l'élimination dont nous venons de parler, n'employer qu'un petit nombre des susdits termes Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc. qui forment la solution préalable (762) de la même équation $\Phi(x, 1) = 0$ par notre méthode secondaire (743), pourvu toutefois, et c'est là l'unique limite de l'exactitude dans cette solution préalable (762), que, par une telle détermination approchée des fonctions génératrices (640) dans la solution finale (729), sa série complémentaire (729)" puisse devenir convergente, comme elle le devient toujours et nécessairement lorsque, par une suffisante solution préalable (762), les fonctions génératrices (640), telles qu'elles résultent des susdites éliminations opérées par cette solution (762), ne s'écartent pas trop de leur véritable valeur.

Enfin, pour pouvoir remplir cette condition dans tous les cas, et pour compléter par là cette grande question, nous devons ici signaler plus spécialement l'emploi de la quantité arbitraire ω qui entre dans la fonction génératrice (751) de notre présente détermination générale (760) de l'inconnue x , en faisant remarquer que la quantité ω peut servir, comme un MOYEN D'EXHAUSTION, pour la détermination progressive et toujours infaillible de l'inconnue x dont il est question, en employant cette quantité ω suivant l'esprit de la *Méthode algorithmique d'Exhaustion* que nous avons exposée à la fin de notre *Philosophie de l'Infini*. En effet, quels que soient les coefficients Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc. de la détermination (761) de l'inconnue x , tels qu'ils sont donnés par les expressions (23) de la *Résolution de Lagrange*, on pourra toujours prendre, pour la quantité génératrice a , une quantité ω_1 assez petite pour que cette détermination (761) soit convergente. Et alors, cette expression (761) de l'inconnue x offrira la solution de l'équation proposée (744), lorsqu'au lieu d'y faire $a = 1$, valeur qui ramène cette équation à son état primitif, on y fera d'abord $a = \omega_1$. On obtiendra donc ainsi, en outre de la solution simple de la première équation réduite $\Phi(x, 0) = 0$, la solution plus avancée d'une deuxième équation réduite $\Phi(x, \omega_1) = 0$, qui sera plus proche de l'équation proposée $\Phi(x, 1) = 0$. Et introduisant alors cette quantité ω_1 à la place de la quantité ω dans la détermination générale (760) de l'inconnue cherchée x , on pourra prendre, pour la quantité génératrice a , une deuxième quantité ω_2 , plus grande que la première ω_1 , et telle néanmoins que cette détermination (760) soit convergente. On obtiendra alors, par cette expression (760) de l'inconnue x , la solution d'une troisième équation réduite $\Phi(x, \omega_2) = 0$, qui sera encore plus proche de l'équation proposée $\Phi(x, 1) = 0$. Et procédant toujours de cette manière, pour opérer ainsi progressivement l'exhaustion de la quantité génératrice a dans la détermination générale (760) de l'inconnue x , on parviendra nécessairement à rendre convergente cette détermination (760) avec la quantité génératrice $a = 1$, qui répond à l'équation proposée $\Phi(x, 1) = 0$. —

On pourra donc, dans tous les cas, obtenir ainsi, par ce procédé d'exhaustion, la détermination de l'inconnue x , aussi exacte qu'on le voudra pour la formation des fonctions génératrices (740) ou (729)' propres à rendre convergente la série complémentaire (729)'' dans la génération théorique (729) de cette inconnue x .

D'ailleurs, quel que soit le développement (75a) de la fonction d'équation $\Phi(x, a)$, soit théorique, par les présentes valeurs (763) et (763)' de ses coefficients A_1, A_2, A_3 , etc., soit technique, par les valeurs précédentes (75a)' et (75a)'' de ces mêmes coefficients, il est manifeste que, par la raison que la diminution progressive de la quantité a , dans la fonction génératrice (751) du développement (75a), peut toujours rendre convergent ce développement (75a) de la fonction d'équation $\Phi(x, a)$, la méthode d'exhaustion que nous venons d'indiquer, étant fondée sur cette diminution progressive de la quantité génératrice a , trouvera nécessairement, et par conséquent toujours, son application immédiate à la présente solution (760) de l'équation (744) d'un genre quelconque. Mais, il est également manifeste que, dans le cas où le développement préalable (75a) de la fonction d'équation $\Phi(x, a)$ est opéré par le procédé théorique (763) et (763)', que nous venons d'indiquer en dernier lieu, la solution en question (760) de l'équation proposée (744), quel qu'en soit le genre, sera donnée, tout à la fois, et d'une manière plus rapide, et surtout, ce qui mérite ici une attention spéciale, d'une manière absolue, c'est-à-dire, plus essentiellement théorique. Aussi, pour fixer définitivement la présente application du problème-universel (743) à la résolution des équations de tous les genres, distinguerons-nous la solution (760), qui est fondée sur le développement technique (75a) et (75a)' de la fonction d'équation $\Phi(x, a)$, et qui forme conséquemment une GÉNÉRATION MIXTE, mi-théorique et mi-technique, de l'inconnue x de l'équation proposée (744), et la solution qui sera fondée sur le développement théorique (763) et (763)' de cette même fonction d'équation $\Phi(x, a)$, et qui formera alors une véritable ANTICIPATION-THÉORIQUE sur la génération de cette inconnue x , surtout lorsque, dans le cas où il en sera besoin, elle sera opérée par la méthode d'exhaustion appliquée à l'emploi ou à la fonction de la quantité auxiliaire u , par cette méthode d'exhaustion que nous venons d'indiquer, et qui, d'après ce que nous venons de voir, rend toujours infaillible la solution dont il s'agit. Et afin de mieux distinguer cette anticipation-théorique sur la génération de l'inconnue x , résultant de la combinaison du procédé théorique (763) avec la fonction d'exhaustion de la quantité auxiliaire u , nous marquerons par des parenthèses les coefficients Q_1, Q_2, Q_3 , etc. qui entrent dans la solution générale (760) et qui sont toujours donnés par les expressions (23) de la *Réfutation de Lagrange*; et nous aurons ainsi, pour cette définitive solution absolue, la forme . . . (764)

$$x = (Q_0) + (Q_1).(a-u) + (Q_2).(a-u)^2 + (Q_3).(a-u)^3 + \text{etc.}, \text{ etc.}$$

Telle est donc, d'abord, dans la GÉNÉRATION-MIXTE et déjà suffisante (760), et ensuite, dans la présente ANTICIPATION-THÉORIQUE (764), cette absolue MÉTHODE SECONDAIRE, toujours praticable et éminemment simple, qui résulte de notre problème-universel et que la science reçoit ainsi de notre réforme des mathématiques pour la résolution universelle des équations de tous les genres, telle est, disons-nous, cette deuxième méthode absolue, qui est établie sur la deuxième loi fondamentale des mathématiques et que nous avons fait connaître aux académiciens de Paris, il y a plus de trente ans, sous les ausdites marques (17) à (23), dans la *Refutation de Lagrange*, sans que, durant toutes ces trente années, comme nous l'avons déjà dit, et comme la postérité le redira peut-être, ces illustres savants par brevet aient pu y apercevoir autre chose que des motifs pour injurier grossièrement l'auteur dans leurs journaux politiques (*). Et cependant, ce tout premier résultat de ses travaux mathématiques, tel qu'il fut produit immédiatement après qu'il eut dévoilé les vrais principes de la science dans sa *Philosophie des Mathématiques*, ce tout pre-

(*) A cette occasion, M. Arago nous grandira peut-être de nouveau, en nous reprochant de « forger », comme il le dit, le mot de *savant par brevet*, parce que le mot d'*académicien* suffit déjà pour s'entendre. Sans doute, ces deux mots signifient la même chose; mais il y a une petite nuance qui les distingue, et c'est cette nuance qu'il s'agit ici de fixer. En effet, par le mot d'*académicien scientifique* on entend bien un savant par brevet, mais on suppose qu'il connaît la science; tandis que par le mot de *savant par brevet*, tout en désignant un académicien scientifique, on suppose qu'il peut ne pas savoir la science. Et cette distinction est assez essentielle pour mériter une désignation distincte. — Nous pourrions en alléguer de nombreux exemples; mais, nous nous bornerons à en citer un ou deux qui ne pourront pas blesser les personnes que nous nommons. — Ainsi, Napoléon, comme membre de l'Institut, était bien un académicien scientifique; mais, en cette qualité, il était purement un *savant par brevet*; car, quoique très-instruit, Napoléon n'était pas réellement un savant, et il pouvait se passer de cette haute attribution par son éminente position sociale. De même, M. le baron Charles Dupin, qui est membre de l'Académie des sciences de Paris, et même président de cette Académie, ne cultive pas notoirement les hautes sciences mathématiques, pour lesquelles il y est agréé; et alors, comme Napoléon, il n'est aussi qu'un *savant par brevet*, et il peut également, en sa qualité de pair de France, etc., se passer de la science dans son éminente position sociale. — Comme nous venons de le dire, nous pourrions alléguer un grand nombre d'autres exemples; mais, lorsque l'auteur de la science ne se trouverait pas compensé par quelque haute position sociale, ces exemples deviendraient blessants; et Dieu nous garde d'imiter ainsi les procédés des illustres académiciens de Paris. — Pour le prouver, nous nommons l'illustre M. Pouillet, qui n'a pas une éminente position sociale, mais dont la science et surtout les grandes et insondables découvertes sont connues universellement. Bien plus, d'après ce que nous ont dit plusieurs personnes, ce grand savant, en sa qualité de physicien, a révisé notre méthode supérieure que, sous les ausdites marques (115), (113), etc., nous avons d'abord présentée comme loi fondamentale pour toutes les hautes recherches mathématiques de la physique. Eh bien, si cet illustre académicien, M. Pouillet, n'était pas réellement un si grand savant, nous ne pourrions pas, sans le blesser, prendre un exemple sur lui pour légitimer le mot de *savant par brevet*, parce que sa position sociale, quelque honorable qu'elle soit sans doute, ne nous offrirait pas ici une compensation suffisante.

mier résultat, disons-nous, qui, dès l'abord, fut réalisé par la GÉNÉRATION-VIÈME (32) dans sa *Réfutation de Lagrange*, et qui se complète maintenant par la présente ANTICIPATION-THÉORIQUE (764), dépasse infiniment, ce nous semble, non-seulement tout ce que la science avait pour la résolution universelle des équations de tous les genres, notamment le théorème de Taylor, mais même tout ce qu'elle pouvait espérer d'obtenir à la suite des siècles, puisque, comme on le voit actuellement, ce premier résultat dépendait de la découverte du problème-universel, de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, qui, elle-même, dérivait de la première de ces lois fondamentales, de la loi suprême des mathématiques, de ces lois absolues auxquelles la science, privée de tout principe philosophique, était loin, très-loin de s'attendre, surtout lorsque, par l'introduction de la prééodue philosophie du dix-huitième siècle, on venait de plonger la science dans de profondes ténèbres. — Mais, notre présente réforme des mathématiques ne s'arrêtera pas même à ce premier résultat (760) et (764), quelque immense qu'il soit déjà à côté de tout ce que l'on avait à cette époque. Nous allons, en effet, donner maintenant, en outre de cette résolution universelle des équations par la simple anticipation-théorique (764) sur la génération de leurs inconnues, cette même résolution universelle des équations de tous les genres par la génération théorique elle-même de ces quantités inconnues, telle qu'à peine cette résolution aurait pu former un idéal saisissable par la science, et telle que notre fondamentale méthode suprême (142), (143), etc. peut la donner réellement.

. Bien plus, cette définitive résolution théorique de tous les genres d'équations se trouve déjà donnée provisoirement, en toute réalité et de la manière la plus positive, par la réalisation actuelle (729) de la méthode suprême, en y joignant son accomplissement par la méthode secondaire, c'est-à-dire, l'accomplissement de ses procédés par la présente application du problème-universel (743) à (764). En effet, comme nous l'avons vu plus haut, tout ce qui était nécessaire à cette primitive méthode suprême (729), pour son application universelle à la solution de tous les problèmes, c'était, du moins pour la prompte pratique, l'élimination, dans ses fonctions génératrices (640) ou (729)', des quantités dont cette méthode devait opérer la génération théorique; et comme nous venons de l'apprendre, l'application présente du problème-universel (743) à la résolution préalable (760) ou (764) des équations de tous les genres, par laquelle nous obtenons, avec telle exactitude qu'on peut le désirer, les quantités nécessaires à cette élimination, nous donne les moyens d'opérer, dans les fonctions génératrices (640) ou (729)' de la méthode primordiale (729) dont il s'agit, ce final accomplissement par lequel elle devient propre à la résolution immédiate de tous les problèmes.

Aussi pouvons-nous réellement nous dispenser ici d'en dire davantage, d'autant plus que, dans la cinquième des ouvrages présents, nous devons, comme nous l'avons dit plus haut et annoncé déjà dans le précédent Programme pour cette suite d'ouvrages, traiter en détail de l'application du problème-universel (743) à cette résolution universelle des équations de tous les genres, comme préparation à leur résolution définitive par la méthode primordiale (729), c'est-à-dire, par notre provisoire méthode suprême. D'ailleurs, nous pensons avoir donné, pour cette double et progressive résolution des équations de tous les genres, d'abord, par la méthode secondaire (760) ou (764), et ensuite, par cette provisoire méthode suprême (729), des indications parfaitement suffisantes pour que les géomètres puissent, dès aujourd'hui, s'en servir dans tous les cas, en observant que ce qui peut manquer à ces indications générales, ne consiste qu'en ce qui, dans l'état actuel de la science, est déjà connu et peut alors être suppléé facilement. Ainsi, par exemple, nous n'avons pas prescrit expressément que, pour appliquer la méthode primordiale (729) à l'intégration générale des équations aux différentielles partielles, quel que soit le nombre des variables indépendantes ξ , ν , ζ , etc., il faut, par l'application directe de cette méthode (729), déterminer séparément l'inconnue x par son intégration distincte par rapport à chacune de ces variables indépendantes ξ , ν , ζ , etc., en considérant provisoirement les autres de ces variables comme des quantités constantes, pour réunir ensuite, dans une valeur moyenne, ces intégrales séparées, nous ne l'avons pas prescrit expressément, disons-nous, parce que nous savons que les géomètres qui auront approfondi cette provisoire méthode suprême (729), telle que nous venons de la démontrer en la déduisant de notre péremptoire méthode suprême (142), (143), etc., comprendront par eux-mêmes et très-facilement que c'est ainsi que cette méthode spéciale (729) doit être appliquée à l'intégration générale des équations aux différentielles partielles, en se servant, avec toutes ses constantes arbitraires, de l'intégration provisoire (760) ou (764) de ces équations par le problème-universel (743), afin de pouvoir, dans chacune de ces déterminations séparées de l'inconnue x , éliminer les différentielles partielles qui y seront impliquées et qui ne pourront être éliminées par les équations différentielles prises sur l'équation proposée. Nous n'avons pas non plus, et par la même raison, prévenu expressément que, dans l'application de cette méthode primordiale (729) à la résolution des équations primitives immanentes, c'est-à-dire, des équations algébriques ordinaires, il faut considérer comme variable indépendante dont l'inconnue serait fonction, la saidite quantité auxiliaire a que l'on doit introduire dans ces équations ordinaires pour les réduire, par la valeur de $a \equiv 0$, à la forme des équations réciproques, ou à la forme de toutes autres équations susceptibles de solution immédiate, et que la constante Fa , dans la génération théorique (729) de

l'inconnue de ces équations, ne sera pas ici une constante arbitraire, mais bien, pour cette valeur de $a = 0$, tout à tout, une des racines des équations réciproques, ou autres, auxquelles on aura ainsi réduit ces équations immanentes ou algébriques, en observant en outre que c'est là, du moins par une anticipation provisoire, la méthode *héristique* pour la résolution de cette sorte d'équations, telle que nous l'avons annoncée dans le Programme. Il en est de même de tous les autres procédés accessoires que nous n'avons pas indiqués expressément et que nous savons que les géomètres qui connaissent la science, peut-être même les illustres académiciens de Paris, sauront suppléer facilement par eux-mêmes. — Toutefois, nous prenons ici l'engagement formel de donner, à tous les géomètres qui nous les demanderont, avant la publication du sixième des ouvrages présents, les indications qui pourraient leur paraître nécessaires pour compléter celles que nous venons de donner; et cela, pour tout problème ou pour toute équation quelconque qu'ils voudront résoudre, en leur indiquant en détail tous les procédés que, dans l'application de nos présentes méthodes universelles (729) et (764), il faut employer pour donner la solution de ces questions, tout comme nous venons d'indiquer les procédés qu'il faut suivre pour accomplir l'intégration de l'équation différentielle du troisième ordre (746) que nous avons prise pour exemple dans nos présentes indications générales de ces procédés.

Enfin, pour ce qui concerne la méthode suprême elle-même, il est sans doute superflu, pour ceux des géomètres qui voudront approfondir la science dans nos ouvrages, de leur faire remarquer que la présente réalisation (729) de la méthode suprême ne forme proprement qu'une *détermination spéciale* de notre fondamentale méthode suprême, de celle que, dans la première section de la *Philosophie de la Technique*, sous les marques déjà connues et citées souvent (142), (143), etc., nous avons déduite de la loi suprême des mathématiques, et nommément qu'elle forme, par une anticipation technique sur la méthode fondamentale, cette *détermination spéciale* qui s'applique exclusivement à la solution de tous les problèmes qui contiennent ou peuvent contenir, comme éléments des quantités cherchées, les *différentielles*, c'est-à-dire, les *différences* indéfiniment petites de ces quantités; tandis que la méthode fondamentale (142), (143), etc. s'applique généralement aux problèmes qui contiennent ou peuvent contenir, comme éléments des quantités cherchées, soit les *différences finies* de ces quantités, soit leurs *différentielles* ou *différences* indéfiniment petites, par la simple supposition que l'accroissement ξ qui entre dans les expressions de cette méthode fondamentale, forme, à volonté, une quantité finie ou une quantité indéfiniment petite. Toutefois, la méthode spéciale (729) que nous venons de déduire de notre fondamentale méthode suprême, quoiqu'elle soit ainsi restreinte aux seuls problèmes qui contiennent ou peuvent contenir des différentielles, n'en est pas moins d'un

usage immense, parce que, comme cela est notoire, presque tous les problèmes du monde physique dépendent d'éléments différentiels. Sans doute, la méthode fondamentale (142), (143), etc., lorsqu'on y suppose l'accroissement ξ indéfiniment petit, s'applique nécessairement aussi à tous ces problèmes qui impliquent des éléments différentiels; et ces problèmes doivent même recevoir finalement leur solution par une telle application immédiate de cette fondamentale méthode suprême, comme nous allons le voir. Mais, pour la pratique, la présente méthode spéciale (729) offre des procédés, sinon précisément plus expéditifs, du moins, dans leur usage, plus à la portée de la généralité des savants et surtout des écoles où l'on pourrât désormais l'enseigner facilement.

Quoi qu'il en soit de cet avantage pratique ou du moins classique de la présente réalisation provisoire (729) de la méthode suprême, il est manifeste que, pour la rigueur théorique et pour l'accomplissement final de la science, la fondamentale méthode suprême elle-même (142), (143), etc., telle que nous l'avons dévoilée il y a trente ans, peut et doit seule, comme réalisation immédiate de la loi suprême, couronner les mathématiques. Et à l'heure qu'il est, ce fait de la science se trouve atteint définitivement. En effet, ce qui manquait encore à l'application immédiate de cette fondamentale méthode suprême, c'est, pour la découverte des fonctions génératrices Ω , Ω_1 , Ω_2 , etc., l'intégration des équations (143)', (144)', (145)', etc., aux différences ou aux différentielles, suivant que les problèmes qu'il s'agit de résoudre, impliquent, comme éléments, ces différences ou ces différentielles des quantités cherchées. Et c'est cette intégration définitive que nous venons d'opérer par notre présente méthode secondaire, consistant dans l'application du problème-universel (743) à la résolution (760) et (764) des équations de tous les genres (744); car, sans que nous ayons eu besoin de le dire jusqu'à présent, cette intégration universelle s'étend nécessairement aussi aux équations aux différences, pourvu que l'on ait également des moyens pour intégrer les équations réduites (745) qui seront alors des équations aux différences, totales ou partielles, suivant que les équations proposées le seroient elles-mêmes. Et ces moyens, comme nous l'avons déjà dit ailleurs, nous les avons donnés dans la *Critique de Laplace*, où ils forment même les principes de l'intégration des équations différentielles, totales et partielles, dont nous venons de faire usage dans cette même application (760) et (764) du problème-universel (743) que nous étendons ici à l'application définitive de notre fondamentale méthode suprême elle-même. En effet, dans cette *Critique de Laplace*, nous avons donné, sous les marques progressives (87), (91), (103), (119), (120), (130), (138), etc., les moyens complets pour l'intégration des équations linéaires aux différences, totales ou partielles, à une, à deux, et à un nombre quelconque des variables indépendantes, de ces équations linéaires à la forme desquelles, par

l'introduction de la susdite quantité arbitraire a , doivent être amenées les équations réduites (745), qui, dans l'application en question du problème-universel (743) à la résolution ou à l'intégration des équations quelconques (744) aux différences, ont seules besoin d'être intégrées théoriquement et d'une manière finie.

Ainsi, par la présente résolution universelle (760) et (764) des équations de tous les genres (744), à l'aide de notre problème-universel (743), c'est-à-dire, à l'aide de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, l'application définitive et universelle de la grande méthode suprême (142), (143), etc., de cette immédiate réalisation de la première loi fondamentale des mathématiques, se trouve maintenant rendue praticable, et même éminemment simple, pour la résolution de tous les problèmes de cette science, quelque élevés et compliqués qu'ils puissent être. Il suffit pour cela de remarquer que les équations de condition (143)', (144)', (145)', etc. par lesquelles on découvre successivement les fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., équations qui, dans l'application astronomique dans laquelle nous les avons présentées d'abord, ne forment que des équations différentielles, sont proprement, dans leur signification générale, dérivant de la loi suprême (142), des équations aux différences qui correspondent à un accroissement quelconque ξ , fini ou indéfiniment petit. Et l'on conçoit facilement qu'en appliquant, d'une manière immédiate, à l'intégration de ces équations de condition (143)', (144)', (145)', etc., aux différences ou aux différentielles, notre présente méthode secondaire (760) ou (764), on parviendra sur-le-champ à la découverte des progressives fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc.; et l'on obtiendra ainsi immédiatement la génération théorique de toute quantité problématique par la méthode suprême (142), (143), etc. elle-même, en y joignant, comme nous venons de le dire, la solution préalable des équations proposées (744) par la même méthode secondaire (760) ou (764), lorsqu'il en est besoin pour l'élimination de l'inconnue et de ses différences ou différentielles dans cette génération théorique et fondamentale (142), (143), etc.

Bien plus, lorsque dans cet emploi final de la méthode secondaire (743) à (764), soit pour l'intégration des équations de condition (143)', (144)', (145)', etc., donnant les fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., soit pour la solution préalable des équations proposées (744), donnant les quantités nécessaires à la susdite élimination, on ne se sert que de l'anticipation-transcendant (764) sur la génération de ces quantités en question, en rejetant ainsi la génération-mixte (760) de ces mêmes quantités, la méthode suprême (142), (143), etc., donnera alors immédiatement la génération purement rationnelle de toutes les quantités problématiques, c'est-à-dire, la génération progressive ou la construction de la nature elle-même de ces quantités, quelle que puisse être leur nature problématique. Et si l'on considère que cette

progressive et purement théorique génération des quantités, à laquelle, par l'anticipation-théorique (764), conduit alors la méthode suprême (142), (143), etc., est, d'après la loi suprême elle-même (137) des mathématiques, le caractère fondamental et par conséquent essentiel de la génération de toutes les fonctions problématisques, on reconnaîtra en même temps que la solution que cette méthode suprême donnera ainsi de tous les problèmes, sera, non-seulement leur solution universelle, mais de plus leur SOLUTION ABSOLUE.

Mais, pour bien comprendre ce haut et décisif caractère de la méthode suprême, il faut comprendre l'indépendance absolue dans laquelle elle se trouve par rapport à toute autre méthode, pour la solution de tous les problèmes de la science. Et pour cela, il suffit de ne pas perdre de vue que le problème-universel, qui lui sert de méthode secondaire, dérive immédiatement de la loi suprême elle-même et que, en sa qualité de deuxième loi fondamentale des mathématiques, il n'est proprement qu'une immédiate partie constitutive de cette loi suprême, comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois en rappelant que, sous les marques (51) et (53) dans la première section de la Philosophie de la Technique, nous avons déduit ce problème-universel de la loi suprême (50). En effet, on comprendra alors facilement que, dans le cas où, pour l'application de la méthode secondaire, fondée sur le problème-universel (743), on rejette la génération-mixte (760), qui implique la génération technique dans le développement (752) de la fonction d'équation $\Phi(x, a)$, rien de technique ou d'étranger à la pure génération théorique des quantités, c'est-à-dire, à la construction de leur nature elle-même, n'entrera plus dans cette application de la méthode secondaire (743) à (764), parce que l'anticipation-théorique (764) dont on se servira alors, n'offre, surtout par son procédé d'exhaustion, rien autre que la réalisation immédiate de la solution du problème-universel, par l'intervention (763) de la méthode primordiale (739) qui, à son tour, constitue une réalisation provisoire de la méthode suprême. — Quant aux procédés qui, soit pour l'intégration des équations de condition (143)', (144)', (145)', etc., soit pour l'intégration préalable des équations réduites (745), lorsqu'elles sont aux différences ou aux différentielles, quant à ces procédés, disons-nous, qui entrent dans la méthode secondaire (743) à (764), et qui, comme nous le savons maintenant, sont donnés sous les susdites marques (87), (91), (93), (103), (119), (120), (130), (138), etc. de notre *Critique de la Théorie des fonctions génératrices de Laplace*, nous les avons déduits immédiatement du principe d'identité $A = A$, comme on le voit clairement dans l'ouvrage même que nous citons; et c'est aussi de ce seul principe d'identité $A = A$ que nous avons déduit toute la loi suprême des mathématiques, comme nous l'avons dit expressément au commencement de la seconde section de la *Philosophie de la Technique* (page 16), en examinant la nature de la démonstration de cette loi fondamentale; de sorte qu'é-

manant du même principe d'identité $A = A$, les procédés d'intégration dont il s'agit, comme faisant partie de la méthode secondaire pour l'accomplissement de la méthode suprême, rentrent dans la nature même de la loi suprême (137) des mathématiques, et ne forment pas conséquemment une méthode distincte de cette loi universelle.

Ainsi, l'indépendance absolue de la méthode suprême, dans laquelle elle se trouve par rapport à toute méthode différente de la méthode secondaire, qui, comme réalisation de la deuxième loi fondamentale, dérive immédiatement de la loi suprême, de cette première et archi-absolue loi des mathématiques, se trouve constatée irréfragablement. Et par conséquent, cette méthode suprême suffit à elle seule pour la solution de tous les problèmes des mathématiques, à l'exception seulement des susdits problèmes de la Théorie des Nombres qui, par leur exceptionnel caractère de finalité, sont, comme dans toutes les sciences, régis par une loi spéciale, nommément par la loi téléologique de chaque système de réalités. — Or, c'est cette indépendance de la méthode suprême par rapport à toute méthode, différente de son essence elle-même, qui, en la rendant ainsi propre à la solution immédiate de tous les problèmes par elle-même, constitue proprement la *COLORIS* des MATHÉMATIQUES.

On conçoit, en effet, pour peu que l'on ait approfondi la philosophie de la science, qui est enfin dévoilée aux géomètres, que, pour toute quantité problématique, quelque profonde et cachée qu'elle puisse être, pourvu qu'elle soit réelle, il existe nécessairement une GÉNÉRATION THÉORIQUE, finie ou indéfinie, c'est-à-dire, une construction de la NATURE elle-même de cette quantité, sur laquelle puisse se fonder sa GÉNÉRATION TECHNIQUE, c'est-à-dire, la MESURE de cette quantité par sa comparaison avec quelque autre quantité, parce que, sans cela, cette mesure, n'ayant pas d'objet, serait impossible. Ainsi, par exemple, la génération technique qui fait partie de la GÉNÉRATION-MIXTE (76n) des quantités, telle qu'elle résulte de l'application de la méthode secondaire (743) à (760), fondée sur le problème-universel, sur cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, suppose nécessairement une GÉNÉRATION THÉORIQUE de ces mêmes quantités, c'est-à-dire, une construction de leur nature elle-même, telle que nous la découvrons finalement dans l'ANTICIPATION THÉORIQUE (764) sur la génération de ces mêmes quantités. Et cette problématique, mais indispensable, génération théorique ou construction fondamentale de la nature des quantités doit être régie immédiatement par la loi suprême des mathématiques, qui, comme suprême, doit nécessairement impliquer et rendre possible toutes les générations des quantités, techniques et surtout théoriques. C'est même là le véritable critérium de cette loi suprême, parce que, si elle ne pouvait opérer la génération théorique ou la construction de la nature de toutes les quantités, il y aurait besoin, pour le faire, d'une

loi supérieure, par la raison que nous venons de reconnaître, consistant en ce que cette génération théorique ou construction de la nature des quantités est nécessaire comme base de leur existence sous toute autre forme de leurs relations ou manifestations. Et ainsi, il faut bien qu'il existe également un principe, une loi qui préside à cette génération ou construction fondamentale des quantités.

Or, notre loi suprême (137) des mathématiques répond complètement à ce difficile mais décisif critérium. En effet, la méthode suprême (142), (143), etc., qui, comme nous l'avons déjà dit, et comme on le voit par sa déduction, dérive immédiatement de cette loi suprême (137), suffit à elle seule, indépendamment de toute méthode étrangère, à la résolution de tous les problèmes, comme nous venons de le prouver en montrant que, pour conduire à cette solution universelle de tous les problèmes, elle n'a besoin d'autre concours que de celui de la méthode secondaire (743) à (764), qui, dans son résultat principal, constituant l'anticipation-théorique (764) sur la génération des quantités, n'est proprement qu'un corollaire de la loi suprême (137), ainsi que nous l'avons montré également dans la déduction (51) et (53) que nous en avons donnée dans la première section de la Philosophie de la Technie. — En un mot, la solution de tous les problèmes des mathématiques se trouve donnée effectivement et immédiatement par la simple réunion de nos deux premières lois fondamentales, de la loi suprême et du problème-universel, dont la seconde n'est même qu'un corollaire de la première, eu ne perdant pas de vue que de tous ces problèmes des mathématiques, nous n'exceptons que les susdits problèmes singuliers de la Théorie des Nombres, dont la solution se trouve donnée, à son tour, par notre troisième loi fondamentale, par la loi téléologique.

Nous pouvons donc, quelque inattendu et incroyable que cela paraisse, conclure ici, en toute réalité, et sans la moindre exagération, que la science est enfin accomplie entièrement. — On le verra mieux encore dans la troisième partie de cet ouvrage, lorsque, en outre de notre présente distinction philosophique de la *technia* et de la *technia* dans chaque science, nous y aurons établi, pour la science du géomètre, cette même et si décisive distinction par une déduction purement mathématique. C'est en effet de cette haute distinction des réalités dans chaque système scientifique que dépend exclusivement la solution des grands problèmes dans chaque science; et c'est précisément cette décisive distinction qui, jusqu'à ce jour, demeure inconnue des géomètres et qui, par conséquent, cause, par son absence, non-seulement cet invincible arrêt actuel de la science à ses premiers et plus grossiers problèmes, par lequel tout progrès ultérieur est maintenant rendu impossible, mais de plus cette profonde ignorance dans les idées que les géomètres se font des principes philosophiques de leur science.

Les résultats principaux auxquels nous conduira ainsi, dans la troisième partie de cette réforme, notre fondamentale distinction de la théorie et de la technique des mathématiques, ce sont, d'abord, quant aux principes, la génération théorique, progressive et indéfinie, de la nature elle-même des quantités, comme caractère général et essentiel de la détermination de leur nature, caractère dont la modification très-particulière et extrêmement rare forme cette génération finie de la nature des quantités, qui seule est connue jusqu'à ce jour, et ensuite, quant aux conséquences, le caractère spécial des principales solutions théoriques qui s'opèrent par de telles générations progressives et indéfinies, mais qui, dans quelques cas particuliers, s'arrêtent à des générations finies. Et nous donnerons ainsi, pour exemple de ce caractère spécial de la génération théorique des quantités, par anticipation sur le cinquième des ouvrages présents, la fameuse solution générale des équations algébriques de tous les degrés, par la simple et immédiate application de notre problème-universel, de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, où se trouveront enfin dévoilées les conditions de cette difficile résolution, ces conditions secrètes dont nos contemporains se résignent à attendre la découverte par les géomètres des siècles à venir.

Malheureusement, ces hautes recherches, qui, en mathématiques, doivent finalement réaliser le dernier idéal de la raison de l'homme, et qui ne se sont même pas encore révélées aux savants comme simples problèmes, dépassent nécessairement de beaucoup les besoins actuels de la science. Aussi, nous formerons-nous déjà une très-grande idée des géomètres, nos contemporains, si, pour ouvrir au moins cette nouvelle période historique des mathématiques, ils parviennent à comprendre qu'il faut maintenant remplacer le théorème de Taylor, cet unique et si précaire instrument universel des mathématiques modernes, par la présente méthode primordiale (729), par cette provisoire réalisation de la méthode suprême (142), (143), etc., telle qu'elle résulte immédiatement de notre première loi fondamentale, en combinant toutefois cette méthode primordiale (729), pour la résolution des équations de tous les genres, avec la méthode secondaire (760) et (764), qui résulte de notre problème-universel (743), de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques. — Quant aux problèmes exceptionnels de la Théorie des Nombres, nous laissons aux géomètres, nos contemporains, s'ils veulent absolument se le procurer, le plaisir de s'amuser encore longtemps en cherchant, pour la solution générale de ces problèmes singuliers, une loi différente de notre loi téléologique, de cette troisième et dernière loi fondamentale des mathématiques.

Enfin, pour faire également quelque chose d'agréable aux illustres académiciens de Paris, nous leur laissons, comme ils paraissent le désirer, leur haute et noble faculté privilégiée de détruire, dans ce monde, les trois lois absolues que nous donnons aux mathématiques, comme leur base éternelle, et sur

lesquelles, en les découvrant, nous fondons, ainsi qu'on vient de le voir, non-seulement la présente réforme de cette première des sciences, mais de plus la présente solution définitive de tous ses grands problèmes. Ce n'est en effet que par la destruction de ces déciaives lois que, pour conserver leur honneur, les illustres académiciens de Paris pourront légitimer, sinon leurs grossières injures, du moins les motifs d'avoir causé en France la destruction de tous les ouvrages mathématiques dans lesquels nous avons dévoté au moule ces grandes lois, ces bases universelles du savoir humain.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.

TROISIÈME PARTIE.

MANIFESTE HISTORIQUE

CONCERNANT

LA RÉFORME DES MATHÉMATIQUES,

COMME TRANSMISSION

A LA RÉFORME DE LA PHILOSOPHIE,

SUIVI DE L'EXPOSITION

DES GRAVES ERREURS MATHÉMATIQUES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE PARIS.

D'après la dédicace qui est à la tête de cet ouvrage, la présente troisième partie de la réforme des mathématiques appartient à la voie négative sur laquelle, pour atteindre l'esprit de nos contemporains, nous devons annoncer la réalisation de la philosophie absolue, consistant le MESSIANISME. Et comme telle, cette troisième partie de la réforme des mathématiques sera produite incessamment dans les *Bulletins messianiques* qui, suivant ce qui est annoncé dans la susdite dédicace, paraîtront immédiatement après l'ouvrage présent, peut-être dans une série périodique, autant que l'âge de l'auteur le rendra possible.

Comme nous l'avons dit dans la deuxième partie de cette réforme des mathématiques, la troisième partie dont il s'agit ici, doit compléter, par une déduction purement mathématique, la décisive distinction de la *THÉORIE* et de la *PRAXIS* dans cette première des sciences, dont la présente réforme doit servir de prototype à la réforme générale de toutes les sciences et même de la philosophie. Et comme nous l'avons dit également, nous y présenterons

lors, par anticipation sur les autres ouvrages qui sont annoncés dans le précédent Programme scientifique, les principales résolutions des équations auxquelles la science est arrêtée aujourd'hui, sans que même, dans l'actuelle absence absolue de tout principe philosophique, les géomètres puissent prévoir aucun avenir ultérieur pour leur science. Ainsi, entre autres, par anticipation sur le troisième des présents ouvrages scientifiques, nous y donnerons, pour servir d'exemple, la résolution téléologique de l'équation du cinquième degré par l'application de nos fonctions éléphantiques; et par anticipation sur le cinquième de ces ouvrages scientifiques, nous y donnerons, d'abord, par l'application immédiate de votre problème-universel, la résolution générale des équations algébriques de tous les degrés, en découvrant ces conditions secrètes qui, jusqu'à ce jour, l'ont rendue impossible, et ensuite, nous y donnerons, par l'application de la méthode suprême, pour servir d'exemple à l'intégration générale des équations, l'intégration théorique de l'équation aux différentielles partielles qui forme le problème-universel de la vraie théorie mathématique de la terre, c'est-à-dire, de l'équation que nous avons déjà citée dans notre précédent Programme scientifique, et qui, d'après cette citation, se trouve donnée, sous la marque (LVI), dans les *Prologomènes du Messianisme*.

Quant aux graves erreurs mathématiques que nous devons signaler dans cette troisième partie de la réforme des mathématiques, ce sont principalement, d'après ce que nous avons annoncé dans la dédicace: 1° la fausse théorie mathématique des marées, donnée par Laplace et adoptée par l'Académie des sciences de Paris, pour servir de base aux calculs annuels des marées dans les éphémérides du Bureau des Longitudes de France; 2° la fausse théorie mathématique de la terre, complétée par Laplace, d'après le faux théorème de Clairaut, et adoptée également par l'Académie des sciences de Paris, pour servir de base au nouveau système métrique de la France; 3° la fausse notion mathématique sur la moderne locomotion spontanée, où le char se donne lui-même son impulsion par sa propre force motrice, notion fautive par laquelle l'un des secrétaires perpétuels de cette savante Académie, M. Arago, a entraîné le ministère des travaux publics à revenir ou du moins à essayer de revenir à l'ancienne locomotion inerte, à celle où le char reçoit son impulsion par une force motrice extérieure, comme cela a lieu dans les chemins de fer surnommés atmosphériques; etc., etc.

FIN DE LA PREMIÈRE DIVISION.

COMPLÈMENT
HISTORIQUE ET DIDACTIQUE
DE LA RÉFORME DES MATHÉMATIQUES ,
DANS LEURS PARTIES
PURES ET APPLIQUÉES.

Nota. — Ce Complément doit être placé à la suite de la 49^{me} feuille de cette Réforme des Mathématiques, c'est-à-dire, à la fin de la première division de cet ouvrage.

(1)

AVIS.

De crainte que nous ne puissions produire la seconde division (le tome II) de cette Réforme du Savoir humain, en même temps que la présente première division (le tome I) de cet ouvrage, nous ajoutons ici, sous le nom de Complément, ce que, pour compléter la Réforme des Mathématiques, nous devions dire dans le Supplément de la seconde division de cet ouvrage. Et, pour mieux indiquer le sens philosophique de ce Complément de la Réforme des Mathématiques, nous nous placerons à un point de vue plus élevé, à celui du développement de ces sciences, correspondant au développement général du savoir humain, c'est-à-dire, au point de vue de la Philosophie de l'Histoire des Mathématiques, surtout pour fixer, avec précision, la démarcation entre l'état actuel de ces sciences et leur avenir, tel qu'il est signalé, et tel qu'il s'établit effectivement par la présente Réforme des Mathématiques. — Nous y joindrons, autant que nous le permettra l'espace, des accomplissements indispensables pour la solution des trois grands problèmes du monde physique, de cette solution que, par anticipation sur nos ouvrages ultérieurs, nous avons donnée dans les *Prolegomènes du Messianisme*, et qui forme notoirement la partie principale des Mathématiques appliquées.

En l'imprimant séparément, on a dû donner à ce Complément une pagination différente; mais cela ne doit pas empêcher de le placer à la fin de la troisième partie de cette première division de l'ouvrage présent.

COMPLÈMENT

DE LA

RÉFORME DES MATHÉMATIQUES.

Aujourd'hui que la philosophie de l'histoire se trouve déjà déduite et établie suffisamment dans nos ouvrages philosophiques, notamment dans la *Metapolitique messianique*, où nous avons présenté, d'après la loi de création, l'architectonique ou le tableau génétique de cette philosophie de l'histoire, tableau qui, d'ailleurs, a été publié séparément, et dans les *Prolegomènes du Messianisme*, où nous avons reproduit un extrait de cette absolue philosophie de l'histoire, on pourra, par la comparaison des périodes historiques, et surtout du sens rationnel du développement progressif qui s'y est opéré dans le savoir humain, on pourra, disons-nous, comprendre mieux l'aperçu que, déjà dans le *Prodrome du Messianisme*, nous avons donné des points principaux de l'Histoire philosophique des Mathématiques. Ainsi, on concevra facilement que, dans la première de ces absolues périodes historiques, dans laquelle prédominait encore la faculté du SENTIMENT, telle que cette période s'est développée chez les peuples de l'Orient, et plus spécialement, à notre connaissance, chez les Égyptiens, les idées mathématiques étaient purement CONCRÈTES (conçues *in concreto*), en se trouvant encore corporifiées en quelque sorte avec les objets matériels, dont il importait déjà de connaître la mesure ou toute autre détermination de quantité. On concevra de même que, dans la deuxième de ces périodes historiques, dans laquelle, à côté du développement de la RAISON PRATIQUE de l'homme, devait se développer nécessairement la faculté de la CONCEPTION, en devenant alors prédominante sur la faculté du sentiment, telle que cette deuxième période s'établit chez les Grecs et chez les Romains, les idées mathématiques durent devenir ABSTRAITES (conçues *in abstracto*), en se produisant alors dans la cognition elle-même de l'homme, indépendamment de leur application aux objets matériels, et même antérieurement à toute application pareille. Mais, on conçoit en même temps que, dans ces premières abstractions intellectuelles, les idées mathématiques devaient être purement PARTI-

(1).

COLLÈGES, comme l'étaient alors toutes les spéculations philosophiques, en portant encore principalement sur l'ÊTRE, sur ce premier élément concevable de la réalité. Seulement, dans la troisième période historique, lorsque, par l'influence du SENSIBILISME RELIGIEUX, dans le christianisme, et même dans l'islamisme, les spéculations philosophiques commençaient à pressentir le SAVOIR, ce deuxième élément de la réalité, comme le fixèrent finalement les réalistes dans la philosophie scholastique, les idées mathématiques durent devenir GÉNÉRALES, surtout par la création de l'algèbre. Enfin, dans la quatrième de ces absolues périodes historiques, dans laquelle se développa la RAISON SPÉCULATIVE de l'homme, et avec elle la conscience de sa faculté créatrice, les idées mathématiques, qui jusqu'alors étaient purement INDIVIDUELLES, en ne portant encore que sur les objets créés, c'est-à-dire, sur ce qui est donné dans ce monde, devinrent UNIVERSELLES, en se constituant en quelque sorte créatrices des quantités par des procédés universels. Ce fut alors qu'à côté de la THÉORIE mathématique, qui avait dominé exclusivement jusqu'à cette époque, en ne scrutant que les lois des objets donnés ou créés, vint s'établir la TECHNIQUE mathématique, qui, par suite de la découverte du calcul différentiel, en formant des méthodes universelles, nommément le théorème de Taylor, complétait la théorie en créant les quantités problématiques qui n'étaient pas données immédiatement dans le monde. — Mais cette création des quantités problématiques, telle qu'elle eut lieu jusqu'à nos jours, était purement RELATIVE, en ne servant qu'à déterminer ces quantités inconnues par leur COMPARAISON à des quantités données, et en n'opérant ainsi que l'évaluation ou la mesure de ces quantités problématiques. Il restait donc à rendre ABSOLUE cette création technique des quantités problématiques, en fixant, par leurs propres éléments absolus, la construction ou la nature elle-même de ces quantités. Et c'est là, au commencement de notre cinquième période historique, conformément aux hautes spéculations philosophiques de cette critique période présente, où il s'agit généralement de passer des vérités relatives de ce monde aux vérités absolues, c'est là, disons-nous, l'objet de notre présente Réforme des Mathématiques.

Pour se former une idée plus développée de cette philosophie de l'histoire des mathématiques, ou du moins des principes de cette philosophie spéciale, nous engageons le lecteur à lire la dernière partie du *Prodrome du Messianisme*, où, déjà en 1831, en commençant la publication de notre philosophie absolue, nous avons présenté, sous le titre de *Garantie scientifique du Messianisme*, un aperçu de cette histoire philosophique des Mathématiques. Mais, il faut actuellement y déterminer, avec plus de précision, d'après les principes présents, les traits caractéristiques de cette histoire philosophique. En effet, lors de la première publication de la philosophie absolue, dans ce *Prodrome du Messianisme*, nous n'avions pas encore développé assez cette haute doctrine du savoir absolu de l'homme, pour pouvoir en déduire tous les caractères

distinctifs de la philosophie de l'histoire des mathématiques, comme nous pouvons le faire aujourd'hui, et comme nous venons de le faire. Aussi, pour l'intelligence complète de cette histoire philosophique des mathématiques, dont les savants, et même les philosophes, n'avaient encore aucune idée, il faut, avant tout, approfondir la philosophie absolue, telle qu'elle sera déjà produite aujourd'hui, essai complètement, dans la seconde division de l'ouvrage présent, en y joignant, pour servir de commentaires, nos ouvrages philosophiques antérieurs. — Peut-être, si Dieu nous conserve la vie, produirons-nous cette histoire philosophique des mathématiques, d'après ces principes que nous avons signalés d'abord dans le *Prodrome du Messianisme*, et que nous venons de déterminer ici plus positivement en les déduisant de la philosophie générale de l'histoire. Et, si nous ne pouvions le faire nous-mêmes, c'est d'après ces principes absolus que l'on devra, dans la nouvelle période des mathématiques qui s'ouvre aujourd'hui, établir et développer cette haute philosophie de l'histoire des mathématiques, en suivant l'exemple que nous en avons donné, d'abord, pour le développement des méthodes infinitésimales, dans notre *Philosophie de l'Infinit*, et ensuite, pour l'accomplissement relatif de la technique algorithmique, dans le second tome de notre *Philosophie de la Technique*; pour cet accomplissement relatif dont nous allons reproduire ici l'aperçu historique, afin de fixer la démarcation entre l'état relatif dans lequel nous avons trouvé la science, et l'état absolu auquel nous la portons aujourd'hui.

Or, d'après ce que, dans ce même *Prodrome du Messianisme*, nous avons reconnu philosophiquement sur l'état actuel des mathématiques, constituant les mathématiques modernes, telles qu'elles se sont développées depuis la découverte du calcul différentiel par Leibnitz et Newton, en constituant des méthodes universelles pour la génération des quantités, ces méthodes créatrices qui forment la *Technie des Mathématiques*, il est manifeste qu'en écartant les progrès secondaires dans cette nouvelle branche de la science du géomètre, et en s'en tenant uniquement aux progrès principaux qui seuls ont réellement avancé cette grande science, le tout se réduit, d'abord, pour ouvrir cette dernière période mathématique, au théorème de Taylor, comme loi fondamentale des séries, de ce premier algorithme technique, et enfin, pour terminer cette période, aux fractions continues d'Euler, ce décisif algorithme technique, par le moyen duquel la génération universelle de toutes les quantités, du moins pour ce qui concerne leur évaluation ou mesure, que l'on ne pouvait obtenir par aucun autre algorithme, était donnée définitivement. Ainsi, cette nouvelle branche des mathématiques, qui, depuis la découverte du calcul différentiel, avait pour objet, sans que l'on s'en doutât, la création des quantités problématiques, et qui constituait conséquemment, sous le nom de mathématiques modernes, leur technique relative, c'est-à-dire, leurs procédés de la *génération universelle* des quantités par la comparaison de ces quantités inconnues à des

quantités données, procédés qui forment l'évaluation ou la mesure des quantités problématiques, cette branche nouvelle, disons-nous, qui constitue les mathématiques modernes, se trouvait accomplie par la découverte de cet algorithme décimal des Fractions-continues, dont la réduction à des fractions ordinaires, offre maintenant la détermination universelle de la VALEUR de toute quantité. Et nous devons faire remarquer que les découvertes fondamentales sur lesquelles reposent ces secondes mathématiques modernes, ne comptent ainsi que les quatre noms immortels de Newton, Leibnitz, Taylor et Euler, sans que nous puissions ici, non plus que dans toutes les autres branches des mathématiques, y ajouter le nom d'aucun membre de l'Académie des sciences de Paris (*).

Il s'ensuit que, pour fixer avec exactitude la démarcation entre l'ÉTAT RELATIF où nous avons trouvé la science, et l'ÉTAT ABSOLU auquel nous devons la porter aujourd'hui, il suffit de tracer, sous notre susdit point de vue philosophique, l'histoire de la découverte et du développement de ce décimal algorithme technique des fractions-continues, qui, par leur réduction à des fractions ordinaires, donnent la génération universelle de la valeur de toute quantité. Nous allons donc reproduire ici cette spéciale histoire philosophique, telle que nous l'avons déjà produite à la fin du deuxième tome de la *Philosophie de la Technique algorithmique*. — Mais, pour mieux faire apprécier cet accomplissement des mathématiques modernes, dont peu de géomètres se doutent déjà, nous devons prévenir que le succès que présentent ainsi les fractions-continues dans leur réduction à des fractions ordinaires, où elles parviennent toujours à donner la génération de la valeur de toute quantité, provient de ce que, dans cette réduction, elles se trouvent ramenées à la forme de l'algorithme fondamental de la reproduction (multiplication et division), à cette forme, qui, comme FONDAMENTALE pour toute l'algorithmie, doit impliquer tous les modes de la génération des quantités. Aussi, en considérant que, d'après notre tableau architectonique, cet algorithme fondamental est en même temps l'algorithme NUTRIER entre les deux algorithmes primordiaux, et que, dans leur absolue généralité, ces deux algorithmes primordiaux président respectivement, l'un, celui de la sommation (addition et soustraction) à la *technique*, et l'autre, celui de la graduation (puissances et racines) à la *théorie*, nous pouvons considérer la réduction en question des fractions-continues à des fractions ordinaires, comme formant une GÉNÉRATION NUTRIER des

(*) De crainte d'être injuste dans ces déterminations historiques des découvertes fondamentales des mathématiques, nous citerons ici, quoiqu'il n'en soit résulté rien d'absolu, le théorème de Lagrange pour le retour des suites, et les fonctions génératrices de Laplace pour la transformation des fonctions, en y revenant sans, sinon des résultats riches, du moins une tendance manifeste vers le nouveau période des mathématiques; tendance que partageaient d'ailleurs tous les géomètres de ce temps, Bernoulli, Arbogast, Kramp, etc.

quantités, entre leur génération technique et leur génération théorique, et par conséquent comme une transition entre l'état relatif de la science où elle se trouve aujourd'hui, et dans lequel elle ne peut opérer que des générations purement techniques, donnant la valeur des quantités, et l'état absolu de la science, auquel nous devons la porter, et dans lequel elle pourra, par des procédés également universels, opérer des générations théoriques, donnant la nature elle-même des quantités.

On conçoit que, pour l'intelligence de ces hautes considérations philosophiques de la science, il faut d'abord savoir distinguer exactement la théorie de la technique des mathématiques. Et, pour cela, la déduction que, dans la seconde partie de ce premier tome de l'ouvrage présent, on y produisant le tableau architectonique de l'algorithmie, nous avons donnée, d'après la loi de création, de ces deux branches fondamentales des mathématiques, de la théorie et de la technique, dont la première, la théorie, opère la génération individuelle, et la seconde, la technique, la génération universelle des quantités, cette déduction, disons-nous, telle que nous l'avons donnée d'après la loi de création elle-même, établit complètement, sous un point de vue philosophique, cette distinction en question de la théorie et de la technique des mathématiques. Et, dans le Supplément qui sera attaché au second tome de l'ouvrage présent, et qui sera même publié séparément sous le titre de *Manifeste historique de l'actuelle Réforme du Savoir humain*, nous donnerons de plus, pour cette distinction précise de la théorie et de la technique, des moyens ou critères purement mathématiques. D'ailleurs, à défaut de cette déduction philosophique et de ces critères mathématiques, il suffit d'examiner, dans le susdit tableau architectonique de l'algorithmie, ceux des algorithmes qui y sont rangés respectivement dans chacune de ces deux classes fondamentales, dans la théorie et dans la technique, pour pouvoir, par le simple sens de ces algorithmes respectifs, se former une idée suffisante de ces deux classes distinctes des mathématiques. De même, pour se former une idée de l'état relatif où se trouve la science, et de l'état absolu où nous allons la porter actuellement, il suffit d'examiner, dans ce tableau architectonique de l'algorithmie, qui nécessairement embrasse toute la science, dans son passé et dans son avenir, ceux des algorithmes qui sont connus et ceux qui ne le sont pas. Et, pour mieux préciser cette distinction de l'état relatif et de l'état absolu de la science, on faisant remarquer que l'état absolu doit remonter jusqu'au principe absolu de la science, c'est-à-dire, jusqu'à l'identité primitive des deux distincts algorithmes primordiaux, nous déclarons que, parmi les algorithmes techniques, tous les algorithmes élémentaires, appartiennent à l'état relatif de la science, à celui où elle se trouve aujourd'hui, et tous les algorithmes systématiques, où l'on remonte à cette identité primitive en question, appartiennent à l'état absolu de la science, à celui où il faut la porter actuellement. Ainsi, les *Séries*,

les *Fractions-continues*, les *Facultés exponentielles*, les *Produites continues*, et le *Canon algorithmique*, qui ne peuvent, par des procédés techniques ou universels, opérer la génération des quotités problématiques autrement que par leur comparaison à des quantités données, et qui ne peuvent conséquemment produire que l'évaluation de ces quantités problématiques, c'est-à-dire, leur mesure, tous ces algorithmes techniques *élémentaires* n'opèrent manifestement qu'une génération *relative* des quantités, et ils appartiennent par là à l'état *RELATIF* de la science, où elle se trouve aujourd'hui; tandis que l'*Interpolation*, en y remontant aux éléments absolus des quantités, comme nous le faisons dans le premier tome de la Philosophie de la Technique, et surtout la *Loi suprême* et le *Problème-universel*, qui opèrent, par des procédés universels, et par conséquent techniques, la génération des quantités problématiques par les propres éléments de ces quantités, et qui produisent conséquemment leur construction immédiate, c'est-à-dire, leur NATURE elle-même, tous ces algorithmes techniques *systématiques* opèrent manifestement une génération *absolue* des quantités, et ils appartiennent par là à l'état *ABSOLU* de la science, auquel nous la portons actuellement.

Or, c'est entre cet état relatif et cet état absolu de la science que se trouve la GÉNÉRATION-NEUTRE des quantités que nous venons de signaler comme résultant de la réduction des fractions-continues à des fractions ordinaires, et comme formant ainsi l'accomplissement des mathématiques modernes, c'est-à-dire, de la technique relative de la science, en donnant la génération universelle de la valeur de toute quantité. Il importe donc, pour bien fixer la démarcation entre le passé et l'avenir de la science, de constater historiquement tous les progrès par lesquels on est parvenu à cet accomplissement relatif des mathématiques modernes. — Nous l'avons déjà fait vers la fin du deuxième tome de la *Philosophie de la Technique*, en y donnant, comme nous venons de le rappeler, cette histoire philosophique de la découverte et du développement des fractions-continues et de leur réduction en fractions ordinaires, en un mot, l'histoire philosophique de la GÉNÉRATION-NEUTRE des quantités, comme nous nommons cette réduction par les raisons majeures que nous venons de déduire, et surtout par la raison principale de ce que cette génération-neutre des quotités forme la DÉMARCATIION PRÉCISE entre leur génération proprement technique, qui a été l'objet de l'état *RELATIF* de la science où elle est demeurée jusqu'à ce jour, et leur génération *théorique*, par des procédés également universels ou techniques, qui sera l'objet de l'état *ABSOLU* de la science, auquel nous la portons aujourd'hui. Et, quoique nous ayons déjà donné, dans l'ouvrage que nous venons de citer, cette histoire philosophique de la génération-neutre des quotités, nous pensons devoir la reproduire ici littéralement, pour bien pénétrer les géomètres de l'importance de cet accomplissement relatif de leur science, dont la plupart paraissent ne pas se douter, et dont la connaissance leur de-

vient indispensable pour pouvoir maintenant entrer dans la période de l'état absolu de leur science, que nous leur ouvrons par la présente Réforme des Mathématiques.

Voici donc littéralement, comme nous venons de le dire, cette histoire philosophique de la génération-neutre des quantités, telle que nous l'avons produite dans le deuxième tome de la *Philosophie de la Technique algorithmique*, en ne perdant pas de vue que les numéros des marques qui y sont indiqués, se rapportent aux formules qui se trouvent dans cette Philosophie de la Technique.

D'abord, pour ce qui concerne l'esprit, l'essence intime ou philosophique de cette génération-neutre, nous observerons que les géomètres n'en ont pas encore l'idée. Il est vrai qu'ayant obtenu, par différents procédés, les développements de quelques fonctions en fractions continues, qu'on obtiendra actuellement avec la plus grande facilité par les véritables lois (508)', (509) et (509)' ou (514)' de cette génération technique spéciale, les géomètres, en réduisant ces fractions continues en des fractions ordinaires, sont déjà arrivés à des résultats ayant la forme de la génération-neutre en question; mais ces résultats, que nous reconnaissons aujourd'hui être le véritable objet de cette génération algorithmique, n'avaient, aux yeux des géomètres, qu'une importance secondaire. Ainsi, par exemple, Lagrange, en reproduisant, après Lambert, dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1776, la fraction continue du binôme $(1+x)^n$, réduit ses termes successifs en fractions ordinaires, et n'accuse nullement l'importance principale de ces derniers résultats; importance qu'il attache manifestement tout entière à la fraction-continue elle-même. Aussi Lacroix, en reproduisant à son tour cette fraction-continue et d'autres pareilles, dans le deuxième tome de son *Traité du Calcul différentiel*, etc., se méprend-il entièrement sur le véritable point de la question, comme le prouve la Note qu'il y a jointe (page 431 de l'édition de 1814), où il dit: « On peut changer de plusieurs manières la forme de ces fractions-continues, et les réduire, si l'on veut (*), en fractions ordinaires ». — Mais, ce qui donne une preuve irrécusable de ce que les géomètres n'ont pas encore l'idée philosophique, ou même une idée suffisante de la génération-neutre, c'est le travail de Trembley, intitulé: *Recherches sur les Fractions-continues*, et inséré parmi les Mémoires de Berlio, pour les années 1794 et 1795, où ce géomètre

(*) Cette indifférence est d'autant plus décriée que, bien avant Lagrange, d'autres géomètres ont continuellement opéré de pareilles réductions en fractions ordinaires, et que même Lambert a déjà obtenu, dans son beau *Mémoire sur quelques propriétés des quantités transcendentes*, etc. (Mémoires de Berlin, A. 1761), l'expression générale (§ 16) des réductions pareilles de sa fraction continue (§ 7), donnant la tangente moyennant l'arc.

tre, à son insu, se sert clairement de la génération-neutre, considérée comme moyen, pour arriver aux fractions-continues, considérées comme but. Aussi, comme on le conçoit actuellement, ce perversissement des idées met ce géomètre dans l'impossibilité absolue de démontrer aucun de ces résultats (*) : il n'arrive ainsi à des lois connues que par le moyen logique insuffisant de l'induction; et il ne saurait absolument y arriver avec une certitude supérieure, parce que, pour la déduction rigoureuse de ces divers résultats, il faut, comme nous le savons actuellement, suivre la voie tout opposée, laquelle conduirait, 1°. à la génération technique inférieure (508), qui donne les éléments; 2°. à la génération technique supérieure (507), opérée par la loi (509) et (509)', qui est proprement le moyen; et enfin, 3°. à l'intégration (515), (519) et (521), qui est définitivement la véritable but de cette génération algorithmique.

Ensuite, pour ce qui concerne l'algorithme technique des fractions-continues, qui, comme nous venons de le dire, est le moyen propre de cette génération-neutre dont il s'agit, nous avons déjà remarqué plus haut que les deux propriétés constitutives de cet algorithme, savoir, son universalité et sa nature distinctive, ne sont pas connues des géomètres. — Nous allons le prouver. — En premier lieu, l'universalité absolue de ce second algorithme technique, pareille à celle de l'algorithme des séries, est inconnue aux géomètres, parce qu'au lieu de ramener à cet algorithme supérieur, aux fractions-continues, toutes leurs déterminations numériques des quantités, soit pour l'évaluation des fonctions et de leurs intégrales, soit pour la résolution des équations et pour leur intégration, comme cela devrait se faire, ils s'en tiennent partout à l'usage presque exclusif des séries, lesquelles forment encore le seul algorithme technique dont ils connaissent l'universalité. Bien plus, là où les séries sont insuffisantes, ou du moins peu commodes, à cause de leur divergence, et où les fractions-continues donneraient avec facilité les résultats demandés, les géomètres, au lieu d'essayer au moins cet algorithme supérieur, ne cessent de tourner et retourner l'usage des séries, qu'ils croient éviter, et qu'ils ne font que masquer par des considérations accessoires. Un exemple très-récent suffira pour document de cette preuve : c'est la méthode dont nous avons déjà parlé plus haut, que M. Kramp a proposée, dans les *Annales de Mathématiques* (Numéros d'avril et de juin 1816), pour l'évaluation des intégrales

(*) Nous parlons ici proprement de la seconde moitié de ce Mémoire de M. Tremblay, laquelle commence avec le § 37 inchoivement (page 125). — La première moitié, qui présente l'évaluation de quelques fractions continues traitées par Euler dans ses *Opuscula analytica* (t. I, p. 85-120), repose sur des principes tout à fait contraires, parce que cette évaluation s'y trouve opérée précisément par la réduction des fractions continues en fractions ordinaires, c'est-à-dire, par la génération-neutre. Et, cette contradiction dans les principes, ou du moins cette non-fixité dans les principes, confirme encore la preuve que nous tenons ici de la seconde moitié étudiée de ce Mémoire de M. Tremblay.

des fonctions. En donnant les lois (471)^u et (472)^u pour ce procédé étrange (*), nous en avons indiqué l'esprit, consistant dans un cas singulier de la méthode d'exhaustion algorithmique, et par conséquent [Voyez (410) et suite] dans l'usage le plus élémentaire, ou, pour ainsi dire, le plus grossier de l'algorithme des séries. Nous ne parlons pas de l'accueil pompeux qu'on a fait à cette méthode, mais nous insistons sur les prétentions de M. Kramp lui-même, qui, en terminant son premier Mémoire (Numéro d'avril, page 302), dit expressément : « Toute fonction intégrale... doit donc être comprise néanmoins dans la classe des quantités entièrement connues ». — En second lieu, pour la nature distinctive de l'algorithme technique supérieur dont il s'agit, il suffira, pour prouver qu'elle était également inconnue aux géomètres, d'alléguer la confusion qui, dans leurs idées, règne encore entre les fractions-continues de l'espèce (501)', qui sont de pures transformations des séries, et les fractions-continues de l'espèce (502)' ou (504), qui ne sont point identiques avec les séries, et qui constituent proprement ce second algorithme technique. C'est Euler qui a opéré ces pures transformations (501)' des séries en fractions-continues, déjà, dans son Introduction infinitésimale, comme nous l'avons dit plus haut, et ensuite dans le deuxième tome de ses *Opuscula analytiques*, où il attache une grande importance à cette insignifiante transformation, comme on le voit, dans le titre même de cette dissertation, par les mots : « *Ubi simul hæc Theoria non mediocriter amplificatur* ». Et cependant, c'est le même géomètre qui a obtenu le premier de véritables fractions-continues distinctives des séries, de l'espèce (504). Mais, ce qui prouve irréfragablement cette confusion des idées des géomètres à l'égard des fractions-continues, c'est le travail long et soutenu d'Euler sur l'insignifiante fraction de Brouncker (501)^u, et surtout son irrésolution à l'égard de cette fraction-continue, lors même qu'il parvint enfin à reconnaître qu'elle n'était qu'une transformation de la série leibnitzienne ou grégorienne (501)^u (Voyez *Appendix, de fractione continua Brounckeriana*, dans le Mémoire d'Euler, *De transformatione seriei divergentis, etc.*, inséré parmi ceux de Pétersbourg, pour l'année 1784). Cette confusion est enfin prouvée avec évidence par le même

(*) En calculant l'intégrale, qui, depuis $x = a$ jusqu'à $x = 1$, donne la célèbre suite hypergéométrique

$$\left\{ \int_a^{-1} dx \right\}_{x=1} = \frac{1}{2} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} + 5040 - \text{etc.} \left\{ \frac{1}{2}, \right.$$

on trouve, par ce procédé de Kramp, avec 45 et avec 17 décimales, les valeurs

$$(0.4035796899\dots) \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad (0.4036637158\dots) \cdot \frac{1}{2},$$

qui ne sont exactes que dans les quatre premières décimales; tandis que la valeur que donne la quadrature, avec incomparablement plus de facilité, est

$$(0.403686437676 \text{ etc.} \dots) \cdot \frac{1}{2},$$

et se trouve exacte dans toutes ses quinze décimales.

(2).

Euler, lorsque, dans son Mémoire intitulé : *Speculationes super form. integr., etc.*; ubi simul egregiæ observationes circa fractionas continuas occurrunt (Mém. de Pétersbourg, A. 1782, 2^e partie), ayant obtenu une véritable fraction continue de l'espèce (504), donnant la circonférence du cercle, il la compare avec celle de Brouncker, et distingue expressément sa plus grande convergence, sans rien dire, ou plutôt sans se douter de la raison de cette convergence supérieure.

Ce sont là ces deux points, concernant d'abord l'essence de la génération neutre, et ensuite son moyen dans les fractions continues, qui, jointa à celui concernant le développement auxiliaire (508), constituent les vrais points fondamentaux auxquels se réduit définitivement la question de cette génération algorithmique spéciale, telle qu'elle résulte aujourd'hui de la doctrine philosophique précédente. Et, de cette manière, ce que nous venons de dire sur l'histoire des deux premiers de ces trois points fondamentaux, joint à ce que nous avons dit plus haut (Tabl. architect. (226)) sur l'histoire du troisième de ces points, suffit complètement pour l'établissement définitif de cette doctrine. — Cependant, nous trouvant ici engagés dans ces déductions historiques, nous allons fixer rapidement encore quelques points accessoires, concernant les progrès préparatoires de cette doctrine, dans les fractions continues où elle était concentrée jusqu'à ce jour. — Les voici.

I. L'esprit ou l'usage implicite des fractions continues remonte à la plus haute antiquité, aussi loin que remonte l'idée des quantités incommensurables. Ainsi, par exemple, la détermination continue du rapport entre la diagonale et le côté du carré, est manifestement fondée sur l'esprit des fractions continues. Nous pourrions également alléguer plusieurs exemples algorithmiques : nous nous bornerons ici à celui que fournit la deuxième proposition du septième livre d'Euclide.

II. L'usage explicite des fractions continues commence avec les modernes, et notoirement avec Brouncker, Huyghens (*) et Wallis. — Mais, cet usage explicite se réduisait alors principalement à des considérations particulières ou arithmétiques.

III. L'usage général ou algébrique des fractions continues commence proprement avec Euler et Lambert. — Le premier de ces géomètres y arrive par deux procédés : l'un indirect, moyennant la sommation de certaines fractions continues, depuis son Mémoire *De fractionibus continuis* (Commentar. Acad. Petropolitanae; T. IX); l'autre direct, par la transformation ou plutôt par la

(*) Dans son ouvrage posthume, *Descriptio Automati Planetarii*, Huyghens, après avoir réduit à $\frac{2}{504}$ le rapport des révolutions de la Terre et de Saturne, par le moyen ordinaire de la division alternative et continue, dit expressément : « Nihil aliud est divisio nostra cunctis quam subtractio illa Euclidis (P. I, livre 7). »

réduction des séries en fractions continues, depuis son Mémoire *De seriebus divergentibus* (*Novi Commentar. Acad. Petropolitanae*; T. V). Le second de ces géomètres, Lambert, arrive au même algorithme général par le procédé des anciens de la division consécutive opérée sur les restes des divisions antérieures, dans ses *Beiträge z. Mathem. und Geomet.*, et dans son Mémoire *Sur quelques propriétés des quantités transcendentes*, etc. (*Mémoires de Berlin*, A. 1761).

IV. Parmi ces trois procédés, le second d'Euler, savoir, le direct, a le plus approché de notre loi fondamentale (509) et (509)' ou (514)' de cet algorithme technique. Et, nous devons ici rendre justice au génie de ce géomètre, qui lui a fait pressentir toute l'importance de ce procédé. En effet, reproduisant ce même procédé direct dans son Mémoire *De transformatione seriei divergentis*, etc., cité plus haut (*Novo Acta Acad. Petropolitanae*; T. II), il dit expressément : « *Hæc transformatio eo magis est notatu digna, quod tutissimam ac fortasse unicam nobis viam operit, valorem seriei divergentis vero proxime saltem determinandi* ».

V. Depuis Euler et Lambert, les géomètres n'ont fait que reproduire les procédés respectifs des deux premiers. — Ainsi, par exemple, Lagrange, qui s'est beaucoup occupé de fractions continues (*), n'a fait que reproduire les procédés d'Euler et de Lambert. Dans son Mémoire *Sur la résolution des équations numériques* (*Mémoires de Berlin*, A. 1767), la méthode qui fait l'objet du troisième paragraphe, et que Lagrange qualifie du nom de *nouvelle*, n'est rien autre qu'une application aux équations du procédé direct d'Euler. Dans le Mémoire *Sur l'usage des fractions continues dans le Calcul intégral* (*Mémoires de Berlin*, A. 1776), Lagrange reproduit encore le même procédé direct d'Euler; et ce qu'il y met d'amplification, n'est qu'un pur tâtonnement. Enfin, dans son Mémoire intitulé : *Recherches sur la manière de former des tables des planètes*, etc. (*Mémoires de Paris*, A. 1773, première partie), Lagrange, pour arriver à sa *fraction génératrice*, transforme la série proposée en fraction continue, suivant l'esprit du procédé de Lambert.

VI. Quant aux résultats obtenus par cet usage général ou algébrique des fractions continues, ce sont encore Euler et Lambert qui sont arrivés aux principaux de ces résultats. — Mais, il faut ici distinguer ceux qui dépendent des fractions continues générales (505) de ceux qui dépendent particulièrement des fractions continues numériques (532)'.

VII. Parmi les résultats généraux (505), il faut remarquer les exponentielles, le binôme, les transcendentes logarithmiques et circulaires, les intégrales principales, et même l'intégration des équations différentielles, et spécialement de

(*) Ce géomètre a lui-même en retarder et pervertir le sens (Voyez le cinquante Cahier du *Journal de l'École polytechnique*, pages 111-114).

celles qui reviennent à l'équation de Riccati. Tous ces résultats appartiennent à Euler et à Lambert (*Voy. Commentar. Acad. Petropol.*, T. IX et XI; *Novi Commentar.*, T. V; *Acta Acad. Petropol.*, A. 1779, pars 1, et A. 178a, pars 2; *Nova Acta*, T. II; *Opuscula analytica*, etc.; *Lambert's Beytraege*, etc.; *Mémoires de Berlin*, A. 1761, etc.). Depuis, on n'a fait que reproduire ces résultats; et c'est ici l'à-propos de citer, pour exemple, la belle fraction con-

tinue qui donne l'intégrale $\int (e^{-u}.dt)$ ou $\int \left(\frac{e^{-\frac{x}{x^2}}}{xx} .dx \right)$ obtenue par Euler dans son Mémoire *De seriebus divergentibus* cité plus haut (*Novi Commentar. Acad. Petrop.*, t. V, p. 236), et que M. le comte Laplace reproduit dans son *Traité de Mécanique céleste* (tome IV, livre X, page 255), sans rien dire de son prédécesseur (*).

VIII. Parmi les résultats particuliers dépendants des fractions continues numériques, il faut remarquer surtout les fractions continues périodiques qui donnent la génération numérique absolue des racines carrées, et, par une simple conséquence, les racines des équations du second degré. C'est encore à Euler que nous devons ces beaux résultats, dont les principes furent posés dans son Mémoire *De usu novi algorithmi in solvendo problemate Pelliano* (*Novi Comment. Acad. Petropol.*, T. XI). — Il est extrêmement remarquable que Lagrange, ayant connu ces principes d'Euler, et ayant ainsi résolu les équations du second degré (*Mémoires de Berlin*, A. 1768), s'attribue ce travail, et, dans son Mémoire de l'Académie de Berlin (n° 43), comme dans son *Traité de la résolution des équations numériques* (§ 59), dit clairement, en substance, qu'on n'a rien fait à cet égard avant lui. Il nous semble que lorsqu'on savait déjà que toute fraction continue périodique peut être ramenée à une équation du second degré, comme Lagrange en convient lui-même, et lorsqu'on savait de plus que la racine carrée d'un nombre entier se réduit toujours en une telle fraction continue périodique, comme il en convient également, le reste, c'est-à-dire, la réduction pareille des racines des équations du second degré, était une conséquence tellement directe et simple, que, pour

(*) Il faut remarquer que cette fraction continue reproduite par M. Laplace après Euler, est le point principal de toute la partie algorithmique du travail de M. le comte sur les *Refractions astronomiques*, dans l'hypothèse physique adoptée par ce géomètre (*Voyez* pages 26a et 263 de l'ouvrage cité). Il faut aussi remarquer que c'est uniquement par le moyen de cette hypothèse gratuite et très-insuffisante que M. Laplace résout cette grande et difficile question; de sorte que, si l'on observe de plus que même l'équation différentielle de ce problème n'appartient pas à ce géomètre, mais bien à Euler et à Kramp (*Voyez le Mémoire d'Euler sur la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère*, etc., parmi ceux de Berlin, de l'année 1764; et l'ouvrage de Kramp, intitulé: *Analyses des réfractons astronomiques et terrestres*, an VII), on verra avec surprise que, dans ce travail tant vanté, M. le comte Laplace n'a obtenu aucun, absolument aucun résultat nouveau et permanent. — Nous donnerons bientôt la solution rigoureuse de cette question, ou, du moins, dans toute sa généralité, la fonction de la loi que suit la densité des couches atmosphériques, c'est-à-dire, sans introduire aucune hypothèse physique.

ménager sa gloire, le géomètre qui aurait tiré cette conséquence, n'aurait pas dû seulement en faire mention. Autrement, nous ne voyons pas pourquoi M. Ivory, qui e aussi donné une *Rule for reducing a square root to a continued fraction* (*Transact. of the Soc. of Edinburgh*, vol. V, p. 3), ne pour-rait, avec le même droit (*), revendiquer à lui seul tous ces résultats. — Quant à la démonstration des principes de cette question, quiconque aura mé-rité, dans le Mémoire d'Euler que nous venons de citer, les mots « *Nullus numerorum A, B, C, D, etc., ipso v major prodire potest* », et ensuite ceux-ci : « *Cum fuerit perventum ad indicem = av, sequentes iterum prodeunt a, b, c, etc.* », comprendra qu'ils contiennent non-seulement le sens complet de cette démonstration, mais de plus les principes dont se sert Lagrange.

Ce géomètre, Lagrange, prétend même (à l'endroit cité de son *Traité de la résolution des équations numériques*) que le théorème d'Euler, c'est-à-dire, la transformation de la racine carrée de tout nombre en fraction continue périodique, « ne peut être démontré que par le moyen des principes qu'il a établis ». C'est une présomption qui ne peut être excusée que par l'ignorance philosophique de ce grand géomètre (**); car, pour peu qu'il eût pénétré dans

(*) Ce droit de M. Ivory serait d'autant plus fondé, qu'on voudrait croire que sa règle est préférable. En effet, l'exposé historique de cette règle de M. Ivory se trouve terminé par ces mots : « This rule is the more worthy of notice, that it proceeds by certain definite arithmetical operations : whereas the method of M. de Lagrange determines the numbers $p, p', p'',$ etc. ($\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3,$ etc.), by appreciating the value of certain expressions to the nearest unit, or by a process that is in some measure tentative, and therefore not strictly analytical. »

Mais, c'est à tort qu'on donnerait cette supériorité au procédé de M. Ivory sur la méthode de M. Lagrange, en considérant cette dernière comme une espèce de tâtonnement. Ces deux règles conduisent l'une et l'autre aux nombres $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4,$ etc., par l'opération arithmétique de la division ; et, à cet égard, elles ne diffèrent qu'en ce que, dans l'une (celle de Lagrange), on néglige les restes de ces divisions arithmétiques, et que, dans l'autre (celle d'Ivory), on se sert de ces restes pour la formation des nombres ultérieurs. — D'ailleurs, cette méthode de M. Ivory n'est aussi qu'un développement de la méthode d'Euler, exposée dans le Mémoire cité (§§ 9-11), ou plutôt une combinaison de cette première méthode d'Euler avec celle qu'il a donnée postérieurement dans son *Mémoire De resolutione irrationalium per fractiones continuas, etc.* (*Novi Comment. Acad. Petropol.*, t. XVIII), où il se sert précisément de ces restes des divisions arithmétiques.

(**) C'est une rareté finale dans ce monde, que la rencontre, dans un même individu, de l'esprit mathématique (faculté de l'intuition à priori), et de l'esprit philosophique (faculté de la conception à priori), dont la réunion constitue proprement le génie mathématique. — En étudiant anthropologiquement l'histoire des progrès des Mathématiques, on se trouve, par l'apparente difficulté de la réunion de ces deux facultés, presque entraîné dans la conclusion erronée qu'elles s'excluent mutuellement ; et personne mieux que Lagrange ne aurait indiquer dans cette erreur. On se peut, en effet, lui contester un esprit mathématique très-supérieur ; et cependant, partout où il a voulu toucher aux principes de sa science, il a non-seulement échoué dans ses efforts, mais, de plus, il a perverti le vrai sens de ces principes. Nous en avons déjà montré un exemple frappant dans son étrange production de la *Théorie des fonctions analytiques*, qui n'eût destinée à rien moins qu'à extirper chez les géomètres l'idée de l'infinité, ce principe fondamental de toute leur science. — Vout-on un autre exemple également frappant dans les Mathématiques appliquées ? Qu'on lise, dans cette même *Théorie* (ou commentarier de son application à la mécanique), ces mots remarquables : « Ainsi on peut regarder le mécanisme comme une géométrie à quatre

l'esprit philosophique de sa science, il aurait reconnu ou du moins pressenti qu'il n'existe aucune proposition des Mathématiques qui ne puisse être démontrée par quelques principes : telle est, en effet, la fécondité ou la variété de la certitude intuitive qui accompagne les vérités mathématiques. Les prétendus principes de Lagrange, qui, comme nous venons de le dire, ne sont ici qu'un développement des principes d'Euler, non-seulement ne sont pas uniques pour pouvoir déduire le théorème dont il s'agit, mais ils n'ont même pas l'avantage d'être les principes absolus de ce théorème; car, malgré la variété de principes que nous venons de signaler pour les vérités mathématiques, il existe cependant, pour chaque proposition, certains principes absolus qui énoncent l'essence philosophique de cette proposition. — Voici la preuve de ce que nous venons d'avancer.

Prenant la loi (532)^{IV} de la génération numérique absolue (532)^V de toute fonction algorithmique Fx , et appliquant cette loi à la fonction spéciale $\sqrt{x}$, c'est-à-dire, à la racine carrée du nombre x , nous aurons . . . (553)

$$z_n = \frac{p_{n-1} \cdot \sqrt{x} - e_{n-1}}{e_{n-1} - p_{n-1} \cdot \sqrt{x}}. \quad (*)$$

Multiplicons le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $(e_{n-1} + p_{n-1} \cdot \sqrt{x})$, il viendra . . . (553)^I

$$z_n = \frac{x \cdot p_{n-1} \cdot p_{n-1} - e_{n-1} \cdot e_{n-1} + (e_{n-1} \cdot p_{n-1} - e_{n-1} \cdot p_{n-1}) \cdot \sqrt{x}}{(e_{n-1})^2 - (p_{n-1})^2};$$

et puisque, en vertu de (511)^{IV}, on a ici . . . (553)^{II}

$$(e_{n-1} \cdot p_{n-1} - e_{n-1} \cdot p_{n-1}) = (-1)^{n-1} = (-1)^n,$$

on aura . . . (553)^{III}

$$z_n = \frac{x \cdot p_{n-1} \cdot p_{n-1} - e_{n-1} \cdot e_{n-1} + (-1)^n \cdot \sqrt{x}}{(e_{n-1})^2 - (p_{n-1})^2 \cdot x}.$$

Or, par suite des réductions (511)^{VI}, on a aussi . . . (553)^{IV}

discussions, le temps étant sa quatrième dimension; et l'on saura quelle était l'idée philosophique que Lagrange avait de la Mécanique.

(*) Pour l'intelligence de cette question, il suffit de savoir qu'il s'agit de développer la quantité $\sqrt{x}$ en fraction continue dont les numérateurs soient tous égaux à l'unité, et dont les dénominateurs forment des nombres entiers z_1, z_2, z_3 , etc., qui, suivant les règles connues pour la réduction des fractions continues en fractions ordinaires, servent à déterminer les nombres progressifs p_1, p_2, p_3 , etc., et e_1, e_2, e_3 , etc., dont les rapports successifs, comme dans les présentes expressions (553)^{IV}, donnent les valeurs de plus en plus approchées de la quantité problématique $\sqrt{x}$.

Au reste, pour l'intelligence parfaite et facile de cette question, voyez, dans le deuxième tome de notre Philosophie de la Technique, d'où nous tirons le présent exposé historique, les éléments nécessaires que nous citons ici par les marques (532)^V, (532)^{VI}, etc., attachés à ces éléments.

$$\frac{e_{n-2}}{p_{n-2}} = \sqrt{x}, \quad \frac{e_{n-1}}{p_{n-1}} = \sqrt{x}, \quad \text{etc.};$$

et ces relations seront d'autant plus vraies que l'indice n sera plus grand, et elles seront rigoureusement vraies lorsque cet indice n sera infini. Donc, puisque ces relations (553)^{vi} donnent . . . (553)^{vii}

$$e_{n-1} = p_{n-1} \cdot \sqrt{x}, \quad e_{n-2} = p_{n-2} \cdot \sqrt{x}; \quad \text{et}$$

$$(e_{n-1})^2 - (p_{n-1})^2 \cdot x = 0,$$

$$e_{n-1} \cdot e_{n-2} - x \cdot p_{n-1} \cdot p_{n-2} = 0;$$

les quantités . . . (553)^{viii}

$$(e_{n-1})^2 - (p_{n-1})^2 \cdot x = a, \quad \text{et}$$

$$e_{n-1} \cdot e_{n-2} - x \cdot p_{n-1} \cdot p_{n-2} = b,$$

seront toujours des nombres entiers finis; c'est-à-dire que, dans toute la suite des indices n , ces nombres a et b ne pourront passer des limites finies A et B . On aura donc toujours . . . (553)^{ix}

$$z_n = \frac{-b + (-1)^n \cdot \sqrt{x}}{a},$$

les nombres entiers a et b ne pouvant jamais passer des limites finies A et B . Donc, tout au plus après toutes les combinaisons des nombres entiers a et b compris par les limites A et B , l'expression (553)^{ix} de z_n deviendra nécessairement la même qu'elle a déjà été supposant. Donc alors, la valeur rigoureuse de z_n deviendra la même que celle d'un caph précédent, et le développement ultérieur de ce z_n sera nécessairement le même que celui du caph identique précédent; c'est-à-dire que la fraction continue (53a)ⁱ sera périodique. — Voilà, ce nous semble à notre tour, sinon des principes uniques pour déduire le théorème concernant la transformation en fraction continue périodique de la racine carrée de tout nombre, du moins, contre l'opinion de Lagrange, des principes différents de ceux établis par ce géomètre, et même, ce nous semble de plus, les principes absolus de cette question. On y voit surtout, par les transformations possibles (553)ⁱ et (553)ⁱⁱ de l'expression fondamentale (553), comment cette fonction spéciale $\sqrt{x}$ jouit exclusivement (*) de l'avantage d'une réduction en fraction continue périodique. On y voit, en même temps, que l'expression (553)ⁱⁱⁱ ou (553)^{ix} offre la méthode directe et la plus simple pour cette génération numérique absolue (53a)ⁱ des racines carrées; d'autant plus

(*) Néanmoins, en suivant à peu près les mêmes principes, on peut, pour toute fonction, arriver, sinon spécialement, à des fractions continues périodiques, qui appartiennent exclusivement aux racines des équations de second degré, mais généralement à des fractions continues *quasi*-périodiques (53a)ⁱⁱ donnant la génération numérique absolue des quantités. — Nous parlerons ailleurs plus amplement de cette nouvelle doctrine.

qu'il n'y entre, comme nombres auxiliaires, que les médiateurs p et q , donnés par les formules (53a)' et (53a)'', qui eux-mêmes sont nécessaires pour la réduction en fraction ordinaire de la fraction continue absolue (53a)'. — Pour peu qu'on sût approfondi ces principes, on comprendra avec facilité qu'ils s'étendent généralement à la fonction . . . (554)

$$\frac{\xi + \sqrt{x}}{\xi}$$

γ , ξ , et x étant des nombres entiers, c'est-à-dire que ces principes s'étendent généralement aux quantités (554) formant les racines des équations du second degré; car, le point principal, dont dépend la propriété exclusive susdite de la périodicité dans cette génération numérique absolue (53a)', consiste manifestement dans la possibilité des transformations (553)' et (553)'' de l'expression fondamentale (553), possibilité qui, à son tour, vient exclusivement de la nature spéciale de la fonction $\sqrt{x}$, qui est ainsi le nœud de la question, et que, pour relever son travail, Lagrange se plaît à ne considérer que comme un cas particulier de cette question. Nous laissons aux géomètres à opérer cette extension très-facile de nos principes philosophiques, et nous nous bornerons ici à leur présenter la formule résultante . . . (554')

$$p_n = \frac{x \cdot p_{n-1} \cdot p_{n-2} - (\gamma \cdot q_{n-1} - \xi \cdot p_{n-1}) (\gamma \cdot q_{n-2} - \xi \cdot p_{n-2}) + (-1)^n \sqrt{x} \cdot q_n}{(\gamma \cdot q_{n-1} - \xi \cdot p_{n-1})^2 - (p_{n-1})^2 \cdot x}$$

qui, en y prenant constamment pour $\sqrt{x \cdot q_n}$ le nombre entier le plus proche, offre visiblement la méthode directe et la plus simple pour la réduction en fraction continue périodique de la fonction (554), et par conséquent des quantités formant les racines des équations du second degré; d'autant plus qu'encore ici les quantités auxiliaires p et q sont les médiateurs (53a)' qui donnent les réductions en fractions ordinaires ou en génération-neutre de cette génération numérique absolue (*). — Mais, revenons à nos points historiques.

IX. Pour ce qui concerne la réduction des fractions continues à la forme de la génération-neutre qui en est le véritable objet, il faut distinguer les trois degrés consécutifs de cette réduction, traités plus haut sous les marques (511)'', (511)'', et (516) ou (521)'. — Or, c'est le second degré (511)'' qui a été connu le premier. Wallis, en présentant la fraction continue de Brouncker (*Arithmetica Infinitorum*; prop. 191), donna immédiatement cette règle (511)'' de ré-

(*) Nous ne parlons pas ici de la réduction ordinaire des fractions continues périodiques en fractions ordinaires ou en génération-neutre; réduction qui suit les lois que nous avons signalées dans la Note des pages 561 et 562, où nous avons vu qu'elle dépend de nos fonctions alpha, qui donnent alors l'intégration de l'équation correspondante du second ordre (515)'. Nous avons déjà promis, dans la Note ci-dessus, que nous démontrerions ailleurs la solution de cette question, suivant les principes nouveaux des fonctions alpha.

duction des fractions continues en fractions ordinaires. Elle demeura peu connue, ou du moins elle fut peu appréciée; car, Daniel Bernouilli, en la reproduisant, plus de cent ans après, dans son Mémoire intitulé *Disquisitiones ulteriori de indole fractionum continuarum* (*Novi Comment. Acad. Petrop.* T. XX, 2^e Mémoire du même auteur), dit avec admiration : « *Præstantissimum utique est hoc compendium, simul autem satte obvium, ut mihi vix persuadere possim, a nemine adhuc fuisse ante me animadversum* »; et cels même trente ans après qu'Euler eut déjà reproduit cette règle de Wallis dans son Mémoire *De fractionibus continuis*, cité plus haut.

X. Quant à l'algorithme spécial que présentent les médiateurs (511)^{vi} et (511)^{vii} dont dépend le second degré (511)^{viii} de réduction, c'est Euler qui l'a fixé le premier dans son Mémoire intitulé *Specimen algorithmi singularis* (*Novi Comment. Acad. Petrop.*, T. IX). Kramp, dont nous prenons la dénomination de médiateur, s'en est occupé depuis dans le tome I des *Nova Acta Acad. Moguntinae*, dans son *Arithmétique universelle*, et dans le tome I des *Annales de Mathématiques*. D'autres géomètres, Lagrange, Gauss, Pezzi, . . . s'en sont aussi occupés; mais les principes de cet algorithme ont été posés complètement dans le Mémoire d'Euler que nous venons de citer. — Il faut ici remarquer que Lagrange, en reproduisant, même incomplètement, dans ses *Additions à l'Algèbre d'Euler*, ces purs résultats (*Specimen algorithmi singularis*; etc., etc.) concernant les médiateurs, dont dépend manifestement la théorie des fractions continues numériques, dit « que cette théorie, envisagée du côté arithmétique, n'avait pas encore été (avant lui) cultivée autant qu'elle le méritait »; et, pour de plus simples détails, ce géomètre renvoie à ses Mémoires des années 1767 et 1768 (parmi ceux de l'Académie de Berlin). — Récemment, M. Pezzi, dans son Mémoire *Sopra la legge di trasformazione di una frazione continua indefinita qualunque in una frazione vulgare, etc.* (*Memorie della società italiana*, T. XI), a reproduit, à la vérité avec quelque modification, la loi que suit le développement de chaque médiateur, en disant « lo sviluppo attuale de termini di queste frazioni, non è ancora stato dato da' Geometri, a mia cognizione »; et, plus récemment encore, dans une note du tome I des *Annales de Mathématiques* que nous venons de citer, on a reproduit (pages 262-264) cette loi d'Euler, telle qu'elle fut donnée par ce géomètre dans son Mémoire susdit (Voyez § 8 de ce Mémoire, *Specimen algorithmi singularis*).

XI. Le premier degré (511)^v de réduction des fractions continues en fractions ordinaires, fut tiré (et l'est encore aujourd'hui) du second degré (512)^{vi}, par une simple induction, en prenant successivement les différences des fractions réduites. C'est dans le beau Mémoire d'Euler *De fractionibus continuis*, cité déjà plusieurs fois, que fut ainsi établi ce premier degré de réduction, qui opère la transformation des fractions continues en séries. — Dans notre *Introduction à la philosophie des Mathématiques*, où ce premier degré (511)^v (3).

a été déduit rigoureusement (xxvii), et indépendamment du second degré (511)^{vi}, lequel dernier n'en est qu'une conséquence ultérieure, on a rétabli l'ordre dans ces degrés consécutifs de réduction des fractions continues, en procédant directement à la transformation (511)^{vii} des fractions continues en séries, et en laissant opérer la sommation consécutive de cette série, pour arriver au second degré (511)^{vi}, comme on l'a fait dans la *Technie* citée.

XII. Enfin, le dernier degré (516) ou (521)^{viii} de réduction des fractions continues à la forme propre de la génération-neutre, dépendant manifestement de l'intégration de l'équation du second ordre (515)^v, n'a pu être traité que dans le cas où les coefficients de cette équation sont ou peuvent être constants; et, dans ce cas simple, qui n'embrace que les fractions continues périodiques, la première intégration, du moins pour le cas le plus simple, a été donnée par Daniel Bernoulli, dans son *Mémoire intitulé Adversaria analytica miscellanea de fractionibus continuis* (*Novi Comment. Acad. Petrop.*, T. XX; 1^{er} *Mémoire* de cet auteur). On l'a reproduite récemment dans le tome I des *Recueils de l'Académie du Gard*.

Ce sont là les points accessoires, concernant les progrès préparatoires de la doctrine sur la génération-neutre des quantités; et, en les joignant aux trois points fondamentaux que nous avons fixés plus haut, nous aurons ainsi un aperçu du développement de cette branche de l'Algorithmie. — Dans cet aperçu historique, nous nous sommes appliqués surtout à fixer, avec l'exactitude de la diplomatique, les divers points principaux de la doctrine dont il s'agit. Nous traiterons la même question, avec une rigueur systématique, dans notre *Histoire philosophique des Mathématiques*. — Ici, le premier point de vue nous suffira provisoirement, d'autant plus qu'il devient urgent de fixer, avec une pareille exactitude, les travaux des hommes supérieurs qui ont réellement augmenté nos connaissances; parce que l'on commence déjà, avec raison, à n'attacher de prix aux hommes et aux peuples que selon le degré dans lequel ils ont contribué, directement ou indirectement, aux progrès de la vérité, qu'on pressent enfin être le grand but de l'humanité.

En terminant ici cet aperçu historique de la génération-neutre des quantités, il ne sera pas hors de propos de fixer également les points principaux que, dans cette partie de la science, nous revendiquons à la Philosophie des Mathématiques. — Ce sont : d'abord, pour la Métaphysique de l'Algorithmie, les principes philosophiques de la formation ou de la génération des fractions continues, que nous avons déduits dans notre Introduction philosophique, sous la marque (ix), principes par lesquels se trouvent établies pérennitément les deux propriétés constitutives de cet algorithmie technique supérieur, savoir, 1^o. son universalité, et 2^o. sa nature distinctive; et ensuite, pour l'Algorithmie elle-même, les trois points principaux que nous avons déjà indiqués plus haut, savoir 1^o. la loi fondamentale (166)^v ou (420) de la génération technique

inférieure et auxiliaire (508); 2°. la loi fondamentale (509) et (509)', ou (514)' de la génération technique supérieure (507' ou (514); et 3°. l'intégration (515), (519) et (521)', qui donne définitivement la forme propre de la génération-neutre. — Ce sont là manifestement les vrais points auxquels se réduit toute la doctrine de cette génération algorithmique supérieure.

Ainsi, cette génération-neutre des quantités, qui est l'objet propre de nos fractions continues, et qui, dans les réductions (499) et (500), est déjà donnée par la série commune universelle (498), se trouve suffisamment déterminée et éclaircie, pour que, dès à présent, les géomètres puissent en pressentir toute l'importance; surtout en observant que c'est précisément dans cette génération-neutre (500) des fonctions que se trouve le lien philosophique entre la Théorie et la Technie de leur science, ou, ce qui est la même chose, entre ses deux algorithmes primitifs fondamentaux, savoir, entre la sommation, base de la Technie et principe de l'universalité dans la génération des quantités, et la graduation, base de la Théorie et principe des modes distincts ou individuels dans la même génération algorithmique. — Nous avons déjà dit que nous tirerions, de cette nouvelle considération philosophique, les résultats les plus importants pour la science des géomètres; et pour légitimer ici le terme auquel nous nous arrêtons dans cette philosophie des séries, qui, par ses résultats (498), (499) et (500), nous a amenés à cette considération nouvelle de la génération-neutre des quantités, nous allons au moins laisser entrevoir le procédé supérieur qui doit ultérieurement et définitivement conduire à ces importants résultats que nous promettons encore.

C'est là que finit, dans l'ouvrage dont nous l'avons tirée, cette histoire philosophique de la découverte et du développement de la GÉNÉRATION-NEUTRE des quantités, telle qu'elle résulte de la réduction des fractions continues à des fractions ordinaires. Et comme il y est dit à la fin, cette histoire philosophique est suivie, dans ce même ouvrage, dans le second tome de notre *Philosophie de la Technie*, par une indication positive du procédé supérieur auquel devait nous conduire cette connaissance philosophique et approfondie de la génération-neutre des quantités, de ce procédé supérieur qui devait ouvrir la nouvelle période des mathématiques et les porter ainsi définitivement à leur état final et absolu. — Or, ce procédé supérieur, constituant notre MÉTHODE PRIMITIVE, par laquelle peuvent être résolus tous les grands problèmes des mathématiques, devait être donné dans le troisième tome de cette même Philosophie de la Technie; et l'on sait déjà comment, par l'influence de l'Académie des sciences de Paris, il ne paraît qu'aujourd'hui, après un silence forcé de trente années. C'est en effet cette suite de notre Philosophie de la Technie que nous venons de produire dans l'ouvrage présent, en y donnant (depuis la page 257),

et (499)' de la Série commune universelle (498), formant les progrès consécutifs de la génération-neutre de toute fonction Fx , sont encore indéterminées, et diffèrent par là des réductions (506)' et (506)'' des fractions continues (506), formant également des progrès consécutifs de la génération-neutre de cette fonction Fx , et n'étant manifestement que de purs progrès relatifs de cette génération-neutre; de sorte qu'en déterminant, de la manière la plus convenable, ou plutôt absolument, les éléments arbitraires n_1, n_2, n_3 , etc., qui entrent dans les Séries communes (498), et qui précisément laissent indéterminées leurs réductions (499) et (499)', on peut obtenir, dans ces réductions, les véritables progrès absolus de la génération-neutre des quantités, lesquels doivent définitivement conduire à leur génération théorique universelle. — Pour mieux établir cette différence entre la génération-neutre relative et la génération-neutre absolue, ou plutôt entre leurs progrès respectifs, reprenons la Série commune universelle (498), savoir . . . (555)

$$Fx = A_0 + A_1 \cdot \frac{x - a_1}{n_1 + x} + A_2 \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(n_1 + x)(n_2 + x)} + \\ + A_3 \cdot \frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}{(n_1 + x)(n_2 + x)(n_3 + x)} + \text{etc., etc.};$$

et examinons un moment les progrès généraux que cette Série présente pour la génération-neutre des quantités. — Pour faciliter cet examen, considérons les quantités arbitraires a_1, a_2, a_3 , etc., comme étant égales entre elles, et désignons leur valeur par a . La Série commune universelle (555) se réduira à la forme de la Série commune intermédiaire (479)', savoir . . . (555')

$$Fx = Fa + A_1 \cdot \frac{x - a}{n_1 + x} + A_2 \cdot \frac{(x - a)^2}{(n_1 + x)(n_2 + x)} + \\ + A_3 \cdot \frac{(x - a)^3}{(n_1 + x)(n_2 + x)(n_3 + x)} + \text{etc., etc.}$$

La loi (479) de cette série intermédiaire donne . . . (555)''

$$A_1 = \mathfrak{A}_1 \cdot (n_1 + a), \\ A_2 = \mathfrak{A}_2 \cdot (n_1 + a)(n_2 + a) + \mathfrak{A}_1 \cdot (n_2 + a), \\ \text{etc., etc.};$$

les quantités $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, etc., étant les coefficients dans le développement élémentaire . . . (555)'''

$Fx = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 \cdot (x - a) + \mathfrak{A}_2 \cdot (x - a)^2 + \mathfrak{A}_3 \cdot (x - a)^3 + \text{etc., etc.};$
ou bien les différentielles composées . . . (555)''''

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{dFa}{da}, \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2Fa}{da^2}, \quad \text{etc.}$$

Ainsi, substituant les valeurs (555)'' à la place des coefficients dans la Série intermédiaire (555)', et prenant successivement deux, trois, quatre, etc., ter-

mes de cette série, on obtiendra, pour les progrès généraux de la génération-neutre de toute fonction Fx , les expressions consécutives suivantes . . . (556)

$$Fx = Fa + \frac{\lambda_1 \cdot (n_1 + a)(x - a)}{n_1 + x},$$

$$Fx = Fa + \frac{\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot [(n_1 + x)(n_2 + x) - (x - a)^2] \\ + \lambda_2 \cdot (n_1 + a)(n_2 + a)(x - a) \end{array} \right\} \cdot (x - a)}{(n_1 + x)(n_2 + x)},$$

etc., etc.;

ou bien, en développant les produits . . . (556')

$$Fx = Fa + \frac{-\lambda_1 \cdot (n_1 + a)a + \lambda_1 \cdot (n_1 + a)x}{n_1 + x},$$

$$Fx = Fa + \frac{\left\{ \begin{array}{l} + [\lambda_1 \cdot (a^2 - n_1 \cdot n_2)a + \lambda_2 \cdot (n_1 + a)(n_2 + a)a^2] \\ + [\lambda_1 \cdot ((n_1 - a)(n_2 - a) - 4a^2) - 2\lambda_2 \cdot (n_1 + a)(n_2 + a)a] \cdot x \\ + [\lambda_1 \cdot (n_1 + n_2 + 2a) + \lambda_2 \cdot (n_1 + a)(n_2 + a)] \cdot x^2 \end{array} \right\}}{n_1 n_2 + (n_1 + n_2) \cdot x + x^2},$$

etc., etc. (*)

Or, dans ces expressions, l'on voit que les éléments arbitraires n_1, n_2, n_3 , etc., laissent généralement indéterminés les progrès de la génération-neutre des quantités; et de là vient qu'il peut exister une infinité d'espèces différentes de ces progrès de la génération-neutre d'une même quantité ou fonction Fx . Ces diverses espèces ne diffèrent que par la détermination différente de ces éléments arbitraires n_1, n_2, n_3 , etc.; et l'on conçoit que, quelle que soit une espèce particulière donnée de ces progrès de génération-neutre, on peut toujours, dans les expressions générales présentes (556) ou (556'), déterminer les éléments n_1, n_2, n_3 , etc., de manière à ce que ces expressions représentent cette espèce particulière donnée. Ainsi, par exemple, ayant les progrès consécutifs (541) de la génération-neutre de la fonction intégrale (533)', savoir . . . (556)''

$$\frac{e^x}{x} \cdot \int (e^{-\frac{1}{x}} dx) = \frac{x}{1 + 2x} = \frac{\frac{1}{1} \cdot x}{\frac{1}{2} + x},$$

$$\frac{e^x}{x} \cdot \int (e^{-\frac{1}{x}} dx) = \frac{x + 4x^2}{1 + 6x + 6x^2} = \frac{\frac{1}{6} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot x^2}{\frac{1}{6} + x + x^2},$$

etc., etc.

(*) Nous prévenons ici que, dans ces expressions des progrès de la génération-neutre, les éléments

qui proviennent de la réduction de la génération technique supérieure (534) ou (535)' de cette fonction à la forme de fraction ordinaire, c'est-à-dire, à la forme de l'algorithme primitif-neutre de la reproduction (régressive ou division), ayant ainsi, disons-nous, cette espèce donnée de progrès de génération-neutre, on peut, dans les expressions générales (556) ou (556)', par la simple comparaison des dénominateurs correspondants, déterminer successivement les éléments n_1, n_2, n_3 , etc., de manière à ce que ces expressions représentent respectivement l'espèce donnée (556)'' des progrès en question. En effet, faisant $a = 0$, le développement élémentaire (533)' ou (534) de la fonction intégrale dont il s'agit, donne ici

$$A_1 = 1, \quad A_2 = -1^{1/2}, \quad A_3 = +1^{3/2}, \quad \text{etc.};$$

et, considérant de plus, comme zéro, la constante arbitraire Fa , la comparaison successive des dénominateurs des expressions (556)' et (556)'' donnera les résultats identiques suivants. En premier lieu, comparant les dénominateurs des deux premières de ces expressions, on aura $n_1 = \frac{1}{2}$; et, substituant cette quantité ainsi que la valeur $A_1 = 1$ dans le numérateur de la première des expressions générales (556)', on retrouvera le numérateur de la première des expressions données (556)''. En second lieu, comparant de nouveau les dénominateurs des deux secondes de ces expressions, on aura $n_1 n_2 = \frac{1}{6}$, $(n_1 + n_2) = 1$; et substituant ces quantités ainsi que les valeurs $A_1 = 1$ et $A_2 = -1$, dans le numérateur de la seconde des expressions générales (556)', on retrouvera encore le numérateur de la seconde des expressions données (556)''. Et, ainsi de suite, il en arrivera de même pour toutes les expressions ultérieures.

C'est à ce point que, dans l'ouvrage présent, après les formules (563), identiques avec les formules (556) que nous venons de reproduire ici de notre *Philosophie de la Technique*, c'est à ce point, disons-nous, que, dans l'ouvrage présent (à la page 267), nous avons repris cette annonce ou plutôt cette détermination du PROBLÈME de la réforme des mathématiques, et donné ensuite la SOLUTION DÉFINITIVE de ce grand problème. Bien plus, dans l'ouvrage présent, nous donnons cette solution en tout conformément à ses conditions, telles qu'elles ont été fixées et proposées formellement à la fin du deuxième tome de la Philosophie de la Technique, d'où nous venons de tirer les présents extraits historiques et didactiques, et où ces conditions se trouvent en

n_1, n_2, n_3 , etc., entrent toujours d'une manière symétrique; ce qui, pour la suite, sera de la plus haute importance.

quelque sorte résumées dans la note de la page 633; note que nous avons déjà citée dans l'ouvrage présent (page 266), à l'occasion des susdites formules (563), et que voici :

« C'est un point de l'histoire philosophique des Mathématiques de fixer le caractère de chaque époque ou période de la science; et c'est ainsi que nous savons que le caractère propre des Mathématiques modernes, depuis Leibnitz et Newton, consiste principalement dans cette génération technique ou UNIVERSELLE des quantités, qui est opérée par la pure sommation moyen-nant l'algorithme des Séries. — Tout ce que donne le Calcul différentiel, ce grand instrument de la période moderne des Mathématiques, ne sert en effet que pour arriver à cette génération algorithmique par sommation indé-finie, que nous venons de signaler: car, le très-petit nombre d'intégrations théoriques qu'on a pu obtenir, mérite à peine d'être mentionné; et l'unique moyen des géomètres modernes, pour arriver dans tous les cas à la connaissance des quantités, consiste notoirement dans l'emploi, direct ou indirect, de cet algorithme des Séries.

« La nouvelle période des Mathématiques, qui se présente aujourd'hui, doit commencer avec la génération-neutre des quantités, mais non purement avec la génération-neutre relative, telle que l'est celle (521)' qui est opérée par les fractions continues, et qui ne saurait encore être considérée que comme une transition à cette nouvelle période, ou plutôt comme l'accomplissement de la période précédente: elle doit commencer essentiellement avec la génération-NEUTRE ABSOLUE, opérée par la détermination absolue des éléments n_1 , n_2 , n_3 , etc., dans les expressions (556), ou originellement dans les Séries communes (555) ou (498), qui rattachent ainsi absolument la Technique à la Théorie. Et cette nouvelle période des Mathématiques doit finir avec la génération THÉORIQUE UNIVERSELLE des quantités, opérée par la Méthode suprême (142), (143), etc., qui réalise définitivement le principe absolu des Mathématiques. »

C'est aux géomètres, surtout aux géomètres des siècles à venir, dans le cas où on leur laisserait parvenir nos ouvrages, de juger si, dans l'ouvrage présent, en y joignant, comme commentaires indispensables, nos ouvrages antérieurs, nous avons réellement opéré cette grande et définitive *ASSEMBLÉE DES MATHÉMATIQUES* que nous venons de caractériser, et qui, comme telle, doit ouvrir une nouvelle et dernière période pour cette difficile science du géomètre. — Quant à nous, en nous fondant sur les principes absolus qui nous ont servi à opérer cette décisive réforme, nous sommes convaincus qu'elle est, non-seulement commencée déjà, mais de plus accomplie définitivement. Et nous allons le prouver, du moins d'une manière provisoire, mais suffisante, et autant que nous le permettra l'espace ou plutôt le temps dont nous pouvons disposer, en donnant ici, par anticipation sur nos ouvrages ultérieurs, la solution des trois grands problèmes mathématiques du monde physique.

Avant tout, complétons ici les méthodes absolues que cette réforme des Mathématiques nous a fait découvrir. Et, pour cela, joignons à ces méthodes absolues, où cela peut devenir utile, l'usage de la génération-neutre relative, qui résulte de la réduction des fractions-continues en fractions ordinaires, et dont nous venons de tracer l'histoire en y signalant nos propres accomplissements. — Mais, après avoir bien distingué cette *génération-neutre purement relative*, qui, par l'application des règles des médiateurs (515), et surtout de notre loi de sommation (519), résulte de la réduction des fractions-continues en fractions ordinaires, et la *génération-neutre absolue*, qui forme maintenant notre méthode primordiale (729), etc., nous nous bornerons, pour ne plus rappeler inutilement ces principes, à désigner la première par la simple dénomination de GÉNÉRATION-NEUTRE, et la seconde par son nom caractéristique de MÉTHODE PRIMORDIALE, en considérant, d'une part, que c'est par cette génération-neutre que finit l'actuelle et purement relative période des mathématiques modernes, et de l'autre part, que c'est par cette MÉTHODE PRIMORDIALE que doit maintenant commencer la nouvelle et absolue période de ces sciences.

On doit savoir que la doctrine complète de cette génération-neutre relative, que désormais nous nommerons simplement génération-neutre, se trouve donnée vers la fin du second tome de notre Philosophie de la Technie algorithmique, d'où nous allons tirer effectivement les formules dont nous aurons besoin, en les indiquant par les numéros qui leur sont attachés dans cette Philosophie de la Technie; numéros que nous avons continués dans la présente Réforme des Mathématiques, et que nous continuerons dans ce Complément, en considérant que cette Réforme et son présent Complément ne sont rien autre que la continuation de notre Philosophie de la Technie algorithmique, dans laquelle, nommément dans ses sections ou tomes ultérieurs, devait être produite et accomplie ainsi cette réforme des mathématiques.

Nous nous bornerons donc ici à résumer, d'une manière générale et très-précise, les trois points principaux de cette doctrine de la génération-neutre des quantités. — Or, le premier de ces trois points est la forme générale (508) des séries qui, dans les mathématiques modernes, constituent la première et seule méthode universelle pour la génération des quantités, et par conséquent pour la solution des problèmes. Et cette forme générale (508) est (765)

$$Fx = A_0 + A_1 \cdot qx + A_2 \cdot (qx)^2 + A_3 \cdot (qx)^3 + \text{etc.}, \text{ etc.};$$

dans laquelle la fonction Fx est une fonction quelconque proposée, et la fonction qx , qui sert ainsi de mesure à l'évaluation de cette fonction problématique Fx , est une fonction arbitraire, limitée seulement dans son choix par les conditions de la possibilité de cette génération technique ou univer-

(4).

selle de toute quantité problématique Fx . Le cas le plus simple de cette génération des quantités par des séries, est manifestement lorsque la fonction génératrice fx a la forme $(x-a)$; cas qui est . . . (765)

$Fx = A_0 + A_1 \cdot (x-a) + A_2 \cdot (x-a)^2 + A_3 \cdot (x-a)^3 + \text{etc.}, \text{ etc.}$, et qui, lorsque $a=0$, est le célèbre et fécond théorème de Taylor, lequel, jusqu'à ces derniers temps, constituait l'instrument universel des mathématiques modernes. Et pour ce qui concerne la loi fondamentale de la détermination des coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc., dans la présente forme générale (765) des séries, nous venons de dire, dans le précédent exposé historique, que nous l'avons donnée sous les marques (166)' ou (420). Nous ajouterons seulement que, sous ces marques et sous celles qui en dépendent, nous avons donné cette loi fondamentale des séries (765) dans son absolu accomplissement, en présentant son expression au moyen de ses derniers éléments; de sorte qu'à cet égard la science est rigoureusement accomplie, et qu'il ne reste plus rien à y faire.

Le second des trois points principaux concernant la génération d'autres des quantités problématiques, est la transformation de la série générale (765) en fraction continue, suivant la forme générale (507), savoir . . . (766)

$$Fx = D_0 + \frac{fx}{D_1 + \frac{fx}{D_2 + \frac{fx}{D_3 + \frac{fx}{D_4 + \text{etc.}}}}}$$

dans laquelle cette génération technique supérieure de la fonction problématique Fx procède d'abord par rapport aux dénominateurs D_1, D_2, D_3 , etc., que nous nommons *caphs-hébraïques* ou *caphs-dénominateurs*, pour les distinguer des quantités analogues dont nous parlerons à l'instant. Et pour ce qui concerne la loi fondamentale de la détermination de ces dénominateurs progressifs, nous venons de dire, dans le précédent exposé historique, que nous l'avons donnée sous les marques (509) et (509)', et nous ajouterons ici que nous l'avons de même présentée dans son dernier accomplissement. — Pour calculer, par cette loi, les *caphs-dénominateurs* en question, il convient, afin de simplifier les expressions, de construire les quantités auxiliaires suivantes, d'abord, les quantités élémentaires . . . (767)

$$\begin{aligned} [A_1^2] &= A_2 - A_1 \cdot A_3, & [A_3 \cdot A_3] &= A_3 \cdot A_3 - A_1 \cdot A_4, \\ [A_2^2] &= A_3 - A_2 \cdot A_4, \text{ etc. ;} & & \text{et généralement} \end{aligned}$$

$$[A_p \cdot A_q] = A_p \cdot A_q - A_{p-1} \cdot A_{q+1},$$

qui, lorsque les indices p et q sont égaux, deviennent

$$[A_p^2] = A_p^2 - A_{p-1} \cdot A_{p+1};$$

et ensuite, les quantités composées . . . (767)

$$S_0 = A_1 \cdot [A_2, A_3] - A_2 \cdot [A_3^2],$$

$$S_1 = A_2 \cdot [A_3^2] - A_3 \cdot [A_1, A_3] + A_3 \cdot [A_2^2],$$

etc., etc. ;

les quantités A_1, A_2, A_3 , etc., étant les coefficients de la série générale (765) qu'il s'agit de transformer en la fraction-continue également générale (766). On trouvera alors facilement, par notre susdite loi fondamentale (509) et (509)', pour les dénominateurs progressifs $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$, etc. de cette fraction-continue (766), les expressions générales . . . (768)

$$\mathfrak{D}_0 = A_0, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{1}{A_1},$$

$$\mathfrak{D}_2 = -\frac{A_1^2}{A_2}, \quad \mathfrak{D}_3 = -\frac{A_2^2}{A_1 \cdot [A_3^2]},$$

$$\mathfrak{D}_4 = +\frac{[A_3^2]^2}{A_2 \cdot [A_3^2]}, \quad \mathfrak{D}_5 = +\frac{[A_3^2]^3}{[A_3^2] \cdot S_0},$$

etc., etc.

Considérons maintenant la fraction-continue sous la forme plus directe (514), savoir, . . . (769)

$$x = \mathfrak{C}_0 + \frac{\mathfrak{C}_1 \cdot \varphi x}{1 + \frac{\mathfrak{C}_2 \cdot \varphi x}{1 + \frac{\mathfrak{C}_3 \cdot \varphi x}{1 + \frac{\mathfrak{C}_4 \cdot \varphi x}{1 + \text{etc.}}}}$$

dans laquelle nous nommons *caphs-arabes* ou *caphs-numérateurs*, les quantités $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$, etc., qui forment ici les coefficients progressifs de la fonction génératrice φx de cette fraction-continue. Nous aurons alors, pour la loi que suit la détermination de ces caphs-numérateurs, la loi fondamentale (514)' de cette forme directe (514) des fractions-continues. Et si, d'après cette loi, on calcule les présents caphs-arabes, en se servant toujours des quantités auxiliaires (767) et (767)', on trouvera, pour leur détermination, les expressions générales . . . (770)

$$\mathfrak{C}_0 = A_0, \quad \mathfrak{C}_1 = A_1,$$

$$\mathfrak{C}_2 = -\frac{A_2}{A_1}, \quad \mathfrak{C}_3 = +\frac{[A_3^2]}{A_1 \cdot A_2},$$

$$\mathfrak{C}_4 = -\frac{A_1 \cdot [A_3^2]}{A_2 \cdot [A_3^2]}, \quad \mathfrak{C}_5 = +\frac{A_2 \cdot S_0}{[A_3^2] \cdot [A_3^2]},$$

etc., etc. ;

les quantités A_0, A_1, A_2, A_3 , etc., dont sont formées les quantités auxiliaires (767) et (767)', étant toujours les coefficients de la série générale (765) qui se trouve ainsi transformée en cette dernière fraction-continue (769).

Pour concevoir la relation des deux formes extrêmes (766) et (769) de ces nouvelles fractions-continues qui, comme les séries, constituent un algorithme technique ou universel, mais entièrement distinct de l'algorithme des séries, et de beaucoup supérieur à ce premier algorithme technique, il suffit d'examiner la relation (513)'' qui existe entre les caphs respectifs de leurs deux formes extrêmes, savoir, la relation . . . (771)

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{1}{2_1 \cdot 2_2}, \quad \mathfrak{J}_3 = \frac{1}{2_2 \cdot 2_3}, \quad \mathfrak{J}_4 = \frac{1}{2_3 \cdot 2_4}, \text{ etc. ;}$$

et par analogie, $\mathfrak{J}_i = \frac{1}{i \cdot 2_i}$; en ayant d'ailleurs $\mathfrak{J}_0 = 2_0$.

On voit, par cette relation, que la forme (766) des caphs-dénominateurs est la GÉNÉRATION ÉLÉMENTAIRE, et la forme (769), la GÉNÉRATION SYSTÉMATIQUE de ces fractions-continues universelles, en observant que les caphs-numérateurs $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$, etc., sont composés par la réunion des caphs-dénominateurs $2_1, 2_2, 2_3$, etc. Aussi, dans la génération primitive des fractions-continues, telle que nous l'avons découverte, sous la marque (ix), dans notre *Philosophie des Mathématiques* (pages 224 à 227), c'est sous la forme élémentaire (766) des caphs-dénominateurs qu'elles se trouvent ainsi produites primitivement. C'est aussi sous cette forme élémentaire (766) que les fractions-continues reçoivent la modification arithmétique que nous désignons par l'épithète de *numérales* (*Philosophie des Mathématiques*, (xxii), page 241), lorsque leur fonction génératrice φx devient égale à l'unité, et lorsqu'elles servent ainsi à la génération absolue des nombres, comme nous l'avons vu sous les marques (532)', etc., et (550) dans le second tome de la *Philosophie de la Technique*. Mais, sous la forme systématique (769), les fractions-continues sont manifestement plus propres à la génération technique ou universelle des fonctions problématiques, en ce que les caphs-numérateurs y constituent immédiatement les coefficients de leur fonction génératrice φx , et qu'elles conduisent ainsi plus directement à la génération-neutre de ces fonctions problématiques, comme nous allons le voir.

Le dernier des trois points principaux concernant cette génération-neutre des fonctions problématiques, est la sommation des fractions-continues (766), et surtout (769), c'est-à-dire, leur réduction en fractions ordinaires. Et, pour cela, les moyens connus consistaient dans le calcul consécutif (511), (511)'', et (515) des médiateurs progressifs P_0, P_1, P_2, P_3 , etc., et Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc., dont les rapports respectifs . . . (772)

$$\frac{Q_0}{P_0}, \quad \frac{Q_1}{P_1}, \quad \frac{Q_2}{P_2}, \quad \frac{Q_3}{P_3}, \quad \text{etc.}, \quad \text{et généralement} \quad \frac{Q_m}{P_m},$$

donnent, en fractions ordinaires, les résultats successifs de la réduction en question des fractions-continues (766) et (769), en de telles fractions ordinaires (772), constituant la génération-neutre progressive des fonctions Fx qui se trouvent ainsi transformées d'abord en fractions-continues (766) ou (769). En effet, comme nous l'avons vu sous la marque (516), ce calcul consécutif, des uns par les autres, des médiateurs P_1, P_2, P_3 , etc., et Q_1, Q_2, Q_3 , etc., conduit, pour leurs indices ou ordres pairs $m = 2\mu$, et pour leurs indices ou ordres impairs $m = (2\mu + 1)$, à la forme générale de leurs rapports respectifs, constituant la génération-neutre des fonctions Fx , savoir, pour leurs indices ou ordres pairs, à la forme générale . . . (773)

$$F_x = \frac{Q_{2\mu}}{P_{2\mu}} = \frac{Q_{2\mu}^{(0)} + Q_{2\mu}^{(1)} \cdot qx + Q_{2\mu}^{(2)} \cdot (qx)^2 + Q_{2\mu}^{(3)} \cdot (qx)^3 \dots + Q_{2\mu}^{(n)} \cdot (qx)^n}{P_{2\mu}^{(0)} + P_{2\mu}^{(1)} \cdot qx + P_{2\mu}^{(2)} \cdot (qx)^2 + P_{2\mu}^{(3)} \cdot (qx)^3 \dots + P_{2\mu}^{(n)} \cdot (qx)^n};$$

et pour les indices ou ordres impairs, à la forme générale . . . (773')

$$F_x = \frac{Q_{2\mu+1}}{P_{2\mu+1}} = \frac{Q_{2\mu+1}^{(0)} + Q_{2\mu+1}^{(1)} \cdot (qx) + Q_{2\mu+1}^{(2)} \cdot (qx)^2 \dots + Q_{2\mu+1}^{(n+1)} \cdot (qx)^{n+1}}{P_{2\mu+1}^{(0)} + P_{2\mu+1}^{(1)} \cdot (qx) + P_{2\mu+1}^{(2)} \cdot (qx)^2 \dots + P_{2\mu+1}^{(n)} \cdot (qx)^n};$$

formes ou expressions générales dans lesquelles, aux numérateurs et aux dénominateurs, les coefficients de leurs puissances progressives de la fonction génératrice (qx) se trouvent toujours parfaitement déterminés. Mais, ces coefficients ne se trouvent ainsi déterminés que par le calcul consécutif, des uns par les autres, des médiateurs en question P_1, P_2, P_3 , etc., et Q_1, Q_2, Q_3 , etc.; et il manquait à la science le moyen de calculer immédiatement chacun de ces coefficients, c'est-à-dire, il manquait le véritable moyen de la sommation des fractions-continues. Et ce moyen définitif, qui est manifestement la loi fondamentale pour la sommation des fractions-continues, nous l'avons donné sous la marque (519), en intégrant l'équation aux différences (515), qui sert de règle au susdit calcul consécutif des médiateurs P et Q . Mais, dans l'application de cette loi fondamentale (519), il ne faut pas perdre de vue que, d'après l'observation (532)^m, les médiateurs à indices négatifs, ont ici les valeurs $P_{-1} = 0$ et $Q_{-1} = 1$.

Or, en se servant de cette loi fondamentale (519) pour le calcul des coefficients dans les générations-neutres (773) et (773') d'une fonction problématique F_x , en supposant que cette fonction se trouve transformée d'abord en la fraction-continue systématique (769), dont les cnphs-numérateurs ont les valeurs (770), provenant de la série générale (765), par laquelle cette fonction F_x est donnée, on obtiendra, pour les ordres progressifs de la généra-

tion-neutre de cette fonction, les expressions générales . . . (774)

$$Fx = \frac{Q_1}{P_1} = A_0 + A_1 \cdot (\varphi x),$$

$$Fx = \frac{Q_2}{P_2} = A_0 + \frac{A_1^2 \cdot (\varphi x)}{A_1 - A_2 \cdot (\varphi x)},$$

$$Fx = \frac{Q_3}{P_3} = A_0 + \frac{A_1 \cdot A_2 \cdot (\varphi x) + [A_2^2] \cdot (\varphi x)^2}{A_2 - A_3 \cdot (\varphi x)},$$

$$Fx = \frac{Q_4}{P_4} = A_0 + \frac{A_1 \cdot [A_2^2] \cdot (\varphi x) - S_0 \cdot (\varphi x)^2}{[A_2^2] - [A_2 \cdot A_3] \cdot (\varphi x) + [A_3^2] \cdot (\varphi x)^2},$$

$$Fx = \frac{Q_5}{P_5} = A_0 + \frac{A_1 \cdot [A_2^2] \cdot [A_3^2] \cdot (\varphi x) - [S_0 \cdot [A_2^2] - A_1 \cdot A_2 \cdot S_0] \cdot (\varphi x)^2 + [A_2^2] \cdot S_0 \cdot (\varphi x)^3}{[A_2^2] \cdot [A_3^2] - [A_2 \cdot A_3] \cdot (\varphi x) + [A_3^2] \cdot (\varphi x)^2 - A_2 \cdot S_0 \cdot (\varphi x)^2},$$

etc., etc.

Telles sont donc les expressions générales de cette progressive génération-neutre de toutes fonctions problématiques Fx , à l'aide des coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc., de la série générale (765), par laquelle ces fonctions sont données. Et l'on conçoit facilement qu'en se servant de même de nos trois lois fondamentales (166)¹ ou (420), (514)², et (519), on pourra, d'après ces formes générales (773) et (773)', poursuivre à tel ordre que l'on voudra, cette présente génération-neutre (774) des fonctions problématiques Fx , quelque compliquées que puissent être leurs valeurs.

Mais, pour embrasser ainsi, par cette génération-neutre des fonctions problématiques, toutes leurs valeurs possibles, simples ou multiples, réelles ou idéales (imaginaires), il faut, d'après leur expression complète (523), savoir,

$$Fx = \frac{Q_{m+1}}{P_{m+1}} = \frac{Q_m + Q_{m-1} \cdot X(m+1)}{P_m + P_{m-1} \cdot X(m+1)}, \quad (775)$$

il faut, disons-nous, joindre à un ordre quelconque m de cette génération-neutre, la quantité complémentaire $X(m+1)$, qui est donnée par l'une des équations (528), (529)', etc., du second degré, du troisième degré, etc., suivant que la fonction problématique Fx peut avoir une valeur double, ou triple, ou multiple quelconque, et que cette valeur peut ainsi être réelle ou idéale (imaginaires).

Nous ne nous arrêterons pas ici à reproduire les conditions de la détermination de cette quantité complémentaire $X(m+1)$; conditions que nous avons fixées et développées amplement dans l'ouvrage d'où nous tirons ces différentes formes de la génération-neutre des fonctions problématiques Fx .

Nous nous bornerons à faire remarquer que les équations auxiliaires (525)^{re} qui font partie de ces conditions, et qui servent à déterminer les rapports . . .
 . . . (776)

$$\frac{M_3}{M_1}, \quad \frac{M_5}{M_1}, \quad \frac{M_7}{M_1}, \text{ etc. ,}$$

dans les susdites équations finales (528), (529)', etc., ont proprement la forme pratique . . . (776)'

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{Q(m+1)_{3p}}{P(m+1)_{3p}} + \frac{M_3}{M_1} \cdot \frac{Q(m+3)_{3p}}{P(m+3)_{3p}} + \frac{M_5}{M_1} \cdot \frac{Q(m+5)_{3p}}{P(m+5)_{3p}} + \text{etc. ,} \\ 0 &= \frac{Q(m+1)_{3p+2}}{P(m+1)_{3p+2}} + \frac{M_3}{M_1} \cdot \frac{Q(m+3)_{3p+2}}{P(m+3)_{3p+2}} + \frac{M_5}{M_1} \cdot \frac{Q(m+5)_{3p+2}}{P(m+5)_{3p+2}} + \text{etc. ,} \\ 0 &= \frac{Q(m+1)_{3p+4}}{P(m+1)_{3p+4}} + \frac{M_3}{M_1} \cdot \frac{Q(m+3)_{3p+4}}{P(m+3)_{3p+4}} + \frac{M_5}{M_1} \cdot \frac{Q(m+5)_{3p+4}}{P(m+5)_{3p+4}} + \text{etc. ,} \\ &\text{etc. , etc. ;} \end{aligned}$$

ou suivant, d'ailleurs, pour la fixation du nombre de ces quantités auxiliaires M_1, M_3, M_5 , etc., ou plutôt de leurs susdits rapports (776), et par conséquent du nombre des présentes équations pratiques (776)', les règles que nous avons indiquées dans l'ouvrage dont il s'agit.

Nous aurons donc définitivement, dans l'expression générale (775), la forme complète de la génération-neutre de toutes fonctions problématiques Fx , quelles que puissent être leurs valeurs, simples ou multiples, et réelles ou idéales (imaginaires). Et c'est là précisément le terme auquel, dans son état purement relatif, on se cherchoit encore que la VALEUR des quantités inconnues par leur comparaison ou RELATION avec des quantités données, qui forment ainsi leur MESURE, c'est là, disons-nous, le terme auquel la science est parvenue par l'introduction des universelles fractions-continues d'Euler, et par la rédaction de ce supérieur algorithme technique à la présente génération-neutre (773), (773)', et (775) de toutes fonctions ou quantités problématiques.

Tel est donc aussi l'accomplissement réel et décisif des mathématiques modernes, dans l'ÉTAT RELATIF où elles sont demeurées jusqu'à ce jour, en n'employant encore les procédés universels, c'est-à-dire, les procédés techniques que pour la détermination de la VALEUR de toutes fonctions ou quantités inconnues par leur comparaison à des quantités données. Et cet accomplissement des mathématiques modernes constitue manifestement la DÉMARCAISON PRÉCISE entre cet état purement RELATIF où nous avons trouvé la science, et son état ABSOLU auquel nous l'élevons aujourd'hui, en lui apportant les méthodes absolues, également techniques ou universelles, pour la construction de la NATURE elle-même des quantités ou des fonctions problématiques. En effet, par ces

méthodes absolues, telles que nous venons de les produire dans cet ouvrage, les fonctions problématiques Fx reçoivent immédiatement la construction de leur nature, par leurs propres éléments absolus, qui sont nécessairement impliqués dans la nature même des problèmes, sans qu'on ait ici besoin d'aucune comparaison ou relation avec d'autres quantités données et arbitraires, telles que l'ont été, avant nous, les fonctions génératrices et arbitraires px , qui, dans les deux algorithmes techniques, des séries (765) et des fractions continues (766) ou (769), servaient de *maxime* à la simple évaluation des quantités ou des fonctions inconnues, dans ces deux algorithmes techniques, disons-nous, qui, jusqu'à ce jour, étaient les seuls procédés universels que la science avait pour la détermination des quantités, et par lesquels, comme nous venons de l'apprendre, elle ne pouvait déterminer que la *valeur* et nullement la *nature* elle-même des quantités inconnues.

C'est ici le lieu de répéter, par anticipation, ce que, dans la Supplément à la seconde division (au deuxième tome) de cet ouvrage, c'est-à-dire, dans notre Manifeste historique, nous disons concernant les critères purement mathématiques pour la distinction entre la *théorie* et la *technique* de la science, critères que nous avons déjà mentionnés plus haut, et dont les géomètres doivent hien se pénétrer pour s'élever au point de vue de la présente réforme des mathématiques. Voici littéralement ce passage, tel qu'il s'y trouve à l'occasion de la prétendue démonstration que les académiciens de Paris veulent donner du théorème de Taylor, de cette loi primitive de l'algorithme des séries :

« Pour faire ici quelque chose d'agréable à tous les géomètres, et pour faire mieux reconnaître les vrais principes de cette mystérieuse origine et de cette incompréhensible nature des séries, nous les prions de relire et de bien méditer ce que, dans le présent Manifeste, nous en disons sous les marques (4) à (9). Et, pour leur faire distinguer, dans tous les cas, par un simple mécanisme mathématique, et sans aucune considération philosophique de leur science, les deux nouvelles et décisives branches des mathématiques, la *théorie* et la *technique*, de laquelle distinction dépend précisément la connaissance de la *nature* de la fonction développée en série, et de la *valeur* de cette fonction mesurée par une telle série, il suffira de les prier de ne pas oublier, d'après ce que nous avons dit plus haut à l'occasion de la loi suprême (3), savoir, à l'occasion de la loi . . . (777)

$$Fx = A_0.\Omega_0 + A_1.\Omega_1 + A_2.\Omega_2 + A_3.\Omega_3 + \text{etc.}, \text{ etc.},$$

« que, dans l'application de cette loi universelle à la détermination d'une fonction Fx , résultant d'un problème quelconque, toutes les fois que les fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., sont données ou prises d'avance, indépendamment de la nature de la fonction Fx , et même indépendamment

des conditions du problème duquel résulte cette fonction, le cas que représente alors la loi suprême, n'offre qu'une évaluation de cette fonction problématique Fx , formant ce que l'on nomme son développement, et ayant pour mesures de sa valeur ces fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., prises arbitrairement; tandis que, toutes les fois que les fonctions génératrices ces $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., sont déterminées uniquement par les conditions mêmes du problème duquel résulte la fonction Fx qu'il s'agit de connaître, le cas qui représente alors la loi suprême offre une véritable construction de la fonction problématique Fx , formant ce que nous nommons sa *génération progressive*, et ayant pour éléments de sa nature, ces fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., déterminées ainsi par les conditions du problème. — Or, comme nous l'avons dit plusieurs fois, cette évaluation des fonctions, qui n'en fait connaître que la valeur, est l'objet général de la technique des mathématiques; et elle se trouve déjà, par l'existence effective de méthodes universelles, au pouvoir de la science. Au contraire, cette construction des fonctions, qui fait connaître leur nature, est l'objet général de la théorie des mathématiques; et elle doit maintenant, par l'introduction de méthodes universelles, qui n'y existent pas encore, être accomplie par la présente réforme des mathématiques.

Ainsi, la distinction entre la théorie et la technique des mathématiques, du moins pour ce qui concerne l'Algorithme, se trouve maintenant fixée, d'une manière populaire, par des critères purement mathématiques. Et puisque, d'après ce que nous avons reconnu plus haut, la technique a proprement pour objet la création des quantités inconnues ou problématiques, et que, pour cela, elle se sert de procédés universels, c'est-à-dire, uniformes pour toutes les générations des quantités, nous concluons que les branches systématiques de la technique, nommément, les susdites trois branches finales, l'*Interpolation*, et surtout la *Loi suprême* et le *Problème-universel*, qui forment la technique absolue, constituent tout à la fois et la technique et la théorie, parce que, d'une part, elles suivent des procédés universels, et elles sont ainsi tout à fait techniques, et que, de l'autre part, elles ont pour objet la construction de la nature des quantités, et elles sont ainsi essentiellement théoriques. Mais, dans cette construction universelle de la nature des fonctions, d'après la loi suprême (777), il peut arriver que cette génération théorique soit finie, en s'arrêtant à l'une des fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., toutes les suivantes étant alors zéro. Il existe donc deux modes théoriques de la génération ou de la construction de la nature des fonctions, savoir, l'un fini, lorsque, dans la loi suprême (777) par laquelle s'opère cette génération théorique, elle s'arrête à l'une des fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., et l'autre infini, lorsque cette génération théorique ne s'arrête à aucune de ces fonctions génératrices, et demande, pour être accomplie, un nombre indéfini

de ces fonctions $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc. Et dans ce dernier cas, d'après les critères présents, cette génération technique *absolue* se distingue de la pure génération technique *relative*, qui s'opère par les algorithmes techniques *élémentaires*, en ce que, dans cette application des algorithmes techniques *systématiques*, toutes les fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., sont déterminées par les conditions mêmes du problème où il s'agit de découvrir la nature de la fonction Fx ; tandis que dans la pure génération technique *relative*, dans celle qui, d'après ce que nous avons reconnu plus haut, s'opère par l'application des algorithmes techniques *élémentaires*, ces fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc. dans la loi suprême (777), par laquelle elle s'opère également, sont des fonctions arbitraires ou indépendantes de la nature du problème, et ne forment ainsi qu'autant de mesures distinctes pour la détermination de la valeur de la fonction cherchée.

En résumé ces hautes considérations philosophiques, qui se trouvent maintenant déterminées par de positifs critères mathématiques, il est manifeste, d'abord, que la science se compose de deux branches principales, la *théorie* et la *technie*, suivant que les fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., dans la loi suprême (777), par laquelle s'opère toute génération des quantités, sont déterminées par les conditions mêmes du problème qui propose la quantité inconnue Fx , ou bien que ces fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., sont prises indépendamment de ce problème, et qu'elles forment ainsi des quantités arbitraires. Dans le premier cas, dans la théorie, les fonctions génératrices Ω constituent les *éléments propres ou absolus* de la quantité problématique Fx , et la loi suprême (777) présente alors la construction de la nature elle-même de cette quantité cherchée Fx . Et dans le second cas, dans la technique, du moins dans la technique relative, les fonctions génératrices Ω forment, comme termes de comparaison, les mesures de la quantité problématique Fx , et la loi suprême (777) ne présente alors que l'évaluation ou la détermination de la valeur de la quantité en question Fx . Toutefois, en considérant la technique dans toute sa généralité, comme formant l'ensemble des procédés algorithmiques pour la création des quantités problématiques ou non-données Fx , procédés qui sont nécessairement universels, parce qu'ils s'exercent par notre faculté créatrice de la raison, et par conséquent d'après la loi universelle (777) que suit notre raison dans son application à la création du générer des quantités, on doit y distinguer, d'une part, la technique relative, qui n'opère ainsi la création des quantités que par leur comparaison ou relation à des quantités arbitraires $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., et qui ne donne conséquemment, à l'aide de ces mesures Ω , rien autre que l'évaluation ou la valeur des quantités cherchées, et de l'autre part, la technique absolue, qui opère la création des quantités avec des fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., déterminées par les conditions mêmes du

problème, et qui donne conséquemment, à l'aide de ces *éléments propres* Ω , la *construction* de la *NATURA* elle-même des quantités problématiques. Ainsi, cette *technie absolue*, qui s'exerce par les trois susdits algorithmes techniques systématiques, l'*Interpolation*, la *Loi suprême* et le *Problème-universel*, et qui donne immédiatement la *NATURA* des quantités, constitue proprement la *TRUOIS* elle-même, en la bornant de cette manière à cette *construction propre* des quantités; et la *technie relative*, qui s'exerce par les susdits cinq algorithmes techniques élémentaires, les *Séries*, les *Fractions continues*, les *Facultés exponentielles*, les *Produites continues*, et le *Canon algorithmique*, et qui ne donne que médiatement la *VALEUR* des quantités, constitue proprement la *TECHNIE* elle-même ou strictement dite, en la bornant de même à cette simple *évaluation comparative* des quantités.

Ayant ainsi fixé à priori, par la seule loi suprême (777), ces deux branches principales des mathématiques, leur *TRUOIS* et leur *TECHNIE*, il nous sera maintenant facile de déterminer toutes leurs branches accessoires, et de distinguer, par cette détermination à priori, l'état actuel de la science, et son état ultérieur, auquel il faut la porter désormais. — Nous allons le faire.

Pour ce qui concerne d'abord la *TECHNIE*, qui, dans son application originelle à la simple *NATURA* des quantités, est la plus ancienne branche pratique de la science, on voit, dans la loi suprême (777), qui régit toutes les générations concevables des quantités, que, pour l'évaluation ou la mesure de toute quantité inconnue Fx , les fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., de cette quantité inconnue, qui forment alors les *NATURAS* pour son évaluation, sont tout à fait arbitraires, et par conséquent indépendantes de la nature de la quantité Fx qu'il s'agit d'évaluer. Et, en effet, dès la plus haute antiquité, la mesure des quantités était toujours choisie arbitrairement; et de plus, cette mesure servait universellement pour toutes les quantités de même nature. Quant à la détermination des coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc., dans cette même loi suprême (777) qui servait ainsi à la pure mesure numérique des quantités inconnues Fx , c'était là proprement l'objet de la science dans le développement progressif de cette partie technique. Ainsi, on déterminait d'abord ces coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc., par l'addition et la soustraction de certaines unités complexes, prises pour mesures progressives, comme dans les systèmes de numération des Grecs et des Romains, et des peuples orientaux dont ils les avaient reçus. On déterminait ensuite ces coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc., par la multiplication, ou plutôt par la division progressive des nombres inconnus par des nombres donnés, pris ainsi pour les mesures progressives, comme dans notre système actuel de numération, provenant des Arabes, qui l'ont probablement reçu des Indiens, et comme, par un procédé alternatif, dans l'évaluation continue des quantités in-

commensurables, par exemple, de la diagonale du carré par son côté, pris pour la mesure, et devenant ainsi la fonction génératrice fx d'une fraction continue. Nous avons, dans notre Philosophie des Mathématiques, sous les marques (xvii) à (xxiii), donné les lois de cette génération technique des nombres, que nous y nommons *algorithme de numérales*, et *algorithme de fractions-continues numérales*, en embrassant ainsi tous les systèmes possibles de cette génération numérique. Et nous devons observer que le plus simple de ces systèmes de numération, savoir, le système binaire, paraît avoir déjà été connu des Chinois, si c'est là la véritable signification de leur *Cova de Fohi*. — Postérieurement et comme transition aux modernes procédés techniques, on a conçu, pour la détermination des coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc., en question, le procédé nommé *méthode des coefficients indéterminés*. Enfin, après la découverte du calcul différentiel, la loi de Taylor, pour la génération des séries, servit à déterminer d'une manière définitive les coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc., dans la loi suprême (777), pour l'évaluation universelle de toute fonction problématique Fx , au moyen d'une fixation arbitraire des fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., de cette loi suprême, nommément au moyen de la fixation arbitraire . . . (778)

$$\Omega_0 = x^0, \quad \Omega_1 = x, \quad \Omega_2 = x^2, \quad \Omega_3 = x^3, \text{ etc., et généralement, } \Omega_n = x^n.$$

qui, d'après les principes métaphysiques que, sous les marques (1) à (1x), nous avons dévoilés dans notre Philosophie des Mathématiques, établit, pour cette détermination de la valeur de la fonction problématique Fx , la *musica progressiva* x . Et, par le procédé inverse, d'après les mêmes principes métaphysiques (1) à (1x), Euler accomplit cette évaluation universelle des fonctions problématiques Fx , en transformant les séries en fractions continues, par leur simple et continuelle réduction de numérateurs en dénominateurs, suivant les règles philosophiques que, sous les marques (9) à (14), nous avons fixées pour cette réduction dans le premier tome de la Philosophie de la Technique algorithmique. — Ainsi, tout ce qui concerne l'évaluation ou la détermination de la valeur des fonctions problématiques Fx , évaluation qui constitue les Mathématiques modernes, telles que, par suite de la découverte du calcul différentiel, elles se sont développées depuis Taylor jusqu'à Euler, toute cette évaluation des fonctions, formant la technique des mathématiques, du moins la technique relative ou strictement dite, se trouve déjà accomplie aujourd'hui; et c'est aux Mathématiques modernes qu'est dû cet accomplissement de la science, dans tout ce qui a pour objet la simple détermination de la valeur des fonctions problématiques Fx , c'est-à-dire, la génération de ces fonctions, d'après la loi suprême (777), lorsque les fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., dans cette loi sont encore des fonctions arbitraires, et ne constituent ainsi que des termes de comparaison, nommément des *ma-*

servis pour l'évaluation des fonctions inconnues Fx . — Dans les deux tomes de notre sésdite Philosophie de la Technique, en partant de la loi suprême (777), considérée comme principe unique et absolu de la science, nous avons reproduit systématiquement, et accompli définitivement tout ce qui concerne cette partie technique de la science, ayant pour objet la détermination de la valeur des fonctions, et constituant ainsi exclusivement les Mathématiques modernes; de sorte que, dès aujourd'hui, cette partie de la science, la TECHNIQUE, se trouve complètement achevée.

Pour ce qui concerne ensuite la THÉORIE, qui a pour objet la construction de la NATURE elle-même des quantités problématiques Fx , et dont l'origine paraît remonter aux spéculations mathématiques de Thalès, nous avons vu qu'elle diffère de la technique que nous venons de caractériser, en ce que, dans la génération de ces quantités problématiques Fx , en vertu de la loi suprême (777), qui est la loi universelle et unique pour toute génération des quantités, les fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., ne sont plus de simples fonctions arbitraires, mais bien des fonctions déterminées par les conditions mêmes du problème qui propose la découverte de la fonction Fx , et elles constituent ainsi les éléments propres qui entrent dans la construction de la NATURE de cette fonction Fx . — Or, nous avons également vu plus haut que, dans cette construction universelle de la nature des fonctions, d'après la loi suprême (777), il peut arriver que cette génération théorique des fonctions soit finie, en s'arrêtant à l'une des fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., lorsque toutes les fonctions suivantes deviennent zéro. Et nous en avons conclu qu'il existe deux modes théoriques de la génération ou de la construction de la nature des fonctions, savoir, 1°. le mode fini, lorsque, dans la loi suprême (777), par laquelle s'opère cette génération théorique, elle s'arrête à l'une des fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., et 2°. le mode infini, lorsque cette génération théorique ne s'arrête à aucune de ces fonctions génératrices, et demande, pour être accomplie, un nombre indéfini de ces fonctions $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., toutes étant déterminées par les conditions mêmes du problème.

Nous découvrons ainsi, dans ce mode infini de génération théorique, un tout nouvel ordre dans la science. — En effet, parmi ces deux modes précis et distincts de génération, dont se compose la théorie, le mode fini de cette génération théorique des fonctions, quoiqu'il soit fondé sur la loi suprême (777), peut néanmoins subsister et se produire indépendamment de cette loi, en se réalisant, à chaque fois, par des procédés spéciaux, et en quelque sorte propres aux cas individuels pour lesquels suffit ce mode fini de la génération théorique des fonctions. On conçoit ainsi tout à la fois, d'une part, que ce mode fini de génération pouvait être connu avant la découverte de la loi suprême (777), et de l'autre part, que le mode infini de cette génération théo-

rique des fonctions ne pouvait être connu avant la découverte de cette loi suprême des mathématiques. Et l'histoire de la science confirme cette assertion. En effet, tout ce qui, jusqu'à ce jour, à cette époque présente de la découverte de la loi suprême, se rapporte à la théorie de la science, c'est-à-dire, à cette génération théorique ou construction de la nature elle-même des fonctions problématiques Fx , s'opère uniquement par des procédés finis, ou, comme on les nomme, par des *formules finies*, au point que les géomètres ne peuvent même pas concevoir encore des *formules indéfinies* pour la construction théorique de la nature des fonctions. Cependant, nous venons de reconnaître, par la découverte de la loi suprême (777), c'est-à-dire, de la loi . . . (777)

$$Fx = A_0.\Omega_0 + A_1.\Omega_1 + A_2.\Omega_2 + A_3.\Omega_3 + \text{etc.}, \text{ etc.},$$

que, tout en y déterminant les fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., par les conditions mêmes du problème qui demande la fonction Fx , il est possible qu'on ne puisse ainsi accomplir la génération théorique ou la construction de la nature même de la fonction cherchée Fx , autrement que par un *nombre infini* de ces fonctions génératrices Ω . Bien plus, on croioit facilement que, dans tous les grands problèmes des mathématiques, il ne doit arriver que très-rarement que cette présente génération théorique (777) des fonctions cherchées Fx , puisse s'accomplir par un *nombre fini* des fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., parce que ces fonctions génératrices ne peuvent être formées que par la combinaison des algorithmes, élémentaires et systématiques, qui, d'après la loi de création, constituent l'Algorithmie, et qui, comme nous l'avons vu dans le système architectonique de cette science, sont en nombre fini.

De là vient précisément qu'enot réduite à ce seul mode foi de la génération théorique des fonctions, la science n'a pu, jusqu'à ce jour, résoudre aucun des grands problèmes mathématiques. Ainsi, forcée de demeurer dans une sphère finie de génération théorique des quantités, la science actuelle ne peut atteindre que les tout premiers pas dans la solution des grandes questions qui lui sont proposées. Elle ne peut résoudre les équations immanentes, c'est-à-dire, les équations algébriques ordinaires, que jusqu'au quatrième degré, sans pouvoir même se rendre compte de son impuissance; et elle ne peut absolument résoudre aucune question transcendante. Elle ne peut non plus intégrer les équations différentielles qu'au premier ordre; et elle ne peut, rigoureusement parlant, intégrer aucune fonction différentielle dont on ne connaisse d'avance, par un tarif, l'intégrale correspondante. En un mot, dans toutes les questions mathématiques, la science actuelle, étant limitée à des procédés ou générations finies des quantités, reste partout aux simples abords de ces questions; et ne pouvant les résoudre théoriquement, elle recourt partout

à la technie pour pouvoir, à défaut de la *nature* des quantités que demandent ces problèmes, obtenir au moins leur *valeur*. Et lorsque les géomètres s'obstinent à faire des recherches théoriques, car il existe notoirement une infinité de relations théoriques entre les quantités, ils ne découvrent que ces relations isolées qui, à très-peu d'exceptions près, ne sont que des *niaiseries* mathématiques. — Pour s'expliquer cette impuissance de la science actuelle, il faut, dans ces hautes questions de la génération théorique des fonctions problématiques, comparer les géomètres d'aujourd'hui à ces arithméticiens qui voudraient exprimer les nombres irrationnels ou même transcendants par des nombres entiers ou par des fractions finies, dans l'impuissance où ils sont de concevoir qu'il existe dans le monde d'autres nombres, et surtout des nombres déterminés, comme, par exemple, le rapport de la diagonale du carré à son côté, ou celui de la circonférence du cercle à son rayon, qui sont produits par une infinie génération numérique.

C'est donc là l'état imparfait de la science que nous avons trouvé. Et l'on comprendra maintenant, avec facilité, en quoi consiste proprement notre présente réforme des mathématiques, lorsqu'on aura appris que, par la découverte de la loi suprême des mathématiques (777), nous dévoilons ce *MODUS OPERANDI* et *INCOGNITUS* de la génération théorique des fonctions, par le moyen duquel, en déterminant successivement toutes les fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., par les *conditions mêmes* des problèmes, on peut construire progressivement la nature elle-même des fonctions ou quantités Fx que demandent ces problèmes, et l'on peut ainsi résoudre définitivement tous ces problèmes, quelque grands et compliqués qu'ils puissent être.

Il ne restait donc, pour accomplir cette réforme des mathématiques, qu'à découvrir les procédés par lesquels, pour tout problème mathématique, on puisse ainsi, dans la loi suprême (777), déterminer successivement, par les conditions mêmes de ces problèmes, les fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., afin d'obtenir cette progressive et indéfinie génération théorique de la fonction Fx que demande le problème proposé. Et ce sont précisément ces procédés que nous venons de faire connaître dans l'ouvrage présent, en y produisant les *MÉTHODES ABSOLUES* pour cette solution théorique et universelle de tous les problèmes des mathématiques, nommément, 1°. la *MÉTHODE SUPRÊME* (142), (143), etc., qui dérive immédiatement de la loi suprême elle-même des mathématiques; 2°. la *MÉTHODE SECONDAIRE* (760) et (764), qui résulte de l'application immédiate du problème-universel, de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques; et 3°. la *MÉTHODE PRIMORDIALE* (729), qui, par une anticipation technique sur la méthode suprême, doit servir de transition de l'état actuel et imparfait de la science à son état futur et absolu, formant l'objet de la présente réforme des mathématiques. — Nous ne rappelons pas ici notre *MÉTHODE TÉLÉOLOGIQUE*, quoiqu'elle soit également une des méthodes principa-

les de la science, en tant qu'elle se fonde sur la troisième loi fondamentale des mathématiques, et quoique nous l'ayons également produite dans l'ouvrage présent, sous les marques (308) et (310), parce que, comme base de notre réforme de la Théorie des Nombres, elle porte exclusivement sur la *FINALITÉ* entre les éléments hétérogènes de la science; et elle ne constitue ainsi qu'une *méthode contingente*, et non une *méthode absolue*, comme nous l'avons déjà prouvé plus haut, en donnant la déduction de la *Méthodologia des sciences* (page 257 et suiv.).

Or, dans toutes ces méthodes absolues des mathématiques, telles que nous venons de les produire dans l'ouvrage présent, toutes leurs conditions fondamentales sont fixées rigoureusement; et nous ne doutons pas que ceux des géomètres qui auront étudié et approfondi ces méthodes, en remontant à nos ouvrages antérieurs, dont nous les avons déduites, ne puissent s'en servir immédiatement, sans qu'il soit besoin d'explication ultérieure. D'ailleurs, nous avons éclairci l'usage de ces méthodes absolues et les appliquant chacune à un exemple. Ainsi, nous avons appliqué la méthode suprême (142), (143), etc., à la création même de la méthode primordiale (729), qui forme conséquemment, comme génération-neutre absolue, une anticipation technique sur cette méthode suprême. Nous avons appliqué de même la méthode secondaire (760) et (764), à la solution d'une équation différentielle du troisième ordre (746) qu'on nous a proposée à cette fin, il y a trente-six ans, comme nous le dirons ci-après. Nous avons, enfin, appliqué la méthode primordiale (729) à l'intégration de la différentielle logarithmique (685), en choisissant cette fonction simple pour nous mettre à la portée des illustres académiciens de Paris.

Néanmoins, quelque précis et clair que soit l'exposé que, dans l'ouvrage présent, nous avons fait de ces trois méthodes absolues, qui accomplissent la science, et qui suffisent ainsi pour la solution de tous les problèmes des mathématiques, nous allons, dans ce Complément, avant d'aborder les grands problèmes des mathématiques appliquées, ajouter à ces méthodes absolues quelques déterminations accessoires que leur offre la génération-neutre (773), (773'), et (775) des quantités, avec laquelle la science a accompli la technique, et dont l'utilité, pour tout ce qui concerne l'évaluation des fonctions, ne doit pas être méconnue, ni par conséquent négligée. Mais, nous ne le ferons que pour les deux dernières de ces méthodes absolues, savoir, pour la méthode primordiale et pour la méthode secondaire; car, pour ce qui concerne la première de ces méthodes, la méthode suprême, elle subsiste en tout par elle-même, comme nous l'avons reconnu plus haut (pages 386 et 387), et elle ne saurait conséquemment recevoir aucune détermination étrangère.

Or, en examinant d'abord, dans cette vue d'un accomplissement technique, la méthode primordiale (729), on reconnaît facilement que la série complémentaire (729)" peut, par le moyen de la présente génération-neutre (773) et

(775), recevoir une détermination plus accomplie. Il suffira, pour cela, de comparer cette série complémentaire (729)^{iv}, avec notre présente série générale (765), en établissant les relations suivantes . . . (779)

$$A_0 = \frac{x}{x+1}, \quad A_1 = \frac{x}{x+2}, \quad A_2 = \frac{x}{x+3}, \text{ etc.}, \quad A_p = \frac{x}{x+p+1};$$

$$\text{et} \quad \varphi x = \frac{x-a}{x+a}.$$

On conçoit que, par cet accomplissement de la série complémentaire (729)^{iv}, en la transformant en génération-neutre (773) et (775), la méthode primordiale (729) recevra une détermination complémentaire qui la rendra éminemment utile dans tous les cas. En effet, lorsque cette série complémentaire (729)^{iv} serait divergente, ce qui peut arriver, soit par suite de ce que le nombre ω des parties constituantes P dans la génération théorique $\Sigma(\omega)$ ne serait pas suffisant, soit par suite de ce que la valeur de la fonction problématique Fx deviendrait idéale (imaginaire), soit, enfin, par suite de ce que la différence $(x-a)$, qui entre dans les parties constituantes P de la génération théorique $\Sigma(\omega)$, serait trop grande, lorsque, disons-nous, la série complémentaire (729)^{iv} serait ainsi divergente, sa transformation en génération-neutre (773) et (775) la rendrait propre à une immédiate détermination numérique. — Fa généralement, dans toute application de la méthode primordiale (729), on doit toujours, pour avoir une détermination plus accomplie des quantités cherchées, transformer sa série complémentaire (729)^{iv} en génération-neutre (773) et (775), en se bornant même souvent, lorsque cela peut suffire, à nos présentes expressions générales (774) de cette génération-neutre.

En examinant ensuite, dans cette même vue d'un accomplissement technique, la méthode secondaire (760) et (764), on reconnaît tout aussi facilement que la *génération-mixte* (760), qui est le résultat de l'application de cette méthode absolue, peut également, par le moyen de la présente génération-neutre (773) et (775), recevoir une détermination plus accomplie, et peut ainsi, d'une manière aussi simple que facile, rendre superflus, et par conséquent inutiles, l'*anticipation-théorique* (764) qui donne le même résultat que la *génération-mixte* (760), mais qui le donne d'une manière très-compiquée. Il suffira de nouveau de comparer cette *génération-mixte* (760) avec notre présente série générale (765), en établissant les relations suivantes . . . (780)

$$A_0 = Q_0, \quad A_1 = Q_1, \quad A_2 = Q_2, \quad A_3 = Q_3, \quad \text{etc.};$$

$$\text{et} \quad \varphi x = (a - \omega).$$

Et si, en ne perdant pas de vue que cette méthode secondaire consiste dans l'application du problème-universel à la résolution des équations de tous les genres, on examine cette méthode, telle que son procédé est fixé dans la *Refutation de Lagrange*, sous les marques (17) à (23), on découvre facilement, par la raison capitale que la solution (15) du problème-universel (13)

est donnée par les *éléments propres* x_1, x_2, x_3 , etc., de ce problème, et non par quelques quantités arbitraires qui formeraient simplement des *mesures*, c'est-à-dire, par la raison capitale que cette solution (15) du problème-universel (13), quoiqu'elle soit sous la forme d'une série, constituée, d'après nos susdits critères, une véritable *génération théorique*, et non une simple *génération technique*, on découvre, disons-nous, que la *génération finale* (22) de l'inconnue x , c'est-à-dire, notre présente *génération* (760) de cette inconnue, quoiqu'elle soit en apparence une *génération mixte*, mi-théorique et mi-technique, en tant qu'elle dépend de la transformation technique (750) ou (752) de l'équation proposée (744), n'en est pas moins en réalité une pure *génération théorique*, parce que, dans cette transformation (750) ou (752), à laquelle s'applique finalement le problème-universel, les puissances progressives $(\varphi a)^0, (\varphi a)^1, (\varphi a)^2, (\varphi a)^3$, etc., qui correspondent ici aux susdits éléments-propres x_1, x_2, x_3 , etc., du problème-universel, sont également des éléments propres, et même, en quelque sorte, parce que ces puissances sont nécessaires et inévitables, des *éléments absolus* de cette transformation (750); de sorte que les termes progressifs Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc., dans la *génération finale* (760) de l'inconnue x , se trouvent ici, à l'instar des fonctions génératrices $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, etc., dans la loi suprême (777), déterminés théoriquement par les *conditions mêmes* du problème, et ne présentent ainsi rien d'arbitraire ou de purement technique. C'est pourquoi, comme nous l'avons dit pour l'expression définitive (762), quelques premiers de ces termes Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc. en question peuvent donner une détermination suffisante de l'inconnue x . Et par là même, la transformation en *génération-neutre* (773) ou (775) de cette apparente série (760) qui donne l'inconnue x de toute équation (744) et (745) d'un genre quelconque, peut suffisamment être opérée par nos présentes expressions générales (774) de cette *génération-neutre*; de sorte que, d'après les relations présentes (780), nous aurons ainsi, pour la solution progressive, mais rigoureusement théorique, d'une équation d'un genre quelconque (744) et (745), les expressions de plus en plus exactes . . . (781)

$$x = Q_0 + Q_1 \cdot (a - u),$$

$$x = Q_0 + \frac{Q_1^2 \cdot (a - u)}{Q_1 - Q_2 \cdot (a - u)},$$

$$x = Q_0 + \frac{Q_1 \cdot Q_2 \cdot (a - u) + [Q_1^2] \cdot (a - u)^2}{Q_0 - Q_3 \cdot (a - u)},$$

$$x = Q_0 + \frac{Q_1 \cdot [Q_1^2] \cdot (a - u) + [Q_2 \cdot [Q_2^2] - Q_1 \cdot [Q_2 \cdot Q_3]] \cdot (a - u)^2}{[Q_1^2] - [Q_2 \cdot Q_3] \cdot (a - u) + [Q_3^2] \cdot (a - u)^2},$$

etc., etc.;

en y faisant finalement $u = 0$, et $a = 1$.

Ainsi, suivant le mode infini de la génération théorique, ou de la construction de la nature elle-même des fonctions problématiques, suivant ce mode supérieur que la présente réforme des mathématiques, en se fondant sur la découverte de leur loi suprême (777), dévoile à la science, nous obtenons ici, dans ces expressions progressives (781), la solution théorique et définitive de tous les genres concevables d'équations (744) et (745). Et l'on voit que le principe de cette décisive solution des équations quelconques consiste, d'après la loi suprême des mathématiques, dans la détermination progressive, par les conditions mêmes du problème, des fonctions génératrices Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , etc., correspondant aux fonctions génératrices $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, etc. de la loi suprême elle-même (777), de manière que la première Q_1 de ces fonctions génératrices détermine ce qu'il y a de fini dans la nature de l'inconnue des équations proposées, et que les fonctions ultérieures Q_2, Q_3, Q_4 , etc., déterminent ce qu'il y a d'infini dans cette nature problématique de l'inconnue en question.

Nous pensons qu'après tout ce que nous venons de faire connaître concernant ce mode infini de la génération théorique des fonctions, il ne se trouvera pas de géomètres, pas même dans l'Académie des sciences de Paris, qui ne sauraient voir autre chose que des approximations dans ces solutions progressives et rigoureuses (781) des équations. S'il s'en trouvait, nous ne pourrions le leur faire comprendre autrement qu'en les invitant à chercher des nombres entiers ou des fractions finies pour la détermination des quantités irrationnelles et transcendentes, par exemple, pour les deux susdits rapports, savoir, pour le rapport $\sqrt{2}$ de la diagonale au côté du carré, et pour le rapport π de la circonférence au rayon du cercle, qui sont notoirement

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

$$\pi = 8 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} \right\}.$$

Nous consentons, en effet, à considérer notre solution théorique et universelle (781) des équations de tous les genres, comme n'étant que des approximations de l'espèce de celles que constituent les deux présentes déterminations numériques (782) des nombres $\sqrt{2}$ et π . Et nous chercherons, pour la solution théorique et universelle des équations, des expressions finies, aussitôt que les géomètres en question, probablement ceux de l'Académie des sciences de Paris, auront trouvé, pour les présents nombres, irrationnel $\sqrt{2}$ et transcendant π , des nombres entiers ou même des fractions finies.

En attendant ce triomphe des mathématiques, qui nous viendra sans doute de l'illustre Académie des sciences de Paris, à en juger par sa haute tendance

d'extirper l'infini du monde, et de lui substituer le fini, comme le prouve le premier de ses fameux prix décennaux, la science sera forcée de se contenter, probablement pour toute l'éternité, de la solution universelle (781) que nous venons de lui dévoiler par l'application du problème-universel (743), de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, à la solution des équations de tous les genres. Et, en attendant ainsi ce merveilleux triomphe, les géomètres moins éclairés que les académiciens de Paris, ceux qui ne peuvent pas encore se détacher du préjugé de l'idée de l'infini, pourront maintenant compléter l'intégration de l'équation différentielle du troisième ordre (746), que nous avons pris pour exemple de notre présente solution théorique et universelle des équations; et ils le pourront même avec facilité (*), en substituant les fonctions (755) ou (755'), que cette équation présente pour les fonctions génératrices $f_x, f_x x, f_x x^2, f_x x^3$, etc. du problème-universel (743), en les substituant, disons-nous, dans les expressions (a3) de la *Réputation de Lagrange*, pour obtenir les fonctions génératrices Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc. de l'inconnue x , lesquelles fonctions donnent, d'abord, par l'expression (760), et finalement par nos présentes expressions (781), la détermination progressive, mais rigoureusement théorique, de l'inconnue x en question, offrant l'intégration de l'équation proposée (746). — Nous avons choisi ce petit exemple, parce que, après la production à l'Institut de France de la loi suprême des mathématiques, il y a trente-six ans, on a proposé à l'auteur, comme un défi, l'intégration de cette petite équation (746), qui était probablement le *non plus ultra* pour les académiciens de Paris. Nous raconterons, dans le *Manifeste historique*, à la fin du second volume de l'ouvrage présent, la manière honteuse, ou plutôt déplorable, dont on s'est servi pour oser faire ce défi à l'auteur de la loi suprême des mathématiques. — Mais, quelque petit que soit cet exemple, il suffit, pour éclaircir complètement les procédés de la méthode secondaire, de cette deuxième méthode absolue qui, par l'application du problème-universel (743), a pour objet la solution théorique et universelle des équations de tous les genres. Et nous ne doutons pas que les géomètres qui auront approfondi cette deuxième méthode absolue, ne sachent facilement l'appliquer à la solution de toute équation concevable. D'ailleurs, le cinquième des ouvrages que nous commençons ici à publier, aura pour objet cette solution universelle des équations de tous les genres par la méthode absolue que nous venons de faire connaître.

Nous nous bornerons donc ici à rappeler que cette solution universelle (781) des équations est destinée principalement à l'intégration des équations aux différences ou aux différentielles (143)', (144)', (145)', etc., desquelles dépend l'application de la méthode suprême, de cette première de nos méthodes absolues. On conçoit en effet, comme nous l'avons déjà fait remarquer plusieurs

(*) D'après les modifications indiquées dans l'Errata.

fois, que, par l'intégration de ces équations conditionnelles (143)', (144)', etc., la méthode suprême (142), (143), etc. se trouvera accomplie, et pourra servir immédiatement à la solution de tous les problèmes. Bien plus, par cette intégration des équations (143)', (144)', etc., qui s'opérera ainsi à l'aide du problème-universel, de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques qui dérive immédiatement de la loi suprême, il est manifeste, comme nous l'avons déjà reconnu ailleurs, que la méthode suprême, accomplie ainsi en elle-même et par elle-même, devra servir définitivement, comme couronne de la science, à la solution *PÉRÉMPTOIRE* et en quelque sorte *ABSOLUE* de tous les problèmes des mathématiques.

Mais, comme nous l'avons également fait remarquer déjà, cette application finale de la méthode suprême à la solution de tous les problèmes des mathématiques, n'est pas encore un besoin de la science actuelle, qui ne peut guère se détacher de l'algorithme des séries, et qui à peine peut s'élever à l'algorithme supérieur des fractions-continues universelles, et par là à notre génération-neutre (773) et (775) des quantités. Aussi, comme nous l'avons déjà dit, aurons-nous une haute idée des mathématiciens, nos contemporains, s'ils parviennent à reconnaître la nécessité où se trouve leur science de substituer maintenant, au théorème de Taylor, qui, jusqu'à ce jour, leur a servi d'instrument universel, et dont l'impuissance leur est démontrée, l'instrument tout-puissant que leur offre, sinon péremptoirement la méthode suprême elle-même (142), (143), etc., du moins provisoirement la méthode primordiale (729). Et pour leur en faciliter l'usage, du moins dans les premiers degrés de cette méthode primordiale, nous allons la présenter dans son immédiate détermination générale, pour les deux premiers degrés de la génération théorique des fonctions, en montrant ainsi aux géomètres la voie pour son ultérieure détermination immédiate, au moins jusqu'au troisième degré de cette génération théorique, qui suffira le plus souvent pour la prompte application de cette méthode primordiale à la solution de tous les problèmes.

Or, pour le premier degré de la génération théorique, en faisant $\alpha = 1$, l'expression (729)' ou (637), donnera, pour la génération théorique $\Sigma(1)$, qui entre dans l'expression générale (729) de la méthode primordiale, la détermination . . . (783)

$$\Sigma(1) = \mathfrak{A}_1 \cdot P(1) \cdot (x - a);$$

qui, en vertu des expressions (635) des parties constituantes P , devient . . . (783')

$$\Sigma(1) = \mathfrak{A}_1 \cdot \left\{ 1 - (x - a) \cdot \frac{1}{R(1)} \right\} \cdot (x - a).$$

Et les expressions (684), ou bien les équations (605), donneront, pour la quantité $R(1)$, la fonction . . . (783'')

$$R(1) = - \frac{2 \cdot dFx \cdot dx}{d^2Fx}, \quad \text{et par conséquent,} \quad \frac{1}{R(1)_2} = - \frac{d^2Fx}{2 \cdot dFx \cdot dx}.$$

Ainsi, l'expression générale (729) de la méthode primordiale donnera, pour le premier degré de génération théorique de toute fonction problématique Fx , l'expression particulière . . . (784)

$$Fx = Fa + \frac{dFa}{da} \cdot \left\{ 1 + (x-a) \cdot \frac{d^2Fx}{2 \cdot dFx \cdot dx} \right\} \cdot (x-a) + S(a);$$

dans laquelle la série complémentaire $S(a)$ se trouvera facilement déterminée par les expressions générales (729)'' et (729)''', en introduisant, dans les expressions auxiliaires (668) et (667), la présente fonction (783)'' pour la quantité $R(1)$. — Ce premier degré (784) de la génération théorique des fonctions peut déjà servir utilement pour la solution des problèmes, lorsqu'il ne s'agira d'avoir qu'une première détermination de la fonction problématique. Mais, quand il en est besoin, il faut tenir compte de la série complémentaire $S(a)$, qu'il faut de même, d'après les expressions citées (729)'' et (729)''', déterminer généralement par les différentielles de la fonction en question. — Nous laissons aux géomètres le plaisir de cette détermination générale de la série complémentaire $S(a)$, pour le prompt et immédiat emploi de ce premier degré (784) de la génération théorique des fonctions, par laquelle doit s'ouvrir la nouvelle période des mathématiques.

Pour le deuxième degré de cette génération théorique des fonctions problématiques Fx , en faisant $\alpha = 2$, l'expression (729)' ou (637) donnera, pour cette génération théorique $\Sigma(2)$, qui entre dans l'expression générale (729) de la méthode primordiale, la détermination . . . (785)

$$\Sigma(2) = \mathfrak{A}_1 \cdot P(1)_2 \cdot (x-a) + \mathfrak{A}_2 \cdot P(2)_2 \cdot (x-a)^2;$$

qui, en vertu (*) des expressions (635) et (636) des parties constitutives P , devient . . . (785')

$$\begin{aligned} \Sigma(2) = & \mathfrak{A}_1 \cdot \left\{ 1 - (x-a)^2 \cdot \frac{1}{R(2)_2} \right\} \cdot (x-a) + \\ & + \mathfrak{A}_2 \cdot \left\{ 1 - (x-a) \cdot \frac{R(2)_2}{R(2)_2} + (x-a)^2 \cdot \frac{1}{R(2)_2} \right\} \cdot (x-a)^2. \end{aligned}$$

Et les expressions (684), ou bien les équations (605), donneront, pour les quantités $R(2)_1$ et $R(2)_2$, les fonctions . . . (785)''

$$R(2)_1 = - \frac{6 \cdot Y}{Z}, \quad \text{et} \quad R(2)_2 = + \frac{12 \cdot X}{Z};$$

(*) Voyez l'Errata pour la seconde des expressions (635).

en faisant auxiliairement . . . (785)^{'''}

$$X = \left\{ 2.d^2Fx.d^3Fx - 3.d^3Fx.d^2Fx \right\} \cdot \frac{1}{dx^4},$$

$$Y = \left\{ d^2Fx.d^4Fx - 2.d^3Fx.d^3Fx \right\} \cdot \frac{1}{dx^5},$$

$$Z = \left\{ 3.d^3Fx.d^4Fx - 4.d^4Fx.d^3Fx \right\} \cdot \frac{1}{dx^6}.$$

Ainsi, en résumant toutes ces quantités, l'expression générale (729) de notre méthode primordiale donnera, pour le deuxième degré de la génération théorique de toute fonction problématique Fx , l'expression particulière . . . (786)

$$F_x = F_a + \frac{dF_a}{da} \cdot \left\{ 1 - (x-a)^3 \cdot \frac{Z}{12.X} \right\} \cdot (x-a) + \\ + \frac{d^2F_a}{2.da^2} \cdot \left\{ 1 + (x-a) \cdot \frac{Y}{2.X} + (x-a)^3 \cdot \frac{Z}{12.X} \right\} \cdot (x-a)^3 + S(3);$$

dans laquelle la série complémentaire $S(3)$ se trouvera de nouveau déterminée facilement par les expressions générales (729)^{''} et (729)^{'''}, en introduisant, dans les expressions auxiliaires (668) et (667), les présentes fonctions (785)^{''} pour les quantités $R(2)$, et $R(2)$ ₂. — On conçoit que ce deuxième degré (786) de la génération théorique des fonctions pourra, mieux que le premier degré (784), servir utilement pour la solution des problèmes, en donnant déjà une détermination théorique plus étendue des fonctions demandées par les problèmes. Mais, encore ici, lorsqu'il en est besoin, il faut tenir compte de la série complémentaire $S(3)$, qu'il faut également, d'après les susdites expressions (729)^{''} et (729)^{'''}, déterminer, d'une manière immédiate, par les différentielles des fonctions cherchées. Et nous laissons de nouveau aux géomètres le plaisir de déterminer ainsi généralement cette série complémentaire $S(3)$.

Il importerait de même de déterminer ainsi, d'une manière générale et immédiate, les degrés ultérieurs de cette génération théorique des fonctions, d'après l'expression générale (729) de notre méthode primordiale. Et nous ne doutons pas que les géomètres, surtout les jeunes géomètres qui auront compris la présente réforme des mathématiques, et spécialement le mode infini de la progressive génération théorique des fonctions, par lequel cette réforme offre maintenant les moyens pour la solution de tous les problèmes, ne s'occupent de cette prompte réalisation pratique des degrés ultérieurs de la génération théorique (729), dont nous venons de leur indiquer les procédés pour la détermination des deux premiers de ces degrés. Et nous pensons qu'en y joignant ainsi au moins le troisième degré de cette génération théorique des fonctions, et en accomplissant la détermination correspondante des trois respectives sé-

ries complémentaires $S(2)$, $S(3)$, et $S(4)$, on aura, dans les besoins actuels de la science, des moyens suffisants pour ouvrir la nouvelle période des mathématiques, qui est l'objet de leur présente réforme.

Pour compléter cette réforme, du moins en ce qui concerne les mathématiques pures, il nous reste à résoudre un dernier et grand problème, celui de la sommation des séries, c'est-à-dire, la construction de la *NATURA* des fonctions dont l'évaluation ou la détermination de la *VALEUR* est donnée par des séries. Et ce problème, si insurmontable jusqu'à ce jour, qui, suivant nos nouvelles vues philosophiques de la science, a proprement pour objet de transformer la *génération technique* des fonctions en leur *génération théorique*, ne présente plus aucune difficulté par nos actuelles méthodes absolues. Aussi, pressés par l'espace, et encore plus par le temps que nous pouvons donner à cet ouvrage, nous bornerons-nous à indiquer les procédés très-faciles pour la solution de ce grand problème, en laissant de nouveau aux géomètres, surtout aux jeunes géomètres, le plaisir d'accomplir définitivement cette solution, pour la nouvelle période des mathématiques.

Or, soit donnée une série quelconque . . . (787)

$Fx = \lambda_0 + \lambda_1.(x-a) + \lambda_2.(x-a)^2 + \lambda_3.(x-a)^3 + \text{etc.}$;
dans laquelle les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, etc., auront nécessairement la détermination générale . . . (787')

$$\lambda_n = \frac{d^n Fx}{n! \cdot da^n}.$$

En prenant successivement les différentielles sur cette série, on aura . . .
. . . (788)

$$\frac{dFx}{dx} = \lambda_1 + 2.\lambda_2.(x-a) + 3.\lambda_3.(x-a)^2 + 4.\lambda_4.(x-a)^3 + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2 Fx}{dx^2} = 2^{1-1}.\lambda_2 + 3^{1-1}.\lambda_3.(x-a) + 4^{1-1}.\lambda_4.(x-a)^2 + 5^{1-1}.\lambda_5.(x-a)^3 + \text{etc.},$$

$$\frac{d^3 Fx}{dx^3} = 3^{1-1}.\lambda_3 + 4^{1-1}.\lambda_4.(x-a) + 5^{1-1}.\lambda_5.(x-a)^2 + 6^{1-1}.\lambda_6.(x-a)^3 + \text{etc.};$$

etc., etc.; et généralement . . . (788')

$$\frac{d^p Fx}{dx^p} = \mu^{1-1}.\lambda_p + (\mu+1)^{1-1}.\lambda_{p+1}.(x-a) + (\mu+2)^{1-1}.\lambda_{p+2}.(x-a)^2 + \text{etc.}$$

On peut maintenant, avec ces différentielles, comme on le prévoit sans doute, résoudre facilement le problème en question, soit par la méthode primordiale (784), (786), etc., soit par la méthode suprême elle-même (142), (143), etc. En effet, il suffit d'y introduire ces différentielles (788), et de

transformer en génération-neutre (773), (774) et (775), les séries qui en résulteront, pour avoir la solution du problème, avec une exactitude à volonté, en portant cette transformation en génération-neutre, et cette application de la méthode primordiale ou de la méthode suprême à tel degré que l'on voudra.

Ainsi, en appliquant d'abord la méthode primordiale, par exemple, celle du second degré (786), il faudra introduire les différentielles présentes (788) dans les expressions (785)^{'''} des quantités auxiliaires X, Y, Z; et l'on obtiendrait la détermination de ces quantités par le moyen des séries, lesquelles, étant divisées les unes par les autres, à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés, ou de toute autre méthode, donneront, pour les rapports de ces quantités X, Y, Z, de nouvelles déterminations en séries. On aurait donc, pour ces rapports, les séries finales . . . (789)

$$\frac{Z}{X} = Z_0 + Z_1.(x-a) + Z_2.(x-a)^2 + Z_3.(x-a)^3 + \text{etc.},$$

$$\frac{Y}{X} = Y_0 + Y_1.(x-a) + Y_2.(x-a)^2 + Y_3.(x-a)^3 + \text{etc.};$$

et réciproquement . . . (789')

$$\frac{X}{Z} = U_0 + U_1.(x-a) + U_2.(x-a)^2 + U_3.(x-a)^3 + \text{etc.},$$

$$\frac{Y}{Z} = V_0 + V_1.(x-a) + V_2.(x-a)^2 + V_3.(x-a)^3 + \text{etc.};$$

séries qui, par les expressions (774), et généralement (773) et (775), pourront être transformées en génération-neutre avec telle exactitude que l'on voudra. Et alors, les premiers (789) de ces rapports, exprimés ainsi en génération-neutre, et introduits dans l'expression finale (786) de la méthode primordiale, feront obtenir, avec une exactitude à volonté, ce deuxième degré de la génération théorique de la fonction problématique Fx qui est donnée par la série (787). Et pour la détermination de la série complémentaire $S(3)$, les rapports réciproques (789)', formés simplement par la génération-neutre que l'on aura arrêtée pour les premiers (789) de ces rapports, donneront les valeurs (785)^{'''} des quantités élémentaires $R(a)_1$, et $R(a)_2$, qui, pour la formation de la série complémentaire $S(3)$, entrent dans les expressions (668), et (667). Mais il faut soigneusement conserver ici à ces quantités élémentaires $R(a)_1$ et $R(a)_2$ les expressions que, par la transformation des séries en génération-neutre, on leur aura données dans la partie théorique (785)' de l'expression totale (786) de la méthode primordiale, parce que la série complémentaire $S(3)$ doit toujours se régler sur les fonctions génératrices $P(1)_0$, $P(2)_0$, $P(3)_0$, etc., qui entrent dans la portion théorique (785) ou (637), et qui, pour cela, demeurent en partie arbitraires, et peuvent ainsi admettre les présentes générations-neutres, plus ou moins étendues.

(7).

En appliquant ensuite la méthode suprême elle-même (142), (143), etc., à cette sommation des séries, c'est-à-dire, à cette détermination ou construction théorique des fonctions Fx données par des séries (787), il faudra manifestement introduire, dans les équations conditionnelles (143)', (144)', (145)', etc., de cette méthode suprême, à la place des différentielles dFx , d^2Fx , d^3Fx , etc. de la fonction en question Fx , les séries (788) transformées en génération-neutre (774), ou généralement (773) et (775), en portant cette génération-neutre à tel degré d'exactitude que l'on voudra. On pourra alors, en remplissant les conditions qui y sont requises, intégrer ces équations conditionnelles (143)', (144)', (145)', etc., par notre méthode secondaire (760) et (781), comme nous venons de le dire à l'occasion de ces dernières expressions (781), en signalant leur destination absolue. Et l'on obtiendra ainsi successivement les fonctions génératrices Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , etc., qui, par le moyen de la loi suprême . . . (790)

$$Fx = A_0.\Omega_0 + A_1.\Omega_1 + A_2.\Omega_2 + A_3.\Omega_3 + \text{etc., etc.,}$$

serviront, sous cette forme absolue, à construire la nature ou à déterminer la génération théorique de la fonction proposée Fx , qui est donnée par une série (787), c'est-à-dire, par une simple évaluation ou détermination technique de sa valeur.

Nous terminons ici, autant que l'espace et le temps nous le permettent dans ce Complément, tout ce qu'il nous restait à dire pour accomplir définitivement les méthodes absolues que, par la découverte de la loi suprême (790), la présente réforme des mathématiques vient de donner à la science pour la solution *résumptoire* de tous ses problèmes, quelque grands et difficiles qu'ils puissent être. Et nous pensons qu'après cet accomplissement final, les géomètres qui auront étudié et approfondi ces méthodes absolues, et leur complémentaire méthode téléologique, en s'appuyant sur leurs respectives bases immuables, c'est-à-dire, sur nos trois lois fondamentales des mathématiques, comprendront, non-seulement que tous les problèmes peuvent être résolus, mais, ce qui est plus, qu'on ne saurait concevoir, dans cette grande science, quant aux principes, rien au delà de nos trois lois fondamentales, et quant aux conséquences, rien au delà de nos trois méthodes, dérivant respectivement de ces trois lois fondamentales, savoir, la méthode suprême (142), (143), etc., la méthode secondaire (760) et (781), et la méthode téléologique (308) et (310). — Quant aux géomètres qui ne sauraient ainsi concevoir l'avenir de la science par la portée de ses méthodes absolues, nous les prions d'attendre la production ultérieure des ouvrages que nous commençons à publier, et dans lesquels, par l'application de ces méthodes absolues, nous donnerons effectivement la solution de tous les grands problèmes des mathématiques (*). Déjà

(*) On conçoit que, dans la déduction précise que nous venons de donner de ces méthodes absolues de la science, autant que cela appartenait à la présente réforme des mathématiques, nous n'avons pu ni

même, dans l'ouvrage présent, notamment dans le Supplément du deuxième tome, nous donnerons, par anticipation, comme nous l'avons annoncé, l'application de ces décisives méthodes à la résolution générale des équations algébriques de tous les degrés, à cette résolution qui, jusqu'à ce jour, a résisté aux efforts de tous les mathématiciens, et qui constituait ainsi, par la profonde ignorance qui règne sur cette question, la preuve irrécusable de l'extrême imperfection dans laquelle nous avons trouvé la science. — Nous pouvons donc arrêter ici cet accomplissement des mathématiques pures, et nous allons procéder de même, par anticipation sur nos ouvrages ultérieurs, à l'accomplissement des mathématiques appliquées, en donnant ici, autant que peut le comporter l'étendue de la présente réforme, la solution des grands problèmes du monde physique. Toutefois, dans la suite de ce Complément, en traitant de la réforme de la Mécanique céleste, nous aurons occasion de dire encore un dernier mot concernant nos méthodes absolues, pour accomplir par là finalement la présente réforme des Mathématiques pures.

Dans le Programme scientifique qui est à la tête de cet ouvrage, nous rappelons que, dans nos *Prolégomènes du Messianisme*, nous avons déjà donné, du moins sous leurs conditions fondamentales, la solution de ces graves problèmes du monde physique. Voici, en effet, ce que nous y disons à ce sujet (page 28), et ce que nous devons répéter ici pour le présent accomplissement des mathématiques appliquées.

• Pour ne pas reproduire simplement ce que nous avons déjà dit, dans les *Prolégomènes du Messianisme*, concernant cette solution des grands problèmes des mathématiques appliquées, dans ces *Prolégomènes* où nous avons produit les résultats principaux de cette solution, nous supposerons que le lecteur a sous les yeux ces *Prolégomènes du Messianisme*; et nous nous bornerons ici à compléter ces hautes considérations, en indiquant ce qu'il nous reste à faire pour accomplir, sous ce point de vue élevé de l'application des mathématiques, la présente réforme de cette science.

• Or, nous avons reconnu, dans les *Prolégomènes du Messianisme*, que, pour la principale application des mathématiques au monde physique, il existe trois grands problèmes bien distincts, savoir : 1°. la construction mécanique de l'univers par les corps célestes, qui fait l'objet de la mécanique céleste; 2°. la construction mécanique de la terre, et généralement des globes célestes, par la matière, qui fait l'objet de la géologie mathématique; ou de la mécanique terrestre; enfin, 3°. la construction mécanique de la ma-

dû signaler que leurs conditions principales. Et l'on conçoit, de plus, que, dans l'application de ces méthodes, nous aurons lieu de signaler leurs conditions accessoires et les diverses modifications dont elles sont susceptibles.

« tière par ses forces génératrices, qui fait l'objet de la physique mathématique. Et dans ce même ouvrage, nous avons déjà résolu ces trois grands problèmes, en donnant positivement, pour principes du développement accompli de ces solutions, les trois lois fondamentales qui, dans chaque bran-
« che de réalités distinctes qui font les objets respectifs de ces problèmes, régissent tous leurs phénomènes, comme nous allons le rappeler ici en peu de mots. »

Effectivement, dans la suite du Programme scientifique dont nous reproduisons les paroles précédentes, nous indiquons, pour chacun des trois grands problèmes du monde physique, les lois fondamentales que nous avons déjà données dans les *Prolegomènes du Messianisme*, et les déterminations finales qu'il nous reste encore à donner pour accomplir la solution de ces graves problèmes. Et c'est cet accomplissement que nous allons produire ici ; autant du moins qu'il est nécessaire pour que, avec les lois fondamentales que nous avons données dans les *Prolegomènes*, et les méthodes absolues que nous produisons dans l'ouvrage présent, on puisse accomplir réellement cette difficile solution des hautes questions du monde physique, qui est l'objet de la présente réforme des mathématiques appliquées. — Mais, comme nous venons de le dire, pour ne pas répéter ce qui est déjà dit et établi dans les *Prolegomènes du Messianisme*, nous poursuivrons ici, sans le reproduire, ce que nous y avons produit concernant cette réforme des mathématiques appliquées, en nous servant, sans l'expliquer de nouveau, de la notation qui a été employée dans cet ouvrage, et en continuant de numéroter les formules par les chiffres respectifs, arabes et romains, qui leur sont attachés dans les *Prolegomènes*, et dont les derniers sont, 1°. pour la mécanique céleste, (82); 2°. pour la mécanique terrestre, (LXXXI); et 3°. pour la physique générale, (LXXXVII).

Or, pour ce qui concerne d'abord le premier de ces trois grands problèmes, celui de la construction de l'univers par les corps célestes, qui est l'objet de la mécanique céleste, après avoir rappelé, dans le susdit Programme scientifique, les trois lois fondamentales que, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, nous assignons à un tel système du monde, nous avons ajouté ce qui manquait à cette réforme de la mécanique céleste, c'était son triple accomplissement, algorithmique, dynamique, et philosophique. Eh bien, comme on l'a vu dans l'ouvrage présent, la première de ces trois perfections finales, savoir, l'accomplissement algorithmique, nous venons de le donner, par anticipation sur notre deuxième ouvrage, sur la *Réforme de la Mécanique céleste*, afin de pouvoir, dans la présente réforme générale des mathématiques, établir immédiatement toutes les méthodes absolues de cette grande science du géomètre, méthodes qui précisément servent à ce qui, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, manque encore pour la solution algorithmique de tous les problèmes de la mécanique céleste. — Quant à la dernière des

trois perfections finales de cette haute mécanique, savoir, son accomplissement philosophique, nous en parlerons après que nous aurons produit ici la condition principale de la deuxième de ces trois perfections finales, savoir, la condition de l'accomplissement dynamique de cette réforme de la mécanique céleste.

Et pour peu que l'on ait approfondi cette réforme, telle qu'elle est déjà produite dans les *Prolegomènes* du Messianisme, on comprendra qu'ayant ici donné déjà toutes les méthodes nécessaires à la solution algorithmique des problèmes, il ne manque, pour l'accomplissement dynamique de cette solution, rien de plus que la connaissance des trois forces techniques α , γ , δ , c'est-à-dire, suivant leur nom barbare, la connaissance de ces trois forces perturbatrices; connaissance qui est évidemment, sous le point de vue dynamique, la condition principale de la solution du PROBLÈME-UNIVERSEL dans le système des réalités physiques constituant la mécanique céleste. — Nous allons donc, pour compléter notre réforme de la mécanique céleste, présenter ici la détermination rigoureuse de ces trois forces techniques ou prétendument perturbatrices, en tant qu'elles dépendent de l'influence ou de l'attraction réciproque des corps célestes qui forment un système du monde, ou qui résistent sur un tel système; sans toutefois exclure de ces trois forces techniques l'influence de toutes autres causes possibles, comme, par exemple, la prétendue résistance du milieu dans lequel se meuvent les corps célestes.

Pour donner cette détermination des trois forces α , γ , δ , fixons préalablement la relation de trois plans quelconques, auxquels, d'après ce que nous avons nommé *Canon astronomique* dans les *Prolegomènes* du Messianisme, se rapportent les mouvements des corps célestes. Et cette relation en question de trois pareils plans astronomiques, appartenant à un système de corps célestes, consiste manifestement dans les réductions des éléments ψ , α , χ , du plan variable d'une orbite, qui se trouve rapporté à un certain plan donné, que nous nommerons *plan intermédiaire*, dans leurs réductions, disons-nous, aux éléments pareils et définitifs par lesquels ce plan variable d'une orbite se trouverait rapporté finalement au plan fixe et invariable du système entier. — Pour cela, en considérant toujours, dans ce plan fixe, la ligne dont le côté positif sert d'origine pour la mesure des angles dans ce plan, et que nous nommons simplement *ligne fixe* dans les *Prolegomènes*, commençons par déterminer la position du plan intermédiaire par rapport au plan fixe, en désignant par (ψ) le lieu de son nœud ascendant, mesuré depuis la susdite ligne fixe, par (α) son inclinaison sur le plan fixe, et par (χ) la position d'une ligne fixe dans ce plan intermédiaire, ligne que nous nommerons *ligne-fixe intermédiaire*, et dont nous mesurerons la position (χ) , d'abord le long du plan fixe jusqu'au nœud ascendant (ψ) du plan intermédiaire, et ensuite le long de ce plan intermédiaire. Déterminons, de plus, la position du plan variable de l'orbite par rapport au plan intermédiaire, en désignant par ϕ le

lieu du nœud ascendant de ce plan variable, mesuré le long du plan intermédiaire depuis sa ligne-fixe intermédiaire (χ), par η l'inclinaison du plan variable sur le plan intermédiaire, et par χ la position d'une ligne fixe dans ce plan variable, ligne que nous nommons *ligne fixe de l'orbite* dans les Prolégomènes, et dont nous mesurerons la position χ , d'abord le long du plan intermédiaire, depuis sa ligne fixe (χ) jusqu'au nœud ascendant ψ du plan variable, et ensuite le long de ce plan variable de l'orbite, en ne perdant pas de vue que cette ligne fixe χ de l'orbite sert d'origine à la mesure des angles dans le plan de l'orbite, nommément à la mesure des mouvements angulaires ϕ de l'astre, et α de son aphélie. Déterminons, enfin, la position du plan variable de l'orbite par rapport au plan fixe, en γ désignant par Ψ le lieu du nœud ascendant de ce plan variable, mesuré toujours depuis la susdite ligne fixe, par H l'inclinaison du plan variable de l'orbite sur le plan fixe, et par X la position de la susdite ligne fixe de l'orbite, position que nous mesurerons ici, d'abord le long du plan fixe, depuis sa ligne fixe jusqu'au nœud ascendant Ψ du plan variable de l'orbite, et ensuite le long de ce plan variable. — Or, pour opérer les réductions dont il est question, il faut évidemment déterminer les trois quantités H , Ψ , X , relatives au plan fixe, en fonctions des trois quantités η , ϕ , χ , relatives au plan intermédiaire, et des trois quantités η , ψ , χ , relatives au plan variable de l'orbite. Et ces déterminations, les voici . . . (83)

$$\cos H = \cos \eta \cdot \cos(\eta) - \sin \eta \cdot \sin(\eta) \cdot \cos[(\chi) - (\psi) + \psi],$$

$$\sin H = \sqrt{1 - \cos^2 H}, \text{ le signe positif pour le nœud ascendant ;}$$

$$\cos \Psi = \frac{\sin \eta}{\sin H} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \cos(\psi) \cdot \{ \cot \eta \cdot \sin(\eta) + \cos(\eta) \cdot \cos[(\chi) - (\psi) + \psi] \} \\ - \sin(\psi) \cdot \sin[(\chi) - (\psi) + \psi] \end{array} \right\},$$

$$\sin \Psi = \frac{\sin \eta}{\sin H} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \sin(\psi) \cdot \{ \cot \eta \cdot \sin(\eta) + \cos(\eta) \cdot \cos[(\chi) - (\psi) + \psi] \} \\ + \cos(\psi) \cdot \sin[(\chi) - (\psi) + \psi] \end{array} \right\};$$

$$\cos(X - \Psi) = \frac{\sin(\eta)}{\sin H} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \cos(\chi - \psi) \cdot \{ \cot(\eta) \cdot \sin \eta + \cos \eta \cdot \cos[(\chi) - (\psi) + \psi] \} \\ - \sin(\chi - \psi) \cdot \sin[(\chi) - (\psi) + \psi] \end{array} \right\},$$

$$\sin(X - \Psi) = \frac{\sin(\eta)}{\sin H} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \sin(\chi - \psi) \cdot \{ \cot(\eta) \cdot \sin \eta + \cos \eta \cdot \cos[(\chi) - (\psi) + \psi] \} \\ + \cos(\chi - \psi) \cdot \sin[(\chi) - (\psi) + \psi] \end{array} \right\};$$

et par conséquent . . . (83')

$$\sin X = \sin \Psi \cdot \cos(X - \Psi) + \cos \Psi \cdot \sin(X - \Psi),$$

$$\cos X = \cos \Psi \cdot \cos(X - \Psi) - \sin \Psi \cdot \sin(X - \Psi).$$

Nous pouvons nous dispenser de donner ici la démonstration de ces détermi-

nations réciproques, qui sont purement géométriques, et que l'on peut démontrer facilement. Mais, pour la vérification de ces formules, nous observerons que, lorsque le plan intermédiaire se confond avec le plan fixe, on aura . . . (84)

$$(\pi) = 0;$$

et par conséquent . . . (85)

$$\begin{aligned}\cos H &= \cos \pi, & \sin H &= \sqrt{1 - \cos^2 \pi} = \sin \pi; \\ \cos \Psi &= \cos(\psi) \cdot \cos[(\chi) - (\psi) + \psi] - \sin(\psi) \cdot \sin[(\chi) - (\psi) + \psi] = \\ &= \cos[(\chi) + \psi], \\ \sin \Psi &= \sin(\psi) \cdot \cos[(\chi) - (\psi) + \psi] + \cos(\psi) \cdot \sin[(\chi) - (\psi) + \psi] = \\ &= \sin[(\chi) + \psi]; \\ \cos(X - \Psi) &= \cos(\chi - \psi), \\ \sin(X - \Psi) &= \sin(\chi - \psi); \end{aligned}$$

comme cela doit être.

Il est sans doute superflu de faire remarquer que, pour trois plans déterminés ainsi, dans leurs combinaisons de deux à deux, par les relations réciproques de deux de ces combinaisons, on peut toujours, à l'aide des expressions présentes (83), déterminer immédiatement les relations réciproques de la troisième de ces combinaisons, sans qu'il soit nécessaire d'opérer aucune résolution dans ces expressions (83). Il suffit, pour cela, évidemment, de prendre, pour plan intermédiaire, celui dont les relations avec les deux autres plans seront données; car, les expressions (83) feront alors connaître immédiatement les relations de ces deux derniers plans.

Procédons maintenant à la détermination finale des trois forces techniques ou prétendument perturbatrices $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, dont il est question. — Pour cela, en considérant d'abord l'orbite du mouvement relatif de deux corps quelconques, si l'on rapporte le plan de cette orbite à un plan fixe par la détermination des trois quantités H , Ψ , X , qui sont les éléments dans notre canon astronomique (70), savoir, H l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe, Ψ le lieu de son nœud ascendant, mesuré depuis la ligne fixe qui est prise pour origine des mesures dans le plan fixe, et X la ligne fixe de l'orbite, qui sert d'origine à la mesure des angles dans le plan de l'orbite, si l'on rapporte ainsi, disons-nous, le plan d'une orbite quelconque à un plan fixe, on pourra toujours déterminer les quantités H , Ψ , X par les précédentes lois (83) que suit la transposition des plans des orbites, quelles que soient leur position et leur détermination antérieures. Et alors, en désignant toujours par r le rayon vecteur de l'astre qui se meut dans cette orbite, si l'on conçoit les trois coordonnées rectangulaires x , y , z , de cet astre, prises par rapport au plan fixe, et de manière que la ligne fixe de ce plan forme l'axe des ordonnées x ,

on aura, pour la détermination de ces coordonnées x, y, z , les expressions générales . . . (86)

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \left\{ \cos \Psi \cdot \cos(X + \Phi - \Psi) - \sin \Psi \cdot \sin(X + \Phi - \Psi) \cdot \cos H \right\}, \\ y &= r \cdot \left\{ \sin \Psi \cdot \cos(X + \Phi - \Psi) + \cos \Psi \cdot \sin(X + \Phi - \Psi) \cdot \cos H \right\}, \\ z &= r \cdot \sin H \cdot \sin(X + \Phi - \Psi); \end{aligned}$$

la quantité Φ étant l'angle que fait le rayon vecteur r avec la ligne fixe X de l'orbite, et par conséquent la quantité $(X + \Phi - \Psi)$ étant l'angle que fait ce rayon vecteur r avec la ligne des nœuds. — On peut remarquer que, dans le cas où l'inclinaison H serait zéro, c'est-à-dire, où le plan fixe serait celui de l'orbite elle-même, les expressions générales (86) se réduiraient à celles-ci . . . (87)

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(X + \Phi), \\ y &= r \cdot \sin(X + \Phi), \\ z &= 0; \end{aligned}$$

comme cela doit être.

Considérons maintenant un astre central A et un astre B qui se meut autour du premier dans une orbite dont le plan, rapporté au susdit plan fixe, serait déterminé par les trois quantités η, ϕ, χ , analogues aux trois quantités générales H, Ψ, X , qui entrent dans les expressions (86) des coordonnées x, y, z . Et distinguons par x_1, y_1, z_1 , les coordonnées correspondantes au rayon vecteur r_1 du premier A de ces deux corps célestes, et par x_2, y_2, z_2 , les coordonnées correspondantes au rayon vecteur r_2 du second B de ces corps, en observant que, lorsque l'astre A est considéré comme absolument central, c'est-à-dire, comme placé à l'origine de toutes ces coordonnées, on aura . . . (88)

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad \text{et} \quad r_1 = 0.$$

Concevons, de plus, un troisième astre C qui puisse être considéré comme se mouvant de même autour de l'astre central A , dans une orbite dont le plan, rapporté toujours au susdit plan fixe, serait déterminé par les trois quantités $(\eta), (\phi), (\chi)$, analogues aux trois quantités générales des expressions (86); et distinguons par $(x), (y), (z)$, les coordonnées correspondantes au rayon vecteur (r) de ce troisième corps C , dont nous désignerons la masse propre par (m) . — Nous pourrions alors, au moyen des expressions générales (86), déterminer facilement les coordonnées respectives x_2, y_2, z_2 du corps B , et les coordonnées $(x), (y), (z)$ du corps C , que nous considérerons comme exerçant par sa masse (m) une attraction sur les deux corps A et B , telle que la différence de ces attractions établisse, pour le corps B , les trois forces techniques ou perturbatrices $\mathfrak{B}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, la première $\mathfrak{B}$ dans la direction de son rayon vecteur r_2 , la seconde $\mathfrak{Y}$ dans la direction perpendiculaire à ce

rayon vecteur r_2 , mais dans le plan de l'orbite, et la troisième ζ dans la direction perpendiculaire à ce plan de l'orbite du corps B. — Ce sont donc ces trois forces techniques $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, ζ qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, formons d'abord, avec les diverses coordonnées x , y , z des trois corps A, B, C, les quantités . . . (89)

$$\begin{aligned} m &= (x) - x_2, & p &= (x) - x_1, \\ n &= (y) - y_2, & q &= (y) - y_1, \\ l &= (z) - z_2, & k &= (z) - z_1; \end{aligned}$$

en observant que, par suite des valeurs (88), on aura simplement . . .

$$\text{. . . (89)} \quad p = (x), \quad q = (y), \quad k = (z).$$

Formons ensuite, avec ces premières quantités (89), les nouvelles quantités . . . (90)

$$\begin{aligned} V &= (\mathfrak{D}) \cdot \left\{ m^2 + n^2 + l^2 \right\}^{-\frac{3}{2}}, \\ W &= (\mathfrak{D}) \cdot \left\{ p^2 + q^2 + k^2 \right\}^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Et formons enfin, avec ces deux systèmes de quantités (89) et (90), les quantités auxiliaires et finales . . . (91)

$$\begin{aligned} S &= (nV - qW) \cdot \sin \phi + (mV - pW) \cdot \cos \phi, \\ T &= (nV - qW) \cdot \cos \phi - (mV - pW) \cdot \sin \phi, \\ U &= lV - kW. \end{aligned}$$

Et nous aurons alors, pour la détermination des trois forces techniques ou prétendument perturbatrices $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, ζ , les expressions générales . . . (92)

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \left\{ U \cdot \sin \pi + T \cdot \cos \pi \right\} \cdot \sin(\chi + \Phi - \phi) + S \cdot \cos(\chi + \Phi - \phi), \\ \mathfrak{T} &= \left\{ U \cdot \sin \pi + T \cdot \cos \pi \right\} \cdot \cos(\chi + \Phi - \phi) - S \cdot \sin(\chi + \Phi - \phi), \\ \zeta &= U \cdot \cos \pi - T \cdot \sin \pi; \end{aligned}$$

la quantité Φ étant l'angle que fait le rayon vecteur r_2 de l'astre B avec la ligne fixe χ de son orbite, et par conséquent la quantité $(\chi + \Phi - \phi)$ étant l'angle que fait ce même rayon vecteur r_2 avec sa ligne des osés ϕ .

Il est sans doute superflu de faire remarquer que, par suite de la généralité de ces expressions (92), en y joignant les susdites lois (83) pour la transposition des plans des orbites, on pourra, dans tous les cas, déterminer facilement, pour une orbite quelconque de deux corps célestes A et B, ces forces techniques ou perturbatrices $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, ζ , exercées sur le corps B par un ou par plusieurs corps célestes C, C', C'', etc. Et il est également superflu de faire remarquer que, lorsque l'inclinaison π de l'orbite qui subit l'action de ces

forces techniques, est très-petite, comme cela a lieu pour les planètes de notre système solaire, et pour leurs satellites, les expressions (92) se réduisent sensiblement aux expressions immédiates et beaucoup plus simples . . . (93)

$$\begin{aligned} \zeta &= (nV - gW) \cdot \sin(\chi + \Phi) + (mV - pW) \cdot \cos(\chi + \Phi), \\ \eta &= (nV - gW) \cdot \cos(\chi + \Phi) - (mV - pW) \cdot \sin(\chi + \Phi), \\ \zeta &= (IV - kW); \end{aligned}$$

comme cela doit être évidemment.

Et, dans cette supposition que l'inclinaison η de l'orbite de l'astre B, et l'inclinaison (η) de l'orbite de l'astre perturbateur C sont très-petites, si l'on fait coïncider les positions arbitraires des lignes fixes χ et (χ) des orbites des astres B et C, de manière qu'on ait $\chi = (\chi)$, on aura, en vertu des expressions (87) des coordonnées, pour les quantités respectives m , n , l , et p , q , k , formées par les expressions (89), les déterminations . . . (94)

$$\begin{aligned} m &= (r) \cdot \cos[\chi + (\Phi)] - r \cdot \cos(\chi + \Phi), \\ n &= (r) \cdot \sin[\chi + (\Phi)] - r \cdot \sin(\chi + \Phi), \\ l &= 0; \quad \text{et} \end{aligned}$$

$p = (r) \cdot \cos[\chi + (\Phi)]$, $q = (r) \cdot \sin[\chi + (\Phi)]$, $k = 0$; en distinguant ainsi par des parenthèses les éléments de l'orbite et du mouvement de l'astre perturbateur C. On obtiendra donc alors, pour les sommes des carrés de ces quantités, sommes qui entrent dans les expressions (90), les valeurs . . . (95)

$$\begin{aligned} (m^2 + n^2 + l^2) &= (r)^2 + r^2 - 2r \cdot (r) \cdot \cos[(\Phi) - \Phi], \\ (p^2 + q^2 + k^2) &= (r)^2; \end{aligned}$$

les quantités (Φ) et Φ étant les mouvements angulaires des astres C et B dans leurs orbites respectives; de sorte que si l'on dénote généralement par Δ la différence de ces mouvements, sans les réduire au plan fixe, on fera . . . (96)

$$\Delta = (\Phi) - \Phi.$$

Et par conséquent, dans ce cas où les inclinaisons η et (η) des orbites des astres B et C sont très-petites, les quantités auxiliaires V et W, en vertu de leurs expressions générales (90), seraient sensiblement . . . (97)

$$\begin{aligned} V &= (\Delta) \cdot \left\{ (r)^2 + r^2 - 2r \cdot (r) \cdot \cos \Delta \right\}^{-\frac{3}{2}}, \\ W &= (\Delta) \cdot \left\{ (r)^2 \right\}^{-\frac{3}{2}} = (\Delta) \cdot (r)^{-3}. \end{aligned}$$

De plus, par suite des expressions (94) des quantités respectives m , n , l , et p , q , k , on obtiendra les valeurs . . . (98)

$$n \cdot \sin(\chi + \Phi) + m \cdot \cos(\chi + \Phi) = (r) \cdot \cos \Delta - r,$$

$$q \cdot \sin(\chi + \Phi) + p \cdot \cos(\chi + \Phi) = (r) \cdot \cos \Delta.$$

$$n \cdot \cos(\chi + \Phi) - m \cdot \sin(\chi + \Phi) = (r) \cdot \sin \Delta,$$

$$q \cdot \cos(\chi + \Phi) - p \cdot \sin(\chi + \Phi) = (r) \cdot \sin \Delta.$$

Donc, en introduisant ces valeurs (97), (98), et (94), dans les expressions générales (93) des trois forces techniques ou perturbatrices $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{L}$, on obtiendra, pour ces forces, dans le cas où les inclinaisons η et (η) des orbites des astres B et C sont très-petites, les déterminations très-simples . . .

. . . (99)

$$\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}) \cdot \left\{ \left[\frac{1}{s^3} - \frac{1}{(r)^3} \right] \cdot (r) \cdot \cos \Delta - \frac{r}{s^3} \right\},$$

$$\mathfrak{T} = (\mathfrak{T}) \cdot \left\{ \left[\frac{1}{s^3} - \frac{1}{(r)^3} \right] \cdot (r) \cdot \sin \Delta \right\},$$

$$\mathfrak{L} = 0;$$

en faisant auxiliairement . . . (100)

$$s = \sqrt{(r)^2 + r^2 - 2r \cdot (r) \cdot \cos \Delta},$$

le signe du radical $\sqrt{}$ étant toujours positif.

Maïs, lorsque les inclinaisons η et (η) des orbites des astres B et C, tout en étant petites, ont néanmoins une valeur sensible, comme dans notre système solaire, les présentes expressions (99), surtout la dernière, ne sont pas suffisantes. Toutefois, il devient maintenant facile de les compléter, en développant les quantités $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{L}$, considérées comme fonctions des inclinaisons η et (η), par rapport aux puissances progressives des sinus de ces inclinaisons. Et, pour simplifier ces développements, nous pouvons, du moins dans une durée instantanée, en faisant $\eta = 0$, considérer le plan de l'orbite de l'astre B comme étant le plan fixe, auquel se rapportera alors le plan de l'orbite de l'astre C, avec tous ses éléments respectifs.

Par cette simplification, nous écarterons tout ce qui est étranger à la relation elle-même des deux plans des orbites des astres B et C. Et nous pourrions le faire d'autant plus que, par l'introduction de nos lignes fixes dans les différents plans, il n'est pas absolument nécessaire de réduire au plan fixe deux plans dont on ne veut connaître que le mouvement relatif, comme nous le verrons dans l'ouvrage qui suivra celui-ci, et qui aura pour objet spécial la Réforme de la Mécanique céleste.

Or, en faisant ainsi $\eta = 0$, et en considérant les trois forces perturbatrices $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{L}$, comme étant des fonctions de l'inclinaison (η) des deux plans en question, nous aurons, pour leurs développements par rapport aux puissances progressives de $\sin(\eta)$, la forme . . . (101)

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 \cdot (\sin \eta)^2 + \mathfrak{z}_2 \cdot (\sin \eta)^4 + \mathfrak{z}_3 \cdot (\sin \eta)^6 + \text{etc.},$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_1 \cdot (\sin \eta)^2 + \mathfrak{r}_2 \cdot (\sin \eta)^4 + \mathfrak{r}_3 \cdot (\sin \eta)^6 + \text{etc.},$$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1 \cdot \sin \eta + \mathfrak{h}_2 \cdot (\sin \eta)^3 + \mathfrak{h}_3 \cdot (\sin \eta)^5 + \text{etc.};$$

dans laquelle les trois premiers termes $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{h}_0$ de ces développements auront rigoureusement les valeurs (99). Il ne reste donc qu'à déterminer les coefficients de ces développements (101); et l'on aura alors, pour toute inclinaison (η) des deux plans, les déterminations générales des trois forces techniques ou perturbatrices $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{h}$, dont il est question. — Nous allons le faire; et, pour simplifier les calculs, nous supposons que les lignes fixes dans les deux orbites respectives des corps B et C, ont les valeurs . . . (102)

$$\chi = \beta \cdot \pi, \quad \text{et} \quad (\chi) = (\beta) \cdot \pi;$$

π étant toujours la circonférence du cercle pour le rayon égal à l'unité, et β et (β) des nombres entiers quelconques.

Nous aurons ainsi, d'après les expressions (86) et (87), pour les coordonnées x, y, z de l'astre B, et pour les coordonnées $(x), (y), (z)$ de l'astre C, les déterminations . . . (103)

$$(x) = (r) \cdot \left\{ \cos(\psi) \cdot \cos[(\Phi) - (\psi)] - \sin(\psi) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \cos(\eta) \right\},$$

$$(y) = (r) \cdot \left\{ \sin(\psi) \cdot \cos[(\Phi) - (\psi)] + \cos(\psi) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \cos(\eta) \right\},$$

$$(z) = (r) \cdot \sin(\eta) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)]; \quad \text{et}$$

$$x = r \cdot \cos \Phi, \quad y = r \cdot \sin \Phi, \quad z = 0.$$

Et alors, d'après les expressions (89) et (89)', on obtiendra les valeurs . . . (104)

$$\begin{aligned} (m^2 + n^2 + l^2) &= (r)^2 + r^2 - 2r \cdot (r) \cdot \left\{ \cos[(\Phi) - (\psi)] \cdot \cos[(\Phi) - (\psi)] + \right. \\ &\left. (\rho^2 + q^2 + k^2) = (r)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, faisant . . . (105)

$$l^2 = (m^2 + n^2 + l^2);$$

on aura, d'après les expressions (90), les valeurs . . . (106)

$$V = \frac{(\mathfrak{D})}{l}, \quad \text{et} \quad W = \frac{(\mathfrak{D})}{(r)};$$

et pour leurs dérivées différentielles, prises par rapport à l'inclinaison (η), considérée comme variable, les valeurs . . . (107).

$$\frac{dV}{d(\eta)} = - \frac{3 \cdot (\Sigma) \cdot r \cdot (r)}{r^2} \cdot \sin[\Phi - (\psi)] \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin(\eta),$$

$$\frac{dW}{d(\eta)} = 0.$$

Où obtiendra de plus, d'après les expressions (89) et (89)', les valeurs . . .
(108)

$$\begin{aligned} m \cdot \cos \psi + n \cdot \sin \psi &= + (r) \cdot \left\{ \cos[(\psi) - \psi] \cdot \cos[(\Phi) - (\psi)] \right. \\ &\quad \left. - \sin[(\psi) - \psi] \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \cos(\eta) \right\} - r \cdot \cos(\Phi - \psi), \\ m \cdot \sin \psi - n \cdot \cos \psi &= - (r) \cdot \left\{ \sin[(\psi) - \psi] \cdot \cos[(\Phi) - (\psi)] \right. \\ &\quad \left. + \cos[(\psi) - \psi] \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \cos(\eta) \right\} + r \cdot \sin(\Phi - \psi); \end{aligned}$$

et par conséquent, pour leurs dérivées différentielles, prises par rapport à l'inclinaison (η), les valeurs . . . (108')

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d(\eta)} \cdot \cos \psi + \frac{dn}{d(\eta)} \cdot \sin \psi &= \frac{dp}{d(\eta)} \cdot \cos \psi + \frac{dq}{d(\eta)} \cdot \sin \psi = \\ &= + (r) \cdot \sin[(\psi) - \psi] \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin(\eta), \\ \frac{dm}{d(\eta)} \cdot \sin \psi - \frac{dn}{d(\eta)} \cdot \cos \psi &= \frac{dp}{d(\eta)} \cdot \sin \psi - \frac{dq}{d(\eta)} \cdot \cos \psi = \\ &= + (r) \cdot \cos[(\psi) - \psi] \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin(\eta). \end{aligned}$$

Or, d'après les expressions (91) des quantités auxiliaires S, T, U, qui entrent dans les déterminations générales (92) des trois forces Σ , Γ , Υ , on a les dérivées différentielles . . . (109)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d(\eta)} &= + (m \cdot \cos \psi + n \cdot \sin \psi) \cdot \frac{dV}{d(\eta)} + \left(\frac{dm}{d(\eta)} \cdot \cos \psi + \frac{dn}{d(\eta)} \cdot \sin \psi \right) \cdot (V - W), \\ \frac{dT}{d(\eta)} &= - (m \cdot \sin \psi - n \cdot \cos \psi) \cdot \frac{dV}{d(\eta)} - \left(\frac{dm}{d(\eta)} \cdot \sin \psi - \frac{dn}{d(\eta)} \cdot \cos \psi \right) \cdot (V - W), \\ \frac{dU}{d(\eta)} &= + (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \left\{ \sin(\eta) \cdot \frac{dV}{d(\eta)} + \cos(\eta) \cdot (V - W) \right\}. \end{aligned}$$

Et lorsque $\eta = 0$, et $\chi = \beta\pi$, comme nous le supposons ici, les expressions générales (92) des trois forces perturbatrices Σ , Γ , Υ , donneront, pour les dérivées différentielles de ces forces, les valeurs . . . (110)

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{d(\eta)} &= \frac{dT}{d(\eta)} \cdot \sin(\Phi - \psi) + \frac{dS}{d(\eta)} \cdot \cos(\Phi - \psi), \\ \frac{d\Gamma}{d(\eta)} &= \frac{dT}{d(\eta)} \cdot \cos(\Phi - \psi) - \frac{dS}{d(\eta)} \cdot \sin(\Phi - \psi), \\ \frac{d\Upsilon}{d(\eta)} &= \frac{dU}{d(\eta)}. \end{aligned}$$

Done, en substituant ici les valeurs (109) des dérivées différentielles des quantités auxiliaires S, T, U, on obtiendra définitivement, pour les présentes dérivées différentielles (110) des trois forces perturbatrices $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, les expressions complètement déterminées . . . (111)

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{L}}{d(n)} &= \left\{ \begin{aligned} &+ (r) \cdot \cos[(\Phi) - (\psi)] \cdot \cos[\Phi - (\psi)] + r \\ &+ (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin[\Phi - (\psi)] \cdot \cos(n) \end{aligned} \right\} \cdot \frac{dV}{d(n)} \\ &\quad - (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin[\Phi - (\psi)] \cdot \sin(n) \cdot (V - W), \\ \frac{d\mathfrak{T}}{d(n)} &= \left\{ \begin{aligned} &- (r) \cdot \cos[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin[\Phi - (\psi)] \\ &+ (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \cos[\Phi - (\psi)] \cdot \cos(n) \end{aligned} \right\} \cdot \frac{dV}{d(n)} \\ &\quad - (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \cos[\Phi - (\psi)] \cdot \sin(n) \cdot (V - W), \\ \frac{d\mathfrak{U}}{d(n)} &= + (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \left\{ \sin(n) \cdot \frac{dV}{d(n)} + \cos(n) \cdot (V - W) \right\};\end{aligned}$$

dans lesquelles les quantités V, W, et leurs dérivées différentielles sont données par les expressions (106) et (107).

Où pourra maintenant, par de simples différentiations progressives, en partant des présentes expressions générales (111), qui constituent des fonctions immédiates de l'inclinaison (n), et dans lesquelles surtout la position indéterminée du nœud ψ se trouve éliminée, on pourra, disons-nous, déduire facilement tous les ordres ultérieurs des dérivées différentielles des trois forces perturbatrices $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$. — Or, ce sont notoirement ces dérivées différentielles qui serviront à la détermination des coefficients dans les développements (101) de ces forces perturbatrices. Et l'on y parviendra le plus directement possible en comparant les présentes séries (101) avec notre série générale (166), dans la Philosophie de la Technique, et en employant alors notre loi absolue (166)^{III} des séries, pour la détermination des coefficients en question. — On obtiendra ainsi, par un simple travail en quelque sorte mécanique, autant que l'on voudra de coefficients dans ces développements (101); et les trois forces techniques ou préteodument perturbatrices $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, se trouveront déterminées, d'une manière praticable, pour toute inclinaison (n) des deux plans des orbites des astres B et C dont il s'agit. — Nous osons bornerons ici à déduire, des expressions générales (111), les coefficients $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{U}_1$, et $\mathfrak{L}_2$, qui suffiront amplement pour tout notre système solaire. Et comme cette déduction n'a besoin que d'un travail mécanique, nous nous bornerons en outre à n'en présenter que les résultats. Les voici . . . (112)

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= -\frac{(\mathfrak{D})}{2} \cdot \left\{ \frac{3r}{r^3} \cdot [(r) \cdot \cos \Delta - r] + \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(r)^3} \right] \right\} \cdot (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin[\Phi - (\psi)], \\ \mathfrak{T}_0 &= -\frac{(\mathfrak{D})}{2} \cdot \left\{ \frac{3r \cdot (r)}{r^3} \cdot \sin \Delta \cdot \tan[\Phi - (\psi)] + \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(r)^3} \right] \right\} \cdot (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \cos[\Phi - (\psi)], \\ \mathfrak{H}_0 &= +(\mathfrak{D}) \cdot (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(r)^3} \right], \\ \mathfrak{H}_3 &= -\frac{3 \cdot (\mathfrak{D})}{2} \cdot \frac{r \cdot (r)^3}{r^3} \cdot \sin^3[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin[\Phi - (\psi)]; \end{aligned}$$

la quantité s étant donnée par l'expression (100).

Ainsi, en ne perdant pas de vue que, dans les développements (101) qui fixent immédiatement les trois forces $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{H}$, les trois premiers termes $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{H}_0$ ont les valeurs rigoureuses (99), nous aurons définitivement, pour la détermination de ces forces techniques ou perturbatrices en question, les expressions complètement déterminées et rigoureusement exactes . . .

. . . (113)

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= (\mathfrak{D}) \cdot \left\{ (r) \cdot \cos \Delta \cdot \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(r)^3} \right] - \frac{r}{r^3} \right\} \\ &- \frac{(\mathfrak{D})}{2} \cdot \left\{ \frac{3r}{r^3} \cdot [(r) \cdot \cos \Delta - r] + \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(r)^3} \right] \right\} \cdot (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin[\Phi - (\psi)] \cdot (\sin \eta)^2 \\ &+ \text{etc., etc.;} \\ \mathfrak{T} &= (\mathfrak{D}) \cdot \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(r)^3} \right] \cdot (r) \cdot \sin \Delta \\ &- \frac{(\mathfrak{D})}{2} \cdot \left\{ \frac{3r \cdot (r)}{r^3} \cdot \sin \Delta \cdot \tan[\Phi - (\psi)] + \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(r)^3} \right] \right\} \cdot (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \cos[\Phi - (\psi)] \cdot (\sin \eta)^2 \\ &+ \text{etc., etc.;} \\ \mathfrak{H} &= (\mathfrak{D}) \cdot \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(r)^3} \right] \cdot (r) \cdot \sin[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin \eta \\ &- \frac{(\mathfrak{D})}{2} \cdot \frac{3r \cdot (r)^3}{r^3} \cdot \sin^3[(\Phi) - (\psi)] \cdot \sin[\Phi - (\psi)] \cdot (\sin \eta)^3 \\ &+ \text{etc., etc.;} \end{aligned}$$

expressions que, par la différentiation ultérieure des premières dérivées différentielles (111) de ces forces perturbatrices, on pourra étendre aussi loin que l'on voudra, par rapport aux puissances progressives de la quantité $\sin \eta$, par rapport auxquelles précèdent ces développements.

Telle (113) et (111) est donc cette détermination, tout à la fois, et rigoureuse et éminemment simple on praticable, des trois forces techniques ou per-

turbatrices Σ , Γ , Λ , qui, par leur action, loin de déranger les mouvements des corps célestes, comme on le croit, les régularisent au contraire, en les rendant universellement périodiques. Et l'on conçoit que ces présentes déterminations (113), quoiqu'elles n'impliquent que les relations immédiates de deux plans, sont absolument générales; car, lorsque les plans des deux orbites où s'exerce cette action des forces techniques Σ , Γ , Λ , sont donnés par leurs relations respectives avec un troisième plan, on peut toujours, par nos susdites lois (83) de la transposition des plans, déterminer les relations immédiates des deux plans en question, ces relations immédiates qui entrent dans nos présentes expressions (113) des forces techniques dont il s'agit.

Or, cette détermination générale (113) et (11) des trois forces techniques Σ , Γ , Λ , constitue manifestement, sous le point de vue dynamique, la condition principale de l'accomplissement de la réforme de la mécanique céleste, que, par anticipation sur nos ouvrages ultérieurs, nous avons présentée dans les *Prolegomènes du Messianisme*. Aussi, en joignant à cet accomplissement dynamique, le susdit accomplissement algorithmique, constituant les méthodes absolues pour la solution de tous les problèmes algorithmiques, les géomètres, ceux du moins qui, dans l'ouvrage que nous venons de citer, auront approfondi la réforme de la mécanique céleste, qui y est produite, comprendront-ils que, déjà aujourd'hui, cette réforme se trouve suffisamment accomplie pour qu'on n'ait plus besoin que d'un travail en quelque sorte mécanique pour exécuter définitivement, pour amener à leurs derniers résultats, les solutions de tous les grands problèmes de cette haute science, telles que ces solutions sont déjà données réellement dans les *Prolegomènes du Messianisme*. En effet, pour tout ce qui concerne leurs conditions générales, tous les problèmes de la mécanique céleste, du moins tous les problèmes principaux, dont les autres ne sont que des corollaires, se trouvent déjà résolus dans ces *Prolegomènes*, comme nous allons le prouver, si tant est qu'il faille encore le prouver, par deux exemples décisifs. Tout ce qui y manquait, c'est, d'une part, sous le point de vue algorithmique, les méthodes absolues pour l'exécution algorithmique de ces solutions, et de l'autre part, sous le point de vue dynamique, la détermination des trois forces prétendument perturbatrices Σ , Γ , Λ , qui entrent comme parties constitutives, comme éléments, dans l'organisation systématique, dans l'ordre périodique et permanent du système du monde. Et ces méthodes absolues, ainsi que cette détermination des éléments Σ , Γ , Λ , nous venons de les donner dans l'ouvrage présent; de sorte qu'il ne reste absolument, comme nous venons de le dire, qu'un travail en quelque sorte mécanique pour l'accomplissement définitif des solutions que nous avons données dans les *Prolegomènes*.

Pour mieux établir cette vérité incontestable, nous devons surtout faire remarquer que ces solutions des grands problèmes de la mécanique céleste,

celles qui sont données dans les *Prolégomènes*, sont déjà, non-seulement *absolues*, et non de simples approximations, mais de plus les solutions *absolues* elles-mêmes de ces difficiles problèmes, telles que, dans son idéal, la raison les demande définitivement. En effet, toutes les principales inconnues s'y trouvent déterminées, non par des équations différentielles ou autres, ni même par des solutions approximatives de ces équations mutilées, comme le sont aujourd'hui tous les résultats de la mécanique céleste, spécialement ceux de la Mécanique céleste de Laplace, mais bien par des *formules fixes* et complètement déterminées, qui n'impliquent que des intégrales de fonctions également finies et déterminées. Et ces solutions rigoureuses et absolues, en les mettant en opposition aux solutions approximatives et purement relatives à des équations mutilées, c'est-à-dire, à des problèmes incomplets, suffiraient déjà pour constituer une réforme dans la mécanique céleste, quoique ce ne soit pas encore là le véritable principe de cette réforme, comme nous le verrons ci-après.

Il ne reste donc, pour l'accomplissement de nos solutions absolues, qu'à exécuter les intégrations immédiates qui y sont indiquées, après y avoir introduit nos présentes déterminations (113) des trois éléments techniques β , γ , η , que les astronomes auraient pu eux-mêmes déterminer facilement, parce que ce ne sont là proprement que des déterminations purement géométriques. Et ces intégrations qu'il reste à exécuter, et qui ne sont, à leur tour, que des opérations purement algorithmiques, pourront maintenant être accomplies facilement par les méthodes absolues que nous venons de faire connaître dans l'ouvrage présent, nommément, d'abord, par la méthode primordiale, qui suffira pour les besoins actuels de l'astronomie, et enfin, par la méthode suprême, par laquelle, pour satisfaire complètement la raison de l'homme, il faudra définitivement accomplir cette grande science.

A cette occasion, pour bien éclaircir ces travaux, nous devons dire un dernier mot concernant les méthodes absolues de l'algorithmie, dont il s'agit; dernier mot que nous avons annoncé plus haut pour l'accomplissement final de la réforme des Mathématiques pures. Aussi, pour continuer et pour terminer ici cette partie pure des Mathématiques, continuerons-nous à numérotter les formules dans l'ordre qu'à la suite de notre Philosophie de la Technique, nous avons poursuivi dans la partie précédente de ce Complément, où il a été question des Mathématiques pures.

Or, pour ce qui concerne d'abord la méthode primordiale (729), qui suffira dans l'état actuel de la science, nous devons prévenir les géomètres que, par suite de son origine purement technique, en tant qu'elle n'est encore, comme nous l'avons remarqué, qu'une *anticipation technique* sur la méthode suprême, cette méthode primordiale implique un élément arbitraire, c'est-à-dire, une mesure arbitraire, dont l'augmentation indéfinie peut la rendre impraticable, à l'instar des séries divergentes; et elle exige alors une modification que nous

allons indiquer. En effet, dans la série-commune intermédiaire (578), qui nous a servi de base ou d'instrument pour la formation de la méthode primordiale (729), nous avons déterminé, par le principe (564) de la méthode suprême (142), (143), etc., les éléments arbitraires n_1, n_2, n_3 , etc., qui entrent dans les mesures ou fonctions génératrices (588)' de cette série, et nous les avons ainsi déterminés, par ce principe (564), conformément aux conditions de la fonction problématique Fx ; de sorte que, par cette détermination des éléments n_1, n_2, n_3 , etc., les mesures ou fonctions génératrices (588)' de la série intermédiaire (578), qui forme ici notre série instrumentale, ont reçu une *détermination théorique*, du moins autant que ces mesures (588)' dépendaient de ces éléments arbitraires n_1, n_2, n_3 , etc. Mais, dans ces mêmes mesures ou fonctions génératrices (588)', restait encore un élément essentiel, sur lequel se règle principalement la série (578) dont il est question, savoir, l'élément $(x-a)$. Et de cette manière, la méthode primordiale (729), qui, dans sa partie théorique (729)', forme la quantité $\Sigma(\omega)$, résultant de la somme (614) des ω premiers termes déterminés ainsi théoriquement dans la série intermédiaire (578), et qui, dans sa partie technique (729)'', forme la quantité complémentaire $S(\omega+1)$, résultant d'une simple transformation des termes ultérieurs de cette série instrumentale (578) dont il s'agit; de cette manière, disons-nous, la méthode primordiale (729) implique encore ce principal élément arbitraire $(x-a)$ des mesures ou fonctions génératrices (588)' de la série-commune intermédiaire (578) qui a servi de base ou d'instrument à la formation de cette méthode primordiale. Elle participe donc encore, par cet élément arbitraire $(x-a)$ de ses fonctions génératrices (640), (640)', et (641), à la génération technique des séries; et elle partage conséquemment, avec les séries, par leur commun élément arbitraire $(x-a)$, l'inconvénient de pouvoir devenir divergente, lorsque cette mesure arbitraire $(x-a)$ reçoit une augmentation indéfinie. Il importe donc, pour l'accomplissement théorique de cette méthode primordiale, d'en éliminer l'influence de son élément technique $(x-a)$; et, comme on le conçoit ici facilement, l'application du procédé de la génération-neutre (773) et (775) des quantités, nous fera obtenir cet accomplissement théorique.

Pour cela, en donnant à la méthode primordiale (729), la forme . . .

. . . (791)

$$\begin{aligned}
 Fx = & Fx + \mathfrak{A}_1.P(1)_{\omega} \cdot (x-a) + \mathfrak{A}_2.P(2)_{\omega} \cdot (x-a)^2 + \mathfrak{A}_3.P(3)_{\omega} \cdot (x-a)^3 + \\
 & + \mathfrak{A}_4.P(4)_{\omega} \cdot (x-a)^4 \quad . \quad . \quad + \mathfrak{A}_{\omega}.P(\omega)_{\omega} \cdot (x-a)^{\omega} + \\
 & + \frac{\mathfrak{E}_{\omega+1}}{(n+x)^{\omega+1}} \cdot (x-a)^{\omega+1} + \frac{\mathfrak{E}_{\omega+2}}{(n+x)^{\omega+2}} \cdot (x-a)^{\omega+2} + \frac{\mathfrak{E}_{\omega+3}}{(n+x)^{\omega+3}} \cdot (x-a)^{\omega+3} + \text{etc., etc.};
 \end{aligned}$$

il suffira de la comparer avec la série générale (765) dont nous venons d'opérer la transformation consécutive, d'abord, en fractions-continues (766) ou (769), et ensuite, en génération-neutre (773) et (775), ou bien immédiatement dans la génération-neutre (774). Nous aurons ainsi, pour les coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc. de cette série (765), les valeurs présentes . . .

$$A_0 = F_n, \quad A_1 = \mathfrak{A}_1 \cdot P(1)_n, \quad A_2 = \mathfrak{A}_2 \cdot P(2)_n, \quad A_3 = \mathfrak{A}_3 \cdot P(3)_n, \quad \dots \quad A_n = \mathfrak{A}_n \cdot P(n)_n,$$

$$A_{n+1} = \frac{\mathfrak{E}_{n+1}}{(n+x)^{n+1}}, \quad A_{n+2} = \frac{\mathfrak{E}_{n+2}}{(n+x)^{n+2}}, \quad A_{n+3} = \frac{\mathfrak{E}_{n+3}}{(n+x)^{n+3}}, \quad \text{etc., etc.}$$

Et ces valeurs serviront, par le moyen des fractions-continues (766) ou (769), pour arriver à la génération-neutre (773) et (775), qui sera alors une génération-neutre absolue, du moins en tant qu'elle dépendra des présents éléments $P(1)_n, P(2)_n, P(3)_n, \dots, P(n)_n$, qui ont été déterminés par les conditions mêmes de la fonction problématique Fx , et qui ont ainsi une détermination théorique.

Or, sous cette forme (773) et (775) de la génération-neutre, la méthode primordiale (729), transformée ainsi en génération-neutre absolue, pourra servir généralement pour toutes les valeurs de son élément technique $(x - a)$, pourvu que, dans cette forme (773), on porte les développements du numérateur et du dénominateur à un degré μ assez grand pour que, dans tel degré d'exactitude que l'on voudra obtenir, l'élément technique $(x - a)$ soit dominé suffisamment. Et cette génération-neutre absolue que présentera alors la méthode primordiale, sera manifestement d'autant plus théorique, et par conséquent d'autant plus rapide, que le nombre $\mathfrak{E}$ des éléments théoriques $P(1)_n, P(2)_n, P(3)_n, \dots, P(n)_n$, y sera plus considérable. Aussi, tout ce que nous avons dit de l'avantage supérieur de la méthode primordiale, surtout pour ce qui concerne son application générale à la solution des problèmes, doit-il s'entendre comme ayant lieu dans son actuel accomplissement (773) et (775), constituant sa transformation finale, lorsqu'il en est besoin, en sa génération-neutre absolue (774) par le moyen des présents coefficients (792). Et c'est en effet sous cette forme accomplie de génération-neutre absolue que la méthode primordiale offre manifestement le moyen général, et aussi exact que l'on voudra, pour l'intégration des fonctions différentielles, pour cette intégration théorique et générale que nous avons signalée dans cet ouvrage (p. 353), et pour laquelle Lagrange considérait, comme une folie, la recherche d'une méthode générale, ainsi que nous l'avons déjà rappelé plus haut en signalant cette méthode générale et prétendument impossible dans notre méthode primordiale. — Et par conséquent, pour ce qui concerne la réforme de la mécanique céleste, dont il s'agit ici, nous aurons effectivement, dans la méthode

primordiale (729), transformée, lorsqu'il en est besoin, en sa génération-neutre absolue (773), le procédé infailible, et éminemment pratique pour opérer toutes les intégrations immédiates qui sont indiquées dans nos solutions des grands problèmes de la mécanique céleste, donnés dans les *Protégomènes* du Messianisme.

Bien plus, en considérant la périodicité qui existe dans les mouvements des astres, et les écarts peu considérables de la régularité permanente de ces mouvements, on peut, pour les intégrations dont nous parlons, se borner à un petit nombre de termes composant le numérateur et le dénominateur dans la génération-neutre (773) dont il est question, surtout lorsque, pour le besoin actuel de l'astronomie, il suffit de comprendre des durées de temps peu considérables, comme dans toutes les applications nautiques. Et alors, nos expressions générales (774) de la génération-neutre des quantités, en y introduisant les présentes valeurs (792) des coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc., et en transformant ainsi la méthode primordiale (729) en génération-neutre absolue, donneront immédiatement, d'une manière plus que suffisante, et surtout d'une manière incomparablement plus exacte que tout ce que la science a pu obtenir jusqu'à ce jour, les intégrations qu'il reste à opérer dans nos solutions absolues des problèmes de la mécanique céleste, et généralement toutes les intégrations et solutions des problèmes dont la science peut avoir besoin actuellement. — Mais, pour compléter, d'une manière praticable, ces expressions générales (774) de la génération-neutre des quantités, nous allons ajouter ici, aux cinq premiers ordres de ces expressions, que nous avons données à la marque (774), leur sixième ordre, qui, d'après ce que nous avons reconnu dans la Philosophie de la Technique (tome II, pag. 554), constitue un *ordre complet*, c'est-à-dire, l'un des *véritables progrès* de la génération-neutre des quantités; les ordres à degrés impairs étant *incomplets*, et ne formant que des *transitions* entre les ordres à degrés pairs.

Pour cela, en conservant ici la notation des médiateurs P et Q que, d'après notre Philosophie de la Technique, nous avons reproduits dans l'ouvrage présent, sous les marques (772), (773), (774) et (775), nous aurons d'abord, pour les médiateurs P_4, P_5 , et Q_4, Q_5 , avec lesquels, d'après leur loi (515), devront être formés les médiateurs P_6 et Q_6 pour le sixième ordre en question, les déterminations . . . (793)

$$P_4 = \frac{[A_0^2] - [A_1 \cdot A_3] \cdot (\varphi x) + [A_2^2] \cdot (\varphi x)^2}{[A_3^2]}$$

$$P_5 = \frac{[A_1^2] \cdot [A_3^2] - [A_2^2] \cdot [A_1 \cdot A_3] - A_1 \cdot S_9 \cdot (\varphi x) + [A_3^3] - A_3 \cdot S_9 \cdot (\varphi x)^2}{[A_1^2] \cdot S_9}$$

$$Q_4 = \frac{A_0 \cdot P_4 \cdot [A_3^2] + A_1 \cdot [A_2^2] \cdot (\varphi x) - S_0 \cdot (\varphi x)^2}{[A_3^2]},$$

$$Q_5 = \frac{A_0 \cdot P_5 \cdot [A_2^2] \cdot S_0 + A_1 \cdot [A_2^2] \cdot [A_3^2] \cdot (\varphi x) - \left\{ [A_3^2] \cdot S_0 - A_1 \cdot A_0 \cdot S_0 \right\} \cdot (\varphi x)^2 + [A_2^2] \cdot S_0 \cdot (\varphi x)^2}{[A_2^2] \cdot S_0},$$

eu employant toujours la notation (767) dont nous nous sommes servi pour les expressions (768), (770), et finalement (774) des premiers cinq ordres de la génération-neutre des quantités. — Or, d'après la susdite loi (515) de la formation des médiateurs P et Q, nous aurons, pour ceux du sixième ordre en question, les expressions . . . (794)

$$\begin{aligned} P_6 &= P_5 + \mathfrak{J}_6 \cdot \varphi x \cdot P_4, \\ Q_6 &= Q_5 + \mathfrak{J}_6 \cdot \varphi x \cdot Q_4; \end{aligned}$$

dans lesquelles il ne reste qu'à connaître le sixième caph-numérateur $\mathfrak{J}_6$ dans la fraction-continue (514), qui sert à la transformation de la série (765) en la présente génération-neutre (774). Et par le moyen des lois (508') et (514'), nous obtiendrons, pour ce sixième caph-numérateur, la valeur . . . (795)

$$\mathfrak{J}_6 = \frac{A_4 \cdot [A_2^2] - A_2 \cdot [A_3 \cdot A_1]}{A_3 \cdot [A_2^2] - A_0 \cdot [A_3 \cdot A_1]} - \frac{C_4 \cdot [A_2 \cdot A_1] - C_0 \cdot [A_2^2]}{C_4 \cdot [A_2 \cdot A_1] - C_5 \cdot [A_2^2]},$$

en formant les quantités auxiliaires . . . (795')

$$\begin{aligned} C_4 &= A_3 \cdot [A_2^2] - A_0 \cdot [A_3 \cdot A_1] = -A_1 \cdot [A_3 \cdot A_2], \\ C_5 &= A_4 \cdot [A_2^2] - A_2 \cdot [A_3 \cdot A_1] = -A_1 \cdot [A_3 \cdot A_4], \\ C_6 &= A_5 \cdot [A_2^2] - A_3 \cdot [A_3 \cdot A_2] = -A_1 \cdot [A_3 \cdot A_5]; \end{aligned}$$

et en nous servant toujours de la susdite notation (767), qui, dans sa plus grande généralité, telle qu'elle est nécessaire pour la prompte application de la loi (508') que nous venons de rappeler, lorsqu'il s'agit de deux systèmes M et N de quantités, est proprement . . . (796)

$$[M_p, N_r] = M_p \cdot N_r - N_{p-1} \cdot M_{r+1}.$$

Nous aurons donc, d'après la loi (516) et (516'), pour le sixième ordre de génération-neutre de toute fonction problématique Fx, donnée par la présente série générale (765), l'expression définitive . . . (797)

$$Fx = \frac{Q_6}{P_6} = \frac{Q_5 + \mathfrak{J}_6 \cdot Q_4 \cdot \varphi x}{P_5 + \mathfrak{J}_6 \cdot P_4 \cdot \varphi x},$$

dans laquelle les médiateurs P_4 , P_5 , et Q_4 , Q_5 , sont donnés par les expressions (793), et le caph-oumérateur $\mathfrak{U}_6$ par l'expression (795), savoir . . .

$$\mathfrak{U}_6 = \frac{[A_3 \cdot A_4]}{[A_1^2]} - \frac{[A_1^2] \cdot [A_3 \cdot A_5]}{[A_1^2] \cdot [A_3 \cdot A_4]} - \frac{[A_1^2] \cdot [A_2 \cdot A_4]}{[A_1^2] \cdot [A_2 \cdot A_3]}.$$

Telle (797) est donc, au moyen des coefficients A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , etc., de la série (765), l'expression générale et immédiate du sixième ordre de la génération-neutre de toute fonction problématique Fx , qui est donnée par cette série (765), ou par toute génération ayant la forme de l'algorithme primitif de sommation, ou plutôt de l'algorithme dérivé de numération, analogue à cette série générale (765). Et ce sixième ordre de génération-neutre des quantités, qui complète les cinq premiers ordres de cette génération que nous avons donnés à la marque (774), suffira presque généralement pour notre méthode primordiale, dans laquelle, d'après les expressions (792) des présents coefficients A_1 , A_2 , A_3 , etc., les six premiers de ces coefficients sont formés par les fonctions théoriques $P(1)_w$, $P(2)_w$, $P(3)_w$, etc., déterminées par les conditions mêmes de la fonction problématique Fx , dont il s'agit de découvrir la nature. — Ainsi, quand même, d'après le second ordre (786) de la méthode primordiale, on n'aurait que les deux premières $P(1)_w$ et $P(2)_w$ de ces fonctions théoriques, qui donneraient, pour les deux premiers coefficients A_1 et A_2 , les déterminations générales . . . (798)

$$A_1 = \frac{dFa}{da} \cdot \left\{ 1 - (x-a)^2 \cdot \frac{Z}{12 \cdot X} \right\},$$

$$A_2 = \frac{d^2Fa}{2 \cdot da^2} \cdot \left\{ 1 + (x-a) \cdot \frac{Y}{2 \cdot X} + (x-a)^2 \cdot \frac{Z}{12 \cdot X} \right\},$$

dans lesquelles les quantités X , Y , Z , seraient données par les expressions auxiliaires (785)ⁱⁱⁱ, et impliqueraient déjà, dans toute leur généralité, les quatre premières différentielles de la fonction problématique Fx , il suffirait d'attribuer aux quatre coefficients suivants A_3 , A_4 , A_5 , A_6 , les valeurs des coefficients des quatre premiers termes de la série complémentaire $S(3)$ dans cette spéciale méthode primordiale (786), pour que, par le présent sixième ordre de génération-neutre (797), on puisse déjà transformer cette méthode primordiale (786) en génération-neutre absolue, et telle que, dans tous les cas, même pour de grandes valeurs de la variable x , la fonction problématique Fx se trouve toujours complètement, ou du moins suffisamment déterminée. Et l'on croiroit que, si l'on employait le troisième ordre de la méthode primordiale (789), en y faisant $\mathfrak{U} = 3$, comme nous l'avons employé sous les marques (717) à (726), pour l'exemple que nous en avons donné, on aurait trois fonctions

théoriques $P(1)_3$, $P(2)_3$, $P(3)_3$, et l'on obtiendrait, pour la détermination de la fonction problématique Fx , par les ordres supérieurs (773) de la génération-neutre, une exactitude beaucoup plus grande. Ainsi, dans l'exemple que nous venons de rappeler, c'est-à-dire, pour la détermination de la fonction Fx , formant le logarithme de x , on aurait, d'après les expressions (717) et (718), les trois premiers coefficients . . . (799)

$$\begin{aligned} A_1 &= + \frac{1}{a} \cdot \left\{ 1 - (x-a)^3 \cdot \frac{1}{20 \cdot x^3} \right\}, \\ A_2 &= - \frac{1}{2a^2} \cdot \left\{ 1 - (x-a)^3 \cdot \frac{3}{5x^2} + 2(x-a)^3 \cdot \frac{1}{20 \cdot x^3} \right\}, \\ A_3 &= + \frac{1}{3a^3} \cdot \left\{ 1 - (x-a)^3 \cdot \frac{3}{2x} + (x-a)^3 \cdot \frac{3}{5x^2} - (x-a)^3 \cdot \frac{1}{20 \cdot x^3} \right\}; \end{aligned}$$

et d'après les expressions (725) des coefficients de la série complémentaire $S(4)$, on aurait, pour les coefficients suivants A_4 , A_5 , A_6 , etc., les valeurs . . . (799')

$$A_4 = 0, A_5 = 0, A_6 = 0, A_7 = - \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{(x+a)^7}, A_8 = 0, A_9 = - \frac{32}{5} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{(x+a)^9}, \text{ etc.}$$

Et avec ces valeurs des quantités A_1 , A_2 , A_3 , etc., les ordres supérieurs de génération-neutre (773) donneront, pour la fonction problématique Fx , c'est-à-dire, pour le logarithme de x , une détermination très-générale, et, comme telle, de beaucoup supérieure à celle que, sous la marque (726), nous avons obtenue par l'application immédiate de la méthode primordiale, à celle, disons-nous, qui, dans la réduction finale de sa partie théorique, en faisant abstraction de sa présente formation primitive (799), est . . . (800)

$$\begin{aligned} Fx &= Fa + \frac{(x+a)(x-a)}{2 \cdot ax} \cdot \left\{ 1 - \frac{(x-a)^2}{6 \cdot ax} + \frac{(x-a)^4}{30 \cdot a^2 \cdot x^3} \right\} \\ &- \frac{32}{5} \cdot \left\{ \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^7 + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^9 + \frac{10}{11} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^{11} + \text{etc.} \right\}. \end{aligned}$$

Pour s'exercer dans ce nouveau genre de calcul, les géomètres peuvent opérer la présente transformation de la série primordiale (800) ou (726) en génération-neutre absolue, par le moyen des ordres supérieurs (773) de génération-neutre des quantités, en ayant soin de considérer cette série primordiale (800) ou (726) dans sa formation élémentaire (717), (718) et (725), comme nous venons de le faire pour les déterminations (799) et (799') de ses coefficients primitifs A_1 , A_2 , A_3 , et A_4 , A_5 , A_6 , etc. — Et il faut toujours et essentiellement tenir compte des coefficients qui appartiennent à la série com-

plémentaire $S(\omega + 1)$, donnée par l'expression (729)', lors même que ces coefficients seraient zéro, comme dans l'exemple présent (799)'; car, l'usage, ou comme l'appelleraient les académiciens de Paris, le *secret* de la génération-neutre des quantités consiste en ce que, après avoir développé en infinitième le polynôme qui forme le dénominateur, et après avoir multiplié cet infinitième par le numérateur de l'expression (773) ou (773)' qui constitue la génération-neutre d'une fonction Fx , on retrouve tous les premiers termes de la série (765) qui donne cette fonction Fx , et qu'il s'agit de transformer ainsi en génération-neutre.

Toutefois, par les considérations susdites, nous aurons déjà, dans les six premiers ordres immédiats (774) et (797) de la génération-neutre des quantités, des moyens suffisants pour la transformation de la méthode primordiale (729) en génération-neutre absolue et propre à l'intégration théorique, et généralement à la solution théorique de tous les problèmes, et par conséquent propre à l'exécution générale des intégrales qui, dans les *Prolégomènes* du Messianisme, sont indiquées pour l'accomplissement théorique des solutions que nous y avons données des principaux problèmes de la mécanique céleste. — Mais, il ne faut pas perdre de vue que la transformation (774) et (797), ou généralement (773), de la méthode primordiale (729) en génération-neutre absolue n'est qu'un moyen accessoire pour l'évaluation des résultats que donne cette méthode lorsque, par un accroissement indéfini, son élément technique $(x - a)$ la rend divergente. En réalité, et dans toute sa pureté, la méthode primordiale consiste dans sa détermination absolue (729); et comme telle, cette méthode se distingue de tout procédé technique, notamment du procédé des séries dont elle a la forme, en ce que les fonctions $P(1)_\omega$, $P(2)_\omega$, etc., qui entrent dans ses fonctions génératrices (64n), savoir . . . (801)

$$\Omega_0 = 1, \quad \Omega_1 = P(1)_\omega \cdot (x - a), \quad \Omega_2 = P(2)_\omega \cdot (x - a)^2, \\ \Omega_3 = P(3)_\omega \cdot (x - a)^3, \quad . . . \quad \Omega_\omega = P(\omega)_\omega \cdot (x - a)^\omega,$$

et qui sont données par les expressions (635), et généralement (636), sont déterminées par les conditions mêmes de la fonction problématique Fx , et forment ainsi de véritables *éléments techniques* de cette fonction Fx ; tandis que dans les séries . . . (801')

$$Fx = A_0 + A_1 \cdot (x - a) + A_2 \cdot (x - a)^2 + A_3 \cdot (x - a)^3 + \text{etc.},$$

en les comparant à la loi suprême (777), les fonctions génératrices . . . (801)'

$\Omega_0 = 1, \quad \Omega_1 = (x - a), \quad \Omega_2 = (x - a)^2, \quad \Omega_3 = (x - a)^3, \text{ etc.},$
sont tout à fait arbitraires ou indépendantes des conditions de la fonction problématique Fx , et ne forment ainsi que des *mesures techniques* de cette

fonction Fx . — Quant au procédé de génération-neutre (774) et (797), ou généralement (773) et (775), par lequel nous transformons la méthode primordiale (791) en génération-neutre absolue, lorsque l'élément technique $(x - a)$ que cette méthode implique encore, en augmentant indéfiniment, la rend numériquement indéterminée, il est manifeste que ce procédé accessoire de génération-neutre n'a rien de commun avec l'essence même de la méthode primordiale (791), et qu'il ne sert ainsi qu'à son évaluation numérique dans ce cas d'indétermination arithmétique par l'influence de son élément technique $(x - a)$. En effet, ce procédé de génération-neutre (774), etc., étant fondé sur les fractions-continues, est universel, d'après les principes métaphysiques que, dans notre Philosophie des Mathématiques (pages 223 à 227), sous les marques (viii) et (ix), nous avons dévoilés pour les deux algorithmes techniques universels, les Séries et les Fractions-continues; et par conséquent, ce procédé de génération-neutre (774), etc., est applicable à toutes les suites algorithmiques qui sont formées par des puissances progressives, ou même par des facultés progressives d'une mesure arbitraire φx , d'après les principes algorithmiques de cette transformation universelle, que nous avons signalés sous les marques (10) à (14), dans notre Philosophie de la Technique (tome I^{er}, pages 27 à 29). Comme tel, ce procédé de génération-neutre (774), etc., est un procédé accessoire qui, sans les dénaturer, s'applique à toutes les suites algorithmiques pour leur accomplissement arithmétique, c'est-à-dire, pour leur évaluation numérique, lorsque, par l'augmentation de la valeur de leur mesure technique φx , ces suites deviennent indéterminées sous le point de vue arithmétique.

Ainsi, sans subir aucune altération dans son essence propre, la méthode primordiale (729) ou (791) subsiste dans toute son intégrité, et sans aucun changement essentiel, dans sa transformation en génération-neutre (774), etc. Son essence propre, et par conséquent son caractère distinctif, consistent en ce qu'elle offre, par une anticipation technique sur la méthode suprême (142), (143), etc., le procédé de la construction théorique ou de la construction de la nature elle-même de toute fonction problématique Fx , autant que s'étendent ses fonctions génératrices $P(1)_m$, $P(2)_m$, $P(3)_m$, etc., qui, par les conditions mêmes de cette méthode, peuvent s'étendre indéfiniment, et peuvent ainsi, en outre de leur immédiate construction théorique de la fonction cherchée Fx , rendre absolue la génération-neutre qui résulte de l'application du procédé accessoire (774), etc., que nous venons de caractériser. Aussi, dans l'emploi de la méthode primordiale (729) ou (791) pour la découverte de la nature ou de la construction théorique d'une fonction problématique Fx , est-ce une véritable et positive conquête, lorsqu'on parvient à déterminer un nombre plus grand de ses fonctions génératrices $P(1)_m$, $P(2)_m$, $P(3)_m$, etc. Et par conséquent, dans l'application de cette méthode à la mécanique céleste, pour

opérer les intégrations qui sont indiquées dans nos susdites solutions absolues, telles qu'elles sont données dans les *Prolegomènes*, ce sera une véritable découverte, un progrès réel de la science, lorsque, à la place du nombre ω des fonctions génératrices $P(1)_\omega$, $P(2)_\omega$, etc., que l'on aura déjà, on parviendra à substituer un nombre plus grand ($\omega + 1$) de ces fonctions théoriques. La science se trouvera ainsi libérée ou débarrassée de ces tentatives rhapsodiques que font aujourd'hui les géomètres, les uns après les autres, pour augmenter le chaos de leurs prétendues équations astronomiques. En effet, les véritables équations astronomiques, ce seront manifestement celles que donneront immédiatement ces fonctions génératrices $P(1)_\omega$, $P(2)_\omega$, $P(3)_\omega$, etc., des respectifs mouvements des astres; et, comme nous l'avons déjà fait remarquer, la véritable équation séculaire de ces divers mouvements astronomiques, ce sera, dans cette application de la méthode primordiale (729), sa série complémentaire $S(\omega + 1)$, donnée par l'expression (729)', série complémentaire qui, précisément par la susdite augmentation progressive du nombre ω des fonctions génératrices $P(1)_\omega$, $P(2)_\omega$, $P(3)_\omega$, etc., se trouvera réduite progressivement à une valeur absolue de plus en plus petite.

Il est sans doute superflu de faire savoir que, d'après les principes de la méthode d'exhaustion algorithmique, que nous avons signalés à la fin de notre *Philosophie de l'Infini*, on peut également appliquer cette méthode d'exhaustion à notre présente méthode primordiale. — Nous nous bornerons conséquemment à ne produire ici que le résultat le plus simple de cette exhaustion algorithmique.

Pour cela, partant de la fonction Fa , qui répond à la valeur donnée a de la variable x , si l'on veut connaître la fonction Fb , correspondant à la valeur b de la même variable x , on partagera la différence $(b - a)$ en ω parties ξ telles que, pour une telle partie ξ , la méthode primordiale (729) donne toujours une détermination convergente. On aura ainsi (802)

$$b = a + \omega \xi, \quad \text{et} \quad \xi = \frac{b - a}{\omega}.$$

Concevons maintenant, pour les quantités générales A_ω , $\Sigma_\omega + \epsilon$, et $P(\mu)_\omega$, qui sont les éléments de la méthode primordiale (729), un changement tel qu'à la place de la quantité a qui entre dans les deux premières A_ω et $\Sigma_\omega + \epsilon$, on substitue successivement les quantités a , $(a + \xi)$, $(a + 2\xi)$, $(a + 3\xi)$, . . . $(a + (\omega - 1)\xi)$, et à la place de la variable x qui entre dans les quantités $P(\mu)_\omega$, on substitue successivement les quantités $(a + \xi)$, $(a + 2\xi)$, $(a + 3\xi)$, . . . $(a + \omega\xi)$, et désignons ces changements par la notation suivante (803)

$$[p\lambda_p] = \left\{ \lambda_p \right\}_{a+(p-1)\lambda, \text{ pour } a}, \quad [p\Xi_{a+p}] = \left\{ \Xi_{a+p} \right\}_{a+(p-1)\lambda, \text{ pour } a}, \\ [pP(\mu)_w] = \left\{ P(\mu)_w \right\}_{a+p\lambda, \text{ pour } a}.$$

Formons alors les quantités générales . . . (804)

$$M(\mu) = [1\lambda_p] \cdot [1P(\mu)_w] + [2\lambda_p] \cdot [2P(\mu)_w] + [3\lambda_p] \cdot [3P(\mu)_w] + \\ + [4\lambda_p] \cdot [4P(\mu)_w] \cdot \cdot \cdot + [w\lambda_p] \cdot [wP(\mu)_w], \\ N(\mu) = \frac{[1\Xi_{a+p}]}{(n+a+\xi)^{w+p}} + \frac{[2\Xi_{a+p}]}{(n+a+2\xi)^{w+p}} + \frac{[3\Xi_{a+p}]}{(n+a+3\xi)^{w+p}} + \\ + \frac{[4\Xi_{a+p}]}{(n+a+4\xi)^{w+p}} \cdot \cdot \cdot + \frac{[w\Xi_{a+p}]}{(n+a+w\xi)^{w+p}};$$

et nous aurons, pour l'éhaustion algorithmique par la méthode primordiale (729), l'expression générale . . . (805)

$$Fb = Fa + \left\{ M(1) \cdot \xi + M(2) \cdot \xi^2 + M(3) \cdot \xi^3 \cdot \cdot \cdot + M(w) \cdot \xi^w \right\} + \\ + N(1) \cdot \xi^{w+1} + N(2) \cdot \xi^{w+2} + N(3) \cdot \xi^{w+3} + N(4) \cdot \xi^{w+4} + \text{etc.}, \text{ etc.};$$

quelque grande que soit la différence $(b-a)$ des nombres a et b qui forment les limites de cette détermination de la fonction problématique Fx . — Mais, lorsque cette différence $(b-a)$ est très-grande, le nombre w des termes dans les quantités auxiliaires (804) peut devenir trop considérable pour qu'on ne doive alors, et peut-être même toujours, préférer, à ce procédé d'exhaustion (805), la susdite transformation de la méthode primordiale (729) en génération-neutre absolue (774) et (797), ou (773) et (775), en se bornant à considérer ce procédé d'exhaustion (805) comme la preuve de la validité générale de la méthode primordiale pour toutes les valeurs a et b de la variable x dans la fonction problématique Fx .

Pour ce qui concerne ensuite la méthode secondaire (743) à (760), qui a pour objet l'application du problème-universel (743) à la solution des équations (744) de tous les genres, voici de même, d'après ce que nous avons annoncé plus haut, un dernier mot qu'il nous reste à dire sur cette deuxième méthode absolue des mathématiques. — A la vérité, par suite de la présente réforme de la mécanique céleste, nous n'avons plus besoin de résoudre, dans cette science, aucune équation fondamentale, ni primitive, ni dérivée, parce que, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, les résultats que nous y présentons, sont déjà complètement déterminés; et ils ne demandent plus que l'exécution des intégrales qu'ils contiennent, et pour lesquelles nous venons de donner les méthodes absolues. Mais, en traitant ici de ces méthodes, pour leur ac-

complissement final, nous devons aussi dire un dernier mot concernant la méthode secondaire (743) à (760) pour la résolution des équations de tous les genres.

Or, dans le Programme scientifique qui est à la tête de l'ouvrage présent, en y traitant de la classe de problèmes dont la solution dépend de celle du problème-universel (743), nous avons fait remarquer que le principe de la solution de ce problème-universel, telle que nous l'avons donnée, sous les marques (14) et (15), dans la *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, devait dériver immédiatement de la loi suprême (777), de laquelle dérivait également la forme (743) du problème-universel, comme nous l'en avons déduite effectivement, sous les marques (51) et (53), dans le premier tome de la Philosophie de la Technique. Et, dans ce même Programme scientifique, nous avons fait savoir immédiatement que ce principe de la solution du problème-universel, qui devait être donné par la loi suprême, consistait dans l'équation absolument générale . . . (806)

$$px = 0,$$

qui, ainsi que sa solution, dérive effectivement, d'une manière immédiate, de la loi suprême elle-même, sous les marques (232)^m et (232)ⁿ, dans le second tome de notre Philosophie de la Technique. En effet, sous ces marques, nous y trouvons, pour la solution de la présente équation générale (806), d'un genre quelconque, primitive ou dérivée, immanente ou transcendante, aux différences ou aux différentielles, totales ou partielles, la détermination, non-seulement de l'inconnue x , mais d'une fonction quelconque Fx de cette inconnue, sous la forme absolue . . . (807)

$$\begin{aligned} Fx &= Fw - w \cdot \frac{dFw}{d(w)} \\ &+ (w)^3 \cdot \frac{w[d^{v_1}(w) \cdot d^{v_2}Fw]}{1^{v_1} \cdot [d(w)]^{1+v_2}} \\ &- (w)^3 \cdot \frac{w[d^{v_1}(w) \cdot d^{v_2}(w)^2 \cdot d^{v_3}Fw]}{1^{v_1} \cdot 1^{v_2} \cdot [d(w)]^{1+v_2+v_3}} \\ &+ (w)^4 \cdot \frac{w[d^{v_1}(w) \cdot d^{v_2}(w)^3 \cdot d^{v_3}(w)^2 \cdot d^{v_4}Fx]}{1^{v_1} \cdot 1^{v_2} \cdot 1^{v_3} \cdot [d(w)]^{1+v_2+v_3+v_4}} \\ &- \text{etc.}, \text{ etc.}; \end{aligned}$$

dans laquelle la quantité w est absolument arbitraire, et les fonctions schies, que nous dénotons toujours par la lettre hébraïque Ψ de ce nom, dépendent de la permutation des exposants v_1, v_2, v_3, v_4 , etc.; dont les valeurs sont . . . (807)

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = 3, \quad \nu_4 = 4, \text{ etc. , etc.}$$

Nous supposons ici, comme plus haut, pour la déduction de la méthode primordiale (729), depuis la marque (564), que le lecteur a approfondi notre Philosophie de la Technie algorithmique, et par conséquent qu'il connaît ces fonctions *SCRIBIS* qui, comme éléments absolus, entrent dans la construction de la loi suprême (560) ou (777). — Lorsqu'il s'agit simplement de connaître l'inconnue x , on aura $Fx = x$, et la présente expression générale subit une réduction, comme on le voit à la marque (232)^{IV} dans l'ouvrage dont nous tirons cette solution universelle (807) des équations de tous les genres (806), savoir . . . (808)

$$\begin{aligned} x = & \nu - (\varphi\nu) \cdot \frac{d\nu}{d(\varphi\nu)} - (\varphi\nu)^2 \cdot \frac{d^2(\varphi\nu) \cdot d\nu}{1^{1/2} \cdot [d(\varphi\nu)]^{1+2}} \\ & - (\varphi\nu)^3 \cdot \frac{\Psi[d^{1/2}(\varphi\nu) \cdot d^2(\varphi\nu)^2] \cdot d\nu}{1^{1/2} \cdot 1^{1/2} \cdot [d(\varphi\nu)]^{1+2+3}} \\ & - (\varphi\nu)^4 \cdot \frac{\Psi[d^{1/2}(\varphi\nu) \cdot d^2(\varphi\nu)^2 \cdot d^4(\varphi\nu)^3] \cdot d\nu}{1^{1/2} \cdot 1^{1/2} \cdot 1^{1/2} \cdot [d(\varphi\nu)]^{1+2+3+4}} \\ & - \text{etc. , etc.} \end{aligned}$$

Eh bien, ce principe de la solution du problème-universel (743), de cette solution absolue que nous en avons donnée, aux susdites marques (14) et (15), dans notre *Réfutation de Lagrange*, peut, par anticipation sur notre méthode secondaire (743) à (760), servir déjà à la solution des équations de tous les genres (806), en formant ainsi, dans cette générale méthode secondaire, une méthode *élémentaire*, par opposition à la méthode *systématique* que présente notre application immédiate du problème-universel (743) à la solution (760) et (781) des équations (744) de tous les genres. Nous disons que cette présente méthode (808) sera purement *élémentaire*, parce que l'équation générale (806), à laquelle elle s'applique, ne présente encore que les éléments de l'équation (743), qui forme le problème-universel, et qui, comme nous l'avons dit plus haut, résulte du développement *systématique* de cette équation élémentaire, opéré par la loi suprême, comme nous l'avons fait sous les susdites marques (51) et (53) dans le premier tome de la Philosophie de la Technie. En effet, sous cette forme développée (743), le problème-universel représente immédiatement les distinctes et systématiques parties constituantes de tous les genres d'équations; tandis que, sous la forme non-développée (806), cette équation problématique ne représente encore que l'ensemble des éléments qui peuvent être contenus dans une équation donnée d'un genre quelconque. Ainsi, par exemple, dans les équations algébriques ordinaires . . . (809)

$$0 = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 \dots + A_m \cdot x^m,$$

le problème-universel (743) peut représenter toutes les parties constituantes qui concourent systématiquement à la formation de ces équations, comme nous le verrons dans le Supplément du second tome de l'ouvrage présent, où nous donnerons enfin, par la méthode secondaire systématique (744) à (760), la solution générale et si longtemps attendue de ces équations réfractaires; tandis que la présente équation non-développée (806) ne peut représenter que l'ensemble des éléments contenus dans de telles équations algébriques (809), comme dans toutes les autres équations en général. Et l'on conçoit que, par cette distinction systématique des parties constituantes des équations, le problème-universel (743) opère directement, par sa solution également universelle [(14) et (15) de la *Réfutation de Lagrange*], la solution spéciale des différents genres d'équations. Aussi, la méthode secondaire, qui est fondée sur l'application du problème-universel (743), telle que nous l'avons fait connaître, dans l'ouvrage présent, par ses derniers résultats (760) et (781), d'après les principes que, déjà dans la *Réfutation de Lagrange*, sous les marques (17) à (23), nous avions établis depuis plus de trente ans, cette méthode secondaire, disons-nous, est-elle manifestement, par ces conditions systématiques, la méthode absolue et finale pour la résolution des équations de tous les genres. — Toutefois, comme étoit le principe de cette systématique méthode secondaire (743) à (760), la présente méthode élémentaire (806) à (808) peut, par anticipation sur la méthode systématique (743) à (760), servir, avec utilité, pour la résolution des équations dans les cas précisément où la distinction systématique des parties constituantes des équations, n'est pas bien prononcée.

Nous aurons donc définitivement, comme méthodes absolues de la science, d'abord, pour la génération théorique des fonctions, qui constitue le contenu de l'algorithmie, la méthode suprême (142), (143), etc., et par anticipation technique, la méthode primordiale (729); et ensuite, pour la résolution théorique des équations, qui constitue la forme de l'algorithmie, la méthode systématique (743) à (760), et par anticipation technique, la méthode élémentaire (806) à (808). — Et autant que, pour la génération des fonctions, la méthode primordiale (729), considérée comme conséquence, peut servir à éclaircir l'application théorique de la méthode suprême (142), etc., autant, pour la résolution des équations, la méthode élémentaire (808), considérée comme principe, peut servir à éclaircir l'application théorique de la méthode systématique (743), comme nous allons le voir effectivement dans les caractères distinctifs de cette méthode élémentaire (808), caractères que nous allons signaler rapidement.

En examinant la quantité w qui, dans la détermination (808) de l'inconnue x , entre dans les fonctions génératrices (φw) , $(\varphi w)^2$, $(\varphi w)^3$, etc. de cette détermination, on reconnaît que, par la raison que cette quantité w , et par conséquent ces fonctions génératrices (φw) , $(\varphi w)^2$, $(\varphi w)^3$, etc., sont absolument

arbitraires, cette détermination (808) de l'inconnue x , en la comparant à notre loi suprême (777), n'est encore qu'une génération purement technique, d'après les principes que nous avons reconnus plus haut pour la distinction entre la théorie et la technique. Et nous en concluons immédiatement que, pour rendre rationnelle cette génération (808) de l'inconnue x , il faudrait déterminer la quantité ν , et par conséquent les fonctions génératrices $(\varphi\nu)$, $(\varphi\nu)^2$, etc., par les conditions mêmes du problème, c'est-à-dire, par la résolution la plus exacte possible de l'équation proposée (806), afin que les fonctions génératrices $(\varphi\nu)$, $(\varphi\nu)^2$, etc., déterminées ainsi par les conditions mêmes du problème, deviennent la plus petites possible, et que l'expression (808) de l'inconnue x , devienne convergente, c'est-à-dire, déterminée théoriquement. — Or, lorsque l'équation proposée (806) admettra une solution finie, on aura $\nu = x$, $(\varphi\nu) = 0$, et l'expression (808) se réduira à son premier terme, comme cela doit être. Mais lorsque l'équation proposée (806) n'admettra pas une solution finie, et c'est là, comme nous le savons maintenant, le cas le plus fréquent, et en quelque sorte universel, il faudra réduire l'équation proposée (806) à ce qui, dans sa construction principale ou essentielle, peut admettre une solution finie. Et nous nous trouvons ainsi ramené, dans la présente méthode élémentaire (808), aux conditions (744) et (745) de la méthode systématique (743) à (760). Nous aurons donc ici, comme dans la méthode systématique, à former d'abord l'équation (744) par l'introduction d'une quantité arbitraire a dans l'équation proposée (806), et à résoudre ensuite, pour $a = 0$, la résultante équation réduite (745), afin d'arriver, par sa solution finie, à la détermination de la présente quantité théorique ν qui est en question, et au moyen de laquelle les fonctions génératrices $(\varphi\nu)$, $(\varphi\nu)^2$, etc., dans l'expression (808), se trouveront ainsi déterminées par les conditions mêmes du problème (806); de sorte que cette expression (808) formera alors une génération théorique de l'inconnue x , du moins dans le cas où cette génération (808) de l'inconnue x sera réellement convergente, c'est-à-dire, déterminée théoriquement.

On conçoit que, dans la présente méthode élémentaire (808), comme dans la méthode systématique (743), l'équation réduite (745) constitue ce qu'il y a de fini dans le problème proposé (806); de sorte que la quantité ν qui résulte de la solution finie de cette équation (745), et qui, de même que dans la méthode systématique (743), formera ce que nous y avons nommé la *valeur fondamentale* de l'inconnue x , représentera, dans le premier terme de l'expression générale (808) de cette inconnue x , ce qu'il y a de purement fini dans le problème proposé (806). Et les autres termes de cette expression (808) représenteront conséquemment ce qu'il y a d'infini, d'une manière inévitable, dans la solution théorique de ce problème (806), lorsque le susdit critérium de cette solution théorique, c'est-à-dire, la convergence de l'expression (808), aura lieu réellement. Et l'on conçoit de plus que, lorsque ce critérium n'aura

pas lieu, l'équation réduite (745), qui devra donner la valeur fondamentale w de l'inconnue x , ne sera pas la plus proche de l'essence même du problème proposé (806); car, par l'introduction arbitraire de la quantité a dans l'équation proposée (806), pour en former l'équation générale (744), qui, en y faisant $a = 0$, se réduit à l'équation en question (745), on peut former une infinité de telles équations réduites (745), comme nous l'avons vu dans les équations (747) et (749) de l'exemple (746); et ces différentes équations réduites (745) pourront être plus ou moins proches de l'essence de l'équation proposée (806), et pourraient même en être éloignées tellement que la quantité w qui en résulterait, deviendrait en quelque sorte une quantité arbitraire par rapport à l'inconnue x , et rendrait alors purement technique l'expression (808) de cette inconnue. Il importe donc essentiellement d'avoir égard au susdit critérium de cette expression (808), lorsqu'il s'agit d'avoir une solution théorique de l'équation proposée (806); et pour cela, il faut former convenablement l'équation réduite (745), par l'introduction arbitraire de la susdite quantité a dans l'équation proposée (806).

Mais, cette formation convenable de l'équation réduite (745) n'est pas toujours facile, ni même possible. Il suffira alors de former cette équation réduite le plus près possible de l'équation proposée (806), comme nous l'avons fait dans les susdites réductions (747) et (749) pour l'exemple (746). Et l'on y parviendra, par un procédé d'exhaustion, analogue à celui que nous avons indiqué dans la méthode systématique, entre les expressions (763) et (764), pour la détermination, toujours infaillible, des générations théoriques (760) à (765). En effet, dans notre présente méthode élémentaire (808), après avoir obtenu ainsi la valeur w par une équation réduite (745), la plus convenable qu'il soit possible de former, on introduira cette valeur dans l'équation proposée (806); et l'on obtiendra, pour le susdit critérium de la génération théorique (808), c'est-à-dire, pour la condition de la convergence de cette génération, la relation . . . (810)

$$\varphi(w, a) < 1;$$

- qui fera connaître une première détermination a_1 de la quantité arbitraire a , pour laquelle l'expression (808) donnera la solution théorique, sinon de l'équation proposée $\varphi(x, 1) = 0$, du moins du premier degré d'exhaustion $\varphi(x, a_1) = 0$ de cette équation. Et prenant alors cette première détermination théorique de l'inconnue x pour la quantité w , la condition (810) fera connaître une deuxième détermination a_2 de la quantité arbitraire a ; et l'expression (808) donnera une deuxième détermination théorique de l'inconnue x . On obtiendra de même une troisième, une quatrième, etc., détermination des quantités a et x , jusqu'à ce que, pour la dernière $a = 1$ de ces déterminations, on parvienne ainsi à la finale détermination théorique de l'inconnue x .

Mais, quelque praticable que soit ici, tout comme dans la méthode systématique (760), ce procédé d'exhaustion, par la raison que les déterminations progressives a_1, a_2 , etc., de la quantité arbitraire a , sont contenues entre les limites de zéro et de l'unité, et qu'elles ne sauraient conséquemment être nombreuses, on peut ici, comme dans la méthode systématique (760), lorsque l'équation réduite (745) est assez proche de l'équation proposée (744) ou (806), et lorsque, par conséquent, la valeur fondamentale x ou ν qui en résulte pour l'inconnue x , n'en est pas très-éloignée, et que les fonctions génératrices $(\varphi\nu)$, $(\varphi\nu)^2$, etc., dans la présente expression finale (808), tout comme les fonctions génératrices Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc., dans la méthode systématique (760), se trouvent ainsi déterminées par les conditions mêmes du problème (744) ou (806), on peut alors, disons-nous, transformer l'expression finale (808), considérée comme impliquant encore quelque élément technique, en génération-neutre (774) et (797), ou généralement (773) et (775), comme nous l'avons fait, sous la marque (781), pour l'expression finale (760) de la méthode systématique. Il suffira, en effet, de comparer la présente expression finale (808) à la série générale (765), en faisant . . . (811)

$$\begin{aligned} A_0 &= + \nu, \\ A_1 &= - \frac{d\nu}{d(\varphi\nu)}, \\ A_2 &= - \frac{d^2(\varphi\nu).d\nu}{\nu^2 \cdot [d(\varphi\nu)]^{1+2}}, \\ A_3 &= - \frac{\varphi[d^3(\varphi\nu).d^2(\varphi\nu)^2].d\nu}{\nu^2 \cdot \nu^2 \cdot [d(\varphi\nu)]^{1+2+3}}, \\ &\text{etc., etc. ;} \end{aligned}$$

et les expressions générales (774) et (797) de la génération-neutre des quantités donneront immédiatement, pour la présente expression (808) en question, les transformations . . . (812)

$$\begin{aligned} x &= \nu + A_1.(\varphi\nu), \\ x &= \nu + \frac{A_1^2.(\varphi\nu)}{A_1 - A_2.(\varphi\nu)}, \\ x &= \nu + \frac{A_1.A_2.(\varphi\nu) + (A_2^2 - A_1.A_3).(\varphi\nu)^2}{A_2 - A_3.(\varphi\nu)}, \\ &\text{etc., etc. ;} \end{aligned}$$

qui suffiront pour la détermination de l'inconnue x , lorsque, comme nous le

supposons ici, l'équation réduite (745), qui donne la valeur fondamentale w , est assez proche de la nature de l'équation proposée (806).

Nous n'entrerons pas ici dans de plus amples détails, parce que tout ce que nous avons fait connaître pour déterminer la méthode systématique (743) à (760), s'applique ici, pour ainsi dire, littéralement. Aussi, pour bien comprendre la présente méthode élémentaire (808), suffira-t-il de bien approfondir la méthode systématique (760), telle que nous venons de l'exposer dans l'ouvrage présent, d'après les principes que, sous les marques (17) à (23), nous en avons donnés dans la *Réfutation de Lagrange*. Et à cette fin, pour s'exercer dans ce nouveau genre de calculs, les géomètres pourront, par la présente méthode élémentaire (806) à (812), résoudre l'équation différentielle du troisième ordre (746), que nous avons prise pour exemple de l'application de la méthode systématique (760). Ainsi (*), ils auront, dans les équations (749) et (749)', les équations préparatoires (744) et (745), et dans la solution finie (749)'' de la dernière de ces équations, la présente valeur fondamentale w , qui, jointe à ses différentielles (757), devra être substituée dans l'équation proposée (746) pour former la fonction génératrice (φw) dans les expressions présentes (808) et (812). De plus, en prenant sur la fonction d'équation φx de l'équation proposée (746), c'est-à-dire, sur la fonction . . . (813)

$$\varphi x = \xi \cdot \frac{d^3 x}{d\xi^3} - 3x^2 \cdot \frac{dx}{d\xi} + \xi^3 \cdot x^5 \cdot \frac{d^2 x}{d\xi^2} \cdot \frac{dx}{d\xi},$$

ses différentielles consécutives par rapport à la seule inconnue x , considérée comme variable, et en y substituant ensuite, à la place de cette inconnue x et de ses différentielles, sa présente valeur fondamentale (749)'' et ses différentielles (757), on obtiendra toutes les différentielles $d(\varphi w)$, $d^2(\varphi w)$, $d^3(\varphi w)$, etc., qui entrent dans les présentes expressions finales (808) et (812). Mais, en prenant ainsi les différentielles consécutives de la fonction d'équation (813), il

fautra considérer les différentielles $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{d^2 x}{d\xi^2}$, $\frac{d^3 x}{d\xi^3}$, etc., de la variable x

comme étant elles-mêmes fonctions de cette variable, moyennant la variable indépendante ξ , dont elles sont des fonctions immédiates. On obtiendra ainsi les différentielles (758), dans lesquelles entreront les différentielles réciproques (759), qui pourront être déterminées par les susdites différentielles (757) de la valeur fondamentale w , donnée par l'expression (749)'. Et de cette manière, nos présentes expressions (808) et (812) se trouveront complètement déterminées; et ces expressions finales (808) et (812) donneront la solution théorique de l'équation différentielle proposée (746) du troisième ordre, et même, si on

(*) En ayant égard aux modifications indiquées dans l'Errata.

le veut absolument, la solution rigoureusement théorique, en faisant intervenir le procédé d'exhaustion (810).

Nous répétons donc ici, et nous pouvons le faire avec plus de clarté, et même formellement, que, comme absolue, notre méthode secondaire, soit systématique (760) et (781), soit élémentaire (808) et (812), donne la solution théorique, et surtout par l'intervention du procédé d'exhaustion, la solution rigoureusement théorique des équations de tous les genres. Nous pouvons, en effet, le prouver maintenant, avec facilité, en faisant remarquer que, dans l'expression (808) de la méthode élémentaire, qui est le principe de la méthode systématique (760), les fonctions génératrices (pw) , $(pw)^2$, $(pw)^3$, etc., se trouvent déterminées par les conditions mêmes du problème (806), au moyen de la détermination de la valeur fondamentale w de l'inconnue x , par l'équation réduite (745), qui exprime ce qu'il y a de vini dans l'équation proposée (806), et qui, comme telle, approche le plus près possible de la nature de cette équation proposée (806), en faisant, au besoin, intervenir le procédé d'exhaustion (810); ce qui, d'après la distinction entre la théorie et la technique, que plus haut nous avons déduite de la loi suprême (777), est précisément le caractère d'une véritable *αλμαστρον μαθηματικον* des fonctions, consistant en ce que les fonctions génératrices Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , etc., dans la loi suprême (777), soient déterminées par les conditions mêmes de la fonction problématique Fx qu'il s'agit de découvrir, lors même, comme cela arrive d'ailleurs le plus souvent, et presque universellement, que le nombre de ces fonctions génératrices Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , etc., est indéfini. Aussi pouvons-nous maintenant faire mieux comprendre l'analogie qui existe entre ce nombre indéfini des fonctions génératrices Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , etc., qui, par la loi suprême (777), sont nécessaires pour la génération théorique des fonctions algébriques Fx , et le nombre indéfini des termes numériques qui sont nécessaires pour la génération des nombres incommensurables, irrationnels et transcendants, comme dans l'exemple (782), que nous avons allégué pour mieux faire comprendre aux géomètres la nécessité de cette génération indéfinie dans la construction, non de la valeur, mais de la nature elle-même des fonctions algébriques ou généralement algorithmiques.

Pour compléter ce dernier mot que nous venons de dire concernant la méthode secondaire, il ne nous reste qu'à faire remarquer le caractère distinctif de la méthode systématique (743) à (760). — Or, ce caractère dominant consiste en ce que, dans notre problème-universel (743), savoir . . . (814)

$$0 = fx + x_1.f_1x + x_2.f_2x + x_3.f_3x + \text{etc.}, \text{ etc.},$$

qui constitue la base de la méthode systématique (760), l'équation générale (806), savoir . . . (815)

$$0 = qx,$$

qui résulte immédiatement de la loi suprême, et qui constitue la base de la méthode élémentaire (808), se trouve développée, non-seulement pour représenter systématiquement les parties constitutives des équations de tous les genres, mais surtout pour dévisser de l'équation générale (815) la fonction fx qui, sous la forme d'équation . . . (816)

$$0 = fx,$$

constitue ce qu'il y a de fini dans la solution de l'équation générale (815). De cette manière absolue, et seulement de cette manière, notre problème-universel (814), en distinguant ce qu'il y a de fini et ce qu'il y a d'infini dans la solution de toute équation (815), constitue manifestement une loi fondamentale des mathématiques, en ce qu'il atteint ainsi le principe même de la génération des quantités qui sont données par des équations. Et de la vient précisément que la solution de ce problème-universel, telle que nous l'avons donnée, sous les susdites marques (14) et (15), dans la *Réfutation de Lagrange*, représente immédiatement, et dans tous ses éléments, la solution distincte des équations de tous les genres. Aussi, pour en déduire la solution spéciale de toute équation donnée, suffit-il de mettre cette équation sous la forme absolue de ce problème-universel (814) ou (743). Et c'est là précisément en quoi consiste la méthode systématique, telle que nous en avons établi les principes, sous les marques (17) à (23), dans la *Réfutation de Lagrange*, et telle qu'a, d'après ces principes, nous venons de la faire connaître, sous les marques finales (760) et (781), dans l'ouvrage présent. — Quant à la méthode élémentaire (808) et (812), son caractère distinctif consiste en ce qu'elle dérive immédiatement de la loi suprême, comme on le voit dans ce qui précède son exposition, sous les marques (232)" et (232)"', dans le second tome de notre *Philosophie de la Technie*, et en ce que, par suite de cette dérivation immédiate, elle s'applique aux équations de tous les genres, et constitue ainsi le principe de la solution du problème-universel, dont la forme (814), à son tour, dérive immédiatement aussi de la loi suprême, comme nous l'avons déduite, sous les susdites marques (51) et (53), dans le premier tome de cette même *Philosophie de la Technie*. Et pour conclusion décisive de cette grande question, nous ferons remarquer que c'est précisément dans cette forme (814), dérivée immédiatement de la loi suprême, que se trouve détachée la fonction caractéristique fx , dont l'équation spéciale (816) représente ce qu'il y a seul de fini dans la solution de toute équation d'un genre quelconque (806). Aussi, étant encore privée de cet avantage principal, la méthode élémentaire (806) à (808), dont l'équation (806) ne distingue pas l'élément fini (816), se trouve-t-elle parfois insuffisante, comme nous en verrons ci-après un exemple et les conditions de cette insuffisance.

Disons, enfin, un dernier mot concernant la méthode suprême (142), (143),

etc., elle-même, ce principe et ce terme de la science, au delà desquels il n'existe plus et il n'existera jamais rien en mathématiques. — Or, déjà en 1815, lorsque nous avons fait connaître cette méthode suprême, dans le premier tome de la *Philosophie de la Technique*, nous avons fait voir que l'application de cette grande méthode, et par conséquent la solution de tous les problèmes des mathématiques, dépendent de l'intégration ou de la solution progressive des équations de condition (143)', (144)', (145)', etc., qui, comme on le voit dans leurs développements, sont de simples équations linéaires aux différences ou aux différentielles; suivant que les conditions de la fonction problématique Fx , dont il s'agit de découvrir la nature, sont données par les différences ou par les différentielles de cette fonction Fx . Et dans l'ouvrage présent, nous avons déjà résolu ces équations de condition (143)' et (144)', etc., d'abord, sous les marques (564) et suivantes, pour la création de la méthode primordiale (729), et ensuite vers la fin de la deuxième partie du présent tome premier de cet ouvrage, par l'application de la méthode secondaire et systématique (743), dans ses résultats progressifs, simple, la GÉNÉRATION-MIXTE (760), et composé, l'ANTICIPATION-THÉORIQUE (764). — Mais, sans parler de la complication qui est inhérente à cette anticipation-théorique (764), elle n'est encore, comme le dit son nom, qu'une anticipation sur la génération théorique des quantités, et non déjà cette génération idéale elle-même, qui seule peut satisfaire la raison. Il nous reste donc encore, pour l'accomplissement final de cette réforme des mathématiques, et par conséquent pour couronner définitivement cette difficile science du géomètre, la plus grande des sciences, à présenter l'intégration ou la solution purement théorique des équations de condition (143)', (144)', (145)', etc., dont dépend la réalisation péremptoire de la méthode suprême (142), (143), etc. — Nous allons le faire; et à cette occasion, nous devons d'abord prévenir que nous avons produit l'*anticipation-théorique* (764), dont nous reconnaissons ici l'insuffisance finale pour la méthode suprême, uniquement pour épuiser tous les modes possibles de la science, et pour ne laisser ainsi rien d'incomplet dans notre systématique méthode secondaire (743) à (764). Mais, en considérant, d'une part, la susdite complication que présente cette anticipation-théorique (764), et de l'autre part surtout, le caractère suffisamment théorique de la *génération-mixte* (760), comme nous venons de le reconnaître dans la précédente exposition de la méthode élémentaire (806) à (812), nous pouvons, pour l'application utile de la systématique méthode secondaire (743) à (764), ranger l'anticipation-théorique (764) au nombre des spéculations possibles, et n'employer pratiquement que la seule génération-mixte (760), non-seulement pour la solution générale des équations de tous les genres, mais même, avec des préparations convenables et purement théoriques, que nous allons précisément signaler, à l'intégration ou à la solution définitive des équations de con-

différentielles de la fonction problématique Fx et de toutes les fonctions génératrices précédentes $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_{\mu-1}$, déjà connues.

Or, en appliquant d'abord, à l'intégration ou à la solution de ces équations de condition (818) notre méthode secondaire, soit systématique (760) et (781), soit élémentaire (808) et (812), comme nous l'avons proposé, du moins pour la méthode systématique, à la fin de la deuxième partie du présent tome premier de cet ouvrage; il faudrait, d'après les équations préparatoires (744) et (745), introduire dans ces équations de condition (818) une quantité arbitraire a , de manière que pour $a \equiv 0$, elles se réduisent à une forme soie, que l'on pourrait intégrer ou résoudre par un procédé également fini. Mais, cette introduction de la quantité auxiliaire a , tout en cherchant à la faire de manière que l'équation réduite (745), qui répond à $a \equiv 0$, soit, à chaque fois, la plus proche possible de la nature des équations proposées (818), est manifestement plus ou moins arbitraire, et par conséquent la valeur fondamentale qui, pour l'inconnue $\Omega_{\mu-1}$, résulte de la solution de cette équation réduite, est nécessairement arbitraire aussi; de sorte que, dans cette application de la méthode secondaire, soit systématique (760), soit élémentaire (808), il entre toujours quelque chose d'arbitraire qui, lors même que l'on fait intervenir les susdits procédés d'exhaustion (812), rend plus ou moins technique cette solution des équations par nos méthodes secondaires. Il importe donc de pouvoir réduire les présentes équations de condition (818), ou du moins leurs solutions préalables, pour la détermination de la susdite valeur fondamentale de l'inconnue $\Omega_{\mu-1}$, à un procédé fini, mais indépendant de toute détermination arbitraire de ces équations réduites en question. Et pour peu que l'on examine nos présentes équations de condition (818), on reconnaît facilement qu'elles ne sauraient, dans toute leur généralité, recevoir une solution finie que dans le seul cas où leurs coefficients $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$, seraient des quantités constantes. Il suffit donc, pour obtenir ici la valeur fondamentale de l'inconnue $\Omega_{\mu-1}$, celle que doit donner l'équation réduite (745), de considérer d'abord, comme des quantités constantes, les coefficients $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$, dans nos présentes équations de condition (818), en leur attribuant leurs valeurs moyennes, c'est-à-dire, celles qui répondent à la valeur $x = k$, à laquelle correspond la constante Fk de la fonction problématique Fx . On pourra alors intégrer ces équations (818) par les procédés connus de l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, par ces procédés que, d'après ce que nous avons déjà fait savoir plus haut, nous avons donné, d'une manière absolue, dans la *Critique de la Théorie des fonctions génératrices de Laplace*, en les y déduisant du principe absolu $A \equiv A$, auquel seul se trouve également déduite notre loi suprême.

Nous obtiendrons ainsi, dans tous les cas, par un procédé aussi simple qu'infaillible, une première détermination, rigoureusement théorique, de l'in-

connue $\Omega_{\mu-1}$, dans les équations de condition (818), parce que cette détermination sera opérée immédiatement par les conditions mêmes du problème (818), et qu'elle sera manifestement indépendante de toute modification arbitraire de ces équations (818). — Et alors, pour ne s'écarter en rien des éléments de la loi suprême, la méthode élémentaire (806) à (808), qui constitue, pour ainsi dire, une partie intégrante de cette loi suprême, paraîtrait devoir ici servir immédiatement pour la détermination ultérieure, et également théorique, de l'inconnue $\Omega_{\mu-1}$ en question, en y introduisant, à la place de sa quantité arbitraire et fondamentale ω , la présente première détermination rigoureusement théorique de cette inconnue.

Mais, quelque simple, et par conséquent avantageuse que serait, dans ce cas majeur, l'application de la méthode élémentaire (806) à (808), c'est ici malheureusement que, d'après ce que nous avons annoncé plus haut, cette méthode devient insuffisante, parce que, dans ce cas précisément, elle élimine toutes les quantités variables dFx , d^2Fx , d^3Fx , . . . $d^{\mu}Fx$, qui sont données, et ne laisse subsister que les rapports constants des susdites valeurs moyennes de ces quantités, rapports qui ne suffisent pas pour la détermination, dans toute sa généralité, de la fonction génératrice cherchée $\Omega_{\mu-1}$. Aussi ne donne-t-elle, pour cette fonction inconnue $\Omega_{\mu-1}$, rien autre qu'une quantité constante qui, à la vérité, satisfait aux équations en question (818), mais qui ne fait pas connaître la fonction demandée $\Omega_{\mu-1}$ dans toute la généralité où l'on a besoin de la connaître. — Cette grave et fâcheuse insuffisance qui, si elle n'avait pas lieu, rendrait très-simple l'application de la méthode suprême, mérite d'être éclairci par un exemple, pour mieux faire concevoir les conditions de cette défektivité présente de la méthode élémentaire (806) à (808), et pour découvrir par là la modification que doit recevoir la méthode systématique (743) à (760), afin de devenir rigoureusement théorique.

Pour cela, bornons-nous au cas le plus simple des équations de condition (818), à celui où l'indice $\mu = 2$, savoir, à l'équation . . . (820)

$$0 = d\Omega, d^2Fx - d^2\Omega, dFx,$$

qui est la première (143)^{re} de ces équations de condition pour la méthode suprême (143), etc., et qui a pour objet de faire découvrir la première Ω_1 de ses fonctions génératrices, que nous désignerons ici simplement par Ω . — Or, en considérant la valeur moyenne α de la variable x , celle que donne, pour x , l'équation $\varphi x = 0$, formée avec la fonction génératrice φx de la série complémentaire dans la méthode suprême (143), et celle, par conséquent, à laquelle, dans cette méthode, répond la valeur constante $F\alpha$ de la fonction problématique Fx , en considérant, disons-nous, cette valeur moyenne α de la variable x , nous distinguerons par des crochets les fonctions de cette variable

lorsqu'on y aura $x = a$; et nous aurons ainsi, pour une première détermination de la fonction cherchée Ω , l'équation . . . (821)

$$0 = [d^2 Fx] . d\Omega - [dFx] . d^2 \Omega,$$

correspondant à l'équation réduite (745) de notre méthode secondaire, systématique et élémentaire. Et l'intégration de cette équation, d'après le procédé (95) de notre *Critique de Laplace*, donnera, pour cette première détermination de la fonction Ω , avec deux constantes arbitraires P et Q, l'expression . . . (822)

$$\Omega = P + Q . e^{Ax};$$

en faisant auxiliairement . . . (823)

$$A = \frac{\left[\frac{d^2 Fx}{dFx . dx} \right]}{\frac{d^2 Fa}{dFa . da}}.$$

Ce sera donc là, dans notre méthode élémentaire dont il est question, en représentant l'équation proposée (820) par l'équation générale (806), la quantité w formant la valeur fondamentale de l'inconnue Ω , savoir . . . (823)

$$w = P + Q . e^{Ax}.$$

Mais, pour simplifier les expressions, faisons . . . (824)

$$X = Fx, \quad Y = \frac{dFx}{dx}, \quad Z = \frac{d^2 Fx}{dx^2};$$

et nous aurons ici, pour l'équation générale (806), la fonction d'équation . . . (825)

$$\varphi\Omega = Z . \frac{d\Omega}{dx} - Y . \frac{d^2 \Omega}{dx^2}.$$

Et par conséquent, en y introduisant, à la place de la fonction cherchée Ω , sa valeur fondamentale w , donnée par (823), nous obtiendrons, pour la fonction génératrice φw de l'expression (808) dans notre méthode élémentaire, l'expression . . . (826)

$$\varphi w = \left\{ Z - AY \right\} . Q . e^{Ax}.$$

Il ne nous reste donc, pour compléter les éléments de l'expression (808), qui doit nous donner l'inconnue Ω de l'équation proposée (820), il ne nous reste, disons-nous, qu'à déterminer les différentielles de la fonction d'équation $\varphi\Omega$, en prenant ces différentielles par rapport à l'inconnue Ω , considérée comme variable. Et pour cela, la présente expression (825) de cette fonction d'équation $\varphi\Omega$ nous donnera d'abord, en vertu de notre loi (459) des différentielles médiate, les déterminations suivantes . . . (827)

(10).

$$\begin{aligned}\frac{d(\varphi\Omega)}{d\Omega} &= \left\{ Z \cdot \frac{d^2\Omega}{dx^2} - Y \cdot \frac{d^3\Omega}{dx^3} \right\} \cdot \left(\frac{dx}{d\Omega} \right), \\ \frac{d^2(\varphi\Omega)}{d\Omega^2} &= \left\{ Z \cdot \frac{d^3\Omega}{dx^3} - Y \cdot \frac{d^4\Omega}{dx^4} \right\} \cdot \left(\frac{dx}{d\Omega} \right)^2 + \left\{ Z \cdot \frac{d^2\Omega}{dx^2} - Y \cdot \frac{d^3\Omega}{dx^3} \right\} \cdot \left(\frac{d^2x}{d\Omega^2} \right), \\ \frac{d^3(\varphi\Omega)}{d\Omega^3} &= \left\{ Z \cdot \frac{d^4\Omega}{dx^4} - Y \cdot \frac{d^5\Omega}{dx^5} \right\} \cdot \left(\frac{dx}{d\Omega} \right)^3 + 3 \cdot \left\{ Z \cdot \frac{d^3\Omega}{dx^3} - Y \cdot \frac{d^4\Omega}{dx^4} \right\} \cdot \left(\frac{dx}{d\Omega} \right) \cdot \left(\frac{d^2x}{d\Omega^2} \right) \\ &\quad + \left\{ Z \cdot \frac{d^2\Omega}{dx^2} - Y \cdot \frac{d^3\Omega}{dx^3} \right\} \cdot \left(\frac{d^3x}{d\Omega^3} \right),\end{aligned}$$

etc., etc. ;

dans lesquelles, d'après les expressions (759), fondées sur nos lois (311) et (312) de la formation des différentielles réciproques, nous aurons . . . (828)

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\Omega} \right) &= \frac{1}{\left(\frac{d\Omega}{dx} \right)}, \\ \left(\frac{d^2x}{d\Omega^2} \right) &= - \left(\frac{d^2\Omega}{dx^2} \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{d\Omega}{dx} \right)^3}, \\ \left(\frac{d^3x}{d\Omega^3} \right) &= \frac{3 \cdot \left(\frac{d^2\Omega}{dx^2} \right)^2 - \left(\frac{d\Omega}{dx} \right) \cdot \left(\frac{d^3\Omega}{dx^3} \right)}{\left(\frac{d\Omega}{dx} \right)^5}, (*)\end{aligned}$$

etc., etc.

Et d'après la valeur fondamentale w de l'inconnue Ω , donnée par l'expression (822) ou (823), nous aurons généralement, pour des indices quelconques μ et ρ , les valeurs . . . (829)

$$\begin{aligned}\frac{d^{\mu}w}{dx^{\mu}} &= \frac{d^{\rho}Q}{dx^{\rho}} = Q \cdot h^{\rho} \cdot e^{hx}; \quad \text{et par conséquent,} \\ Z \cdot \frac{d^{\rho}\Omega}{dx^{\rho}} - Y \cdot \frac{d^{\rho+1}\Omega}{dx^{\rho+1}} &= Q \cdot \{ Z - hY \} \cdot h^{\rho} \cdot e^{hx}.\end{aligned}$$

Donc, substituant ces valeurs dans les expressions précédentes (827) et (828), nous obtiendrons, d'abord, pour les expressions (827), les valeurs . . . (830)

(*) Voyez l'Errata pour la troisième des formules (759).

$$\frac{d(\varphi w)}{d\Omega} = Q \cdot \{ Z - AY \} \cdot \left(\frac{dx}{d\Omega} \right) \cdot h^2 \cdot e^{hx},$$

$$\frac{d^2(\varphi w)}{d\Omega^2} = Q \cdot \{ Z - AY \} \cdot \left\{ h \cdot \left(\frac{dx}{d\Omega} \right)^2 + \left(\frac{d^2x}{d\Omega^2} \right) \right\} \cdot h^2 \cdot e^{hx},$$

$$\frac{d^3(\varphi w)}{d\Omega^3} = Q \cdot \{ Z - AY \} \cdot \left\{ h^3 \cdot \left(\frac{dx}{d\Omega} \right)^3 + 3h \cdot \left(\frac{dx}{d\Omega} \right) \cdot \left(\frac{d^2x}{d\Omega^2} \right) + \left(\frac{d^3x}{d\Omega^3} \right) \right\} \cdot h^2 \cdot e^{hx},$$

etc., etc. ;

et ensuite, pour les expressions (828), les valeurs . . . (831)

$$\left(\frac{dx}{d\Omega} \right) = + \frac{e - hx}{h \cdot Q},$$

$$\left(\frac{d^2x}{d\Omega^2} \right) = - \frac{e - hx}{h \cdot Q^2},$$

$$\left(\frac{d^3x}{d\Omega^3} \right) = + \frac{2 \cdot e - 3hx}{h \cdot Q^3},$$

etc., etc.

Donc, substituant ces dernières valeurs dans les valeurs précédentes (830), nous obtiendrons définitivement, en y joignant l'expression (826), pour les éléments en question de l'expression (808) de la méthode élémentaire, les quantités . . . (832)

$$(\varphi w) = \{ Z - AY \} \cdot Qh \cdot e^{hx},$$

$$\frac{d(\varphi w)}{d\Omega} = \{ Z - AY \} \cdot h,$$

$$\frac{d^2(\varphi w)}{d\Omega^2} = 0, \quad \frac{d^3(\varphi w)}{d\Omega^3} = 0, \quad \text{etc., etc.} = n.$$

Et par conséquent, l'expression finale (808) de la méthode élémentaire donnerait ainsi, pour la fonction inconnue Ω , de l'équation proposée (820), la quantité . . . (833)

$$\Omega_1 = P + Q \cdot e^{hx} - Q \cdot e^{hx} + 0 = P;$$

c'est-à-dire, la quantité constante P , qui, comme nous l'avons annoncé, satisfait bien à l'équation proposée (820), mais ne nous fait pas connaître la fonction cherchée Ω , dans toute la généralité où nous en avons besoin, pour former avec elle la première fonction génératrice Ω , dans la méthode suprême (142).

Il devient ainsi constaté que la méthode élémentaire (806) à (808) est insuffisante pour l'intégration ou pour la solution théorique et générale des

équations de condition (818) dans la méthode suprême (142). Et dans la présente application (833) de cette méthode, nous découvrons en même temps les conditions de son insuffisance. En effet, la fonction génératrice φw , dans cette méthode, telle qu'elle est donnée par l'expression (826), et toutes les différentielles de cette fonction φw , telles qu'elles sont données par les expressions (830), contiennent toutes le facteur $|Z - AY|$, et l'on voit, dans l'expression finale (808) de la méthode élémentaire, que ces différentes fonctions, primitives et différentielles, se trouvent au même degré au numérateur et au dénominateur des termes progressifs de cette expression finale (808); de sorte que ce facteur $|Z - AY|$, formé des quantités variables Y et Z , qui sont données par le problème (820), s'élimine dans tous ces termes progressifs de l'expression (808). Ainsi, comme nous l'avons annoncé, toutes les quantités variables qui sont données par le problème, disparaissent dans l'application de la méthode élémentaire (808); et il n'y reste que les valeurs moyennes et constantes de ces variables données, valeurs constantes qui, lorsqu'il s'agit de déterminations théoriques, ne suffisent pas pour la solution du problème.

Heureusement, ces conditions de l'insuffisance de la méthode élémentaire pour la présente solution théorique des équations de condition (818) dans la méthode suprême (142), nous font découvrir, en nous ramenant à la méthode systématique (743) à (760), les conditions auxquelles dépend, dans cette méthode systématique, la solution rigoureusement théorique, non-seulement des présentes équations de condition (818), mais généralement de toute équation d'un genre quelconque. Il faut, en effet, pour éviter l'insuffisance précédente, remplir deux conditions, savoir : 1°. que l'équation réduite (745) dépende de seules valeurs moyennes et constantes des variables qui sont données dans l'équation problématique (744), afin que, d'après ce que nous avons remarqué à l'occasion du problème précédent (820), la solution de cette équation réduite (745) ne contienne rien d'arbitraire, et soit ainsi rigoureusement théorique; et 2°. que les quantités variables qui se trouvent dans le problème proposé (744), ne s'éliminent pas dans la solution (760) de ce problème. Et ces deux conditions peuvent être remplies facilement par notre méthode systématique (743) à (760), comme nous allons le voir.

A la place des équations de condition (818), concevons une équation quelconque, aux différences ou aux différentielles, sous la forme générale . . .
(834)

$$\psi x = H_0 \cdot \Omega + H_1 \cdot \frac{d\Omega}{dx} + H_2 \cdot \frac{d^2\Omega}{dx^2} + H_3 \cdot \frac{d^3\Omega}{dx^3} \dots + H_n \cdot \frac{d^n\Omega}{dx^n},$$

à laquelle on peut notoirement mener toute équation pareille. En effet, dans cette forme, Ω est la quantité inconnue, ψx une fonction quelconque de la

variable indépendante x , et de plus les coefficients $H_0, H_1, H_2, \dots, H_n$, sont des fonctions de cette variable x , dont dépend l'inconnue Ω , en supposant d'ailleurs que ces fonctions H_0, H_1, H_2, H_3 , etc., peuvent contenir cette même inconnue Ω et ses différences ou différentielles, à des degrés quelconques de puissances. — Il faut remarquer qu'en supposant $H_0 = 0$, et $\phi x = 0$, la présente équation générale (834) formera les susdites équations de condition (818) dans la méthode suprême (142), et par conséquent que la solution de cette équation générale (834) donnera en même temps celle des équations de condition (818), et servira ainsi à l'accomplissement de la méthode suprême (142).

Or, en désignant par k la valeur moyenne de la variable indépendante x , entre les limites extrêmes où l'on veut s'en servir, dénotons, comme plus haut, par des crochets, les valeurs moyennes correspondantes des fonctions quelconques de cette variable x , c'est-à-dire, adoptons généralement la notation . . . (835)

$$[\Phi x] = \left\{ \Phi x \right\}_{(x=k)},$$

en désignant par la caractéristique Φ une fonction quelconque de la variable x . Alors, suivant les principes que, sous les marques (17) à (23), dans la *Réfutation de Lagrange*, nous avons établis pour notre systématique méthode secondaire (743) à (760), si, pour éviter toute indétermination dans les fonctions génératrices Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc., qui forment l'expression finale (760), on introduit ici la fonction $x.s^x$, dans laquelle s est le nombre philosophique des logarithmes, et x et r des nombres arbitraires, nous aurons, d'après l'équation préparatoire (744), à l'aide de la quantité arbitraire a , l'équation générale . . . (836)

$$\begin{aligned} \phi x + (1-a).s^x = [H_0] \cdot \left(\frac{H_0}{[H_0]} \right)^a \cdot \Omega + [H_1] \cdot \left(\frac{H_1}{[H_1]} \right)^a \cdot \frac{d\Omega}{dx} + [H_2] \cdot \left(\frac{H_2}{[H_2]} \right)^a \cdot \frac{d^2\Omega}{dx^2} \\ + [H_3] \cdot \left(\frac{H_3}{[H_3]} \right)^a \cdot \frac{d^3\Omega}{dx^3} \dots + [H_p] \cdot \left(\frac{H_p}{[H_p]} \right)^a \cdot \frac{d^p\Omega}{dx^p}; \end{aligned}$$

qui, pour $a = 1$, forme l'équation proposée (834), et qui, pour $a = 0$, forme l'équation réduite (745), savoir . . . (837)

$$\phi x + s.s^x = [H_0] \cdot \Omega + [H_1] \cdot \frac{d\Omega}{dx} + [H_2] \cdot \frac{d^2\Omega}{dx^2} + [H_3] \cdot \frac{d^3\Omega}{dx^3} \dots + [H_p] \cdot \frac{d^p\Omega}{dx^p};$$

équation linéaire, aux différences ou aux différentielles, à coefficients constants, dont l'intégration ou la solution pourra être donnée rigoureusement par les procédés absolus que, sous les marques (87) et (95), nous avons indiqués dans la *Critique de Laplace*. Et observons ici immédiatement que cette équation

tion réduite (837), qui sera formée par les valeurs moyennes des coefficients H_0, H_1, H_2, H_3 , etc., de l'équation proposée (834), ne contiendra, dans sa formation, rien d'arbitraire, et offrira ainsi, par son intégration (87) ou (95), une solution préparatoire et rigoureusement théorique de l'équation proposée (834), c'est-à-dire, une telle solution rigoureusement théorique de ce que généralement il y a de vrai dans cette équation proposée (834).

Pour simplifier la suite de cette application définitive de notre systématique méthode secondaire (743) à (760), représentons l'équation préparatoire (836) par la forme . . . (838)

$$\psi x + (1 - a) \cdot x^{\mu} = \sum_p \left\{ [H_p] \cdot \left(\frac{H_p}{[H_p]} \right)^a \cdot \frac{d^p \Omega}{dx^p} \right\},$$

en désignant par la caractéristique $\sum_p$ la somme des termes correspondant à toutes les valeurs entières de l'indice p , depuis $p = 0$, jusqu'à $p = \mu$. Et nous aurons alors, pour l'équation proposée (834), en faisant $a = 1$, la forme . . . (839)

$$\psi x = \sum_p \left\{ H_p \cdot \frac{d^p \Omega}{dx^p} \right\};$$

et pour l'équation réduite (837), en faisant $a = 0$, la forme . . . (840)

$$\psi x + x \cdot x^{\mu} = \sum_p \left\{ [H_p] \cdot \frac{d^p \Omega}{dx^p} \right\}.$$

Or, d'après les principes (730) et (752) de notre systématique méthode secondaire, tels qu'ils sont établis sous les marques (18) à (21) dans la *Réformation de Lagrange*, développons la présente équation préparatoire (838) par rapport aux puissances de la fonction génératrice $\varphi a = (a - \omega)$, dans laquelle, pour le procédé d'exhaustion, ω forme une quantité arbitraire entre les limites de zéro et de l'unité. Nous aurons alors, pour cette équation préparatoire (838), la forme (752), savoir . . . (841)

$\alpha = A_0 + A_1 \cdot (a - \omega) + A_2 \cdot (a - \omega)^2 + A_3 \cdot (a - \omega)^3 + \text{etc.}, \text{ etc.};$
dans laquelle les coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 , etc., auront ici, pour un indice quelconque x , l'expression générale . . . (842)

$$A_n = \frac{1}{1!} \cdot \left[\frac{d^n (\omega - 1)}{d\omega^n} \cdot x^{\mu} - \frac{d^n \psi x}{d\omega^n} + \sum_p \left\{ [H_p] \cdot \left(\frac{H_p}{[H_p]} \right)^a \cdot \left[L \left(\frac{H_p}{[H_p]} \right) \right]^n \cdot \frac{d^p \Omega}{dx^p} \right\} \right];$$

qui donnera, pour le premier coefficient A_0 , la valeur . . . (843)

$$A_0 = (\omega - 1) \cdot x^{\mu} - \psi x + \sum_p \left\{ [H_p] \cdot \left(\frac{H_p}{[H_p]} \right)^a \cdot \frac{d^p \Omega}{dx^p} \right\},$$

et pour les coefficients ultérieurs, où l'indice γ est plus grand que zéro, la valeur générale . . . (844)

$$A_\gamma = \frac{1}{\gamma!} \left[1^{1-\gamma} s.e'' + \Sigma_\gamma \left[H_\gamma \right] \cdot \left(\frac{H_\gamma}{H_\gamma} \right)^\gamma \cdot \left[L \left(\frac{H_\gamma}{H_\gamma} \right) \right]^\gamma \cdot \frac{d^\gamma \Omega}{dx^\gamma} \right];$$

valeurs qui, pour le cas initial, où $\omega = 0$, se réduiront à . . . (845)

$$A_0 = -s.e'' - \phi x + \Sigma_0 \left[H_0 \right] \cdot \frac{d^0 \Omega}{dx^0}, \quad \text{et}$$

$$A_\gamma = \frac{1}{\gamma!} \left[1^{1-\gamma} s.e'' + \Sigma_\gamma \left[H_\gamma \right] \cdot \left[L \left(\frac{H_\gamma}{H_\gamma} \right) \right]^\gamma \cdot \frac{d^\gamma \Omega}{dx^\gamma} \right].$$

Or, suivant les susdits principes que, sous les marques (17) à (23), nous avons établis dans la *Refutation de Lagrange*, tels que nous les avons déjà appliqués plus haut, sous les marques (750) à (756), comparons maintenant, avec le problème-universel (743), la présente équation générale (836), telle qu'elle se trouve ici développée sous la marque (841); et nous aurons, pour l'état initial (761), où $\omega = 0$, d'après les relations établies dans la *Refutation de Lagrange*, avant la marque (21), les relations générales . . . (846)

$$f\Omega = -s.e'' - \phi x + \Sigma_0 \left[H_0 \right] \cdot \frac{d^0 \Omega}{dx^0},$$

$$f_\gamma \Omega = 1^{1-\gamma} s.e'' + \Sigma_\gamma \left[H_\gamma \right] \cdot \left[L \left(\frac{H_\gamma}{H_\gamma} \right) \right]^\gamma \cdot \frac{d^\gamma \Omega}{dx^\gamma},$$

$$x_1 = \frac{a}{1}, \quad x_2 = \frac{a^2}{1.2}, \quad x_3 = \frac{a^3}{1.2.3}, \text{ etc. , et généralement } x_\omega = \frac{a^\omega}{1.\omega!}.$$

Il ne restera donc qu'à résoudre, d'après (743), l'équation fondamentale $f\Omega = 0$, savoir, l'équation . . . (847)

$$\phi x + s.e'' = [H_0] \cdot \Omega + [H_1] \cdot \frac{d^1 \Omega}{dx^1} + [H_2] \cdot \frac{d^2 \Omega}{dx^2} + [H_3] \cdot \frac{d^3 \Omega}{dx^3} \dots [H_p] \cdot \frac{d^p \Omega}{dx^p},$$

qui, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, est précisément ce qu'il y a de vrai dans l'équation générale proposée (834), c'est-à-dire, ce qui, dans cette équation (834), peut recevoir une solution finie, à laquelle devait être ramenée la solution indéfinie, mais rigoureusement théorique, de l'équation proposée (834). Et comme nous l'avons déjà dit, cette solution ou intégration finie de l'équation (847) se trouve donnée par les procédés absolus que, sous les marques (87) et (93), nous avons fait connaître dans la *Critique de La-*

place. En effet, pour ne considérer ici que le cas des différentielles, si, avec les coefficients de l'équation réduite (847), on forme l'équation immanente ou algébrique . . . (848)

$$0 = [H_0] + [H_1].m + [H_2].m^2 + [H_3].m^3 \dots + [H_\mu].m^\mu,$$

et si l'on désigne par $m_1, m_2, m_3, \dots, m_\mu$ les μ racines de cette équation, l'expression générale (95) de la *Critique de Laplace*, donnera, pour la solution finie de l'équation fondamentale ou réduite (847), l'expression spéciale . . . (849)

$$\Omega = M_1.e^{x.m_1} + M_2.e^{x.m_2} + M_3.e^{x.m_3} \dots + M_\mu.e^{x.m_\mu} + \\ + \frac{s.e^{x^2}}{(r-m_1)(r-m_2)(r-m_3) \dots (r-m_\mu)} + \Psi x;$$

les quantités $M_1, M_2, M_3, \dots, M_\mu$ étant les μ constantes de cette intégration, et la fonction Ψx étant celle qui, dans l'expression générale citée (95), résulte des intégrales . . . (849)'

$$f(\psi x.e^{-x.m_1}), \quad f(\psi x.e^{-x.m_2}), \quad f(\psi x.e^{-x.m_3}), \quad \dots, \quad f(\psi x.e^{-x.m_\mu}).$$

Et s'il s'agissait de différences dans l'équation réduite (847), l'expression générale (87) de la *Critique de Laplace* donnerait de même l'intégration ou la solution finie de cette équation fondamentale (847).

Ayant donc les fonctions (846), qui répondent ici au problème-universel (743), et la valeur fondamentale (849) de l'inconnue Ω , qui répond à l'équation finie $f\Omega = 0$ de ce problème-universel, il suffit maintenant de substituer ces quantités, soit dans les expressions (14) et (15), qui, dans la *Réfutation de Lagrange*, donnent la solution du problème-universel, soit immédiatement dans les expressions (23), qui, dans ce même ouvrage, donnent les fonctions génératrices Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc., par lesquelles, dans notre expression finale (760) de la systématique méthode secondaire, se trouvera produite la solution rigoureusement théorique de l'équation générale proposée (834). — Et nous pensons qu'après avoir approfondi cette méthode secondaire, telle qu'elle résulte de l'application du problème-universel, de cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, les géomètres comprendront enfin que cette solution, quoiqu'elle soit opérée par une sorte inouïe de fonctions génératrices Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , etc., est, non-seulement *rigoureuse* en toute rigueur, mais pour plus la *seule possible*, et par conséquent que la science n'aura jamais, pour la résolution des équations de tous les genres, d'autre solution théorique et universelle.

Nous disons pour la résolution des équations de tous les genres, parce que, comme on le conçoit facilement, la caractéristique d , dans l'équation générale (834) ou (839), peut représenter toutes fonctions, autres que les différences on

les différentielles, sans que le procédé de la solution de ces équations, par notre méthode secondaire, tel que nous venons de l'exposer, en nous fondant sur le problème-universel (743), doive subir d'autre changement que celui dépendant de la nature spéciale de la fonction de l'inconnue Ω . — Ainsi, par exemple, si au lieu des différences ou des différentielles totales, l'inconnue Ω était donnée, dans l'équation générale (834) ou (839), par des différences ou des différentielles partielles, l'équation réduite (837) se trouverait de même donnée en différences ou en différentielles partielles; et ayant des coefficients constants, cette équation réduite, quel que soit le nombre de ses variables indépendantes, pourra également être résolue, d'une manière finie, par les procédés absolus que, dans la *Critique de Laplace*, nous avons fait connaître, sous les marques (97) à (142); en ne perdant pas de vue que les différentielles partielles de l'inconnue Ω devront être considérées comme étant des fonctions de cette inconnue, ce qui conduira ici aux différentielles réciproques (758). De même, pour avoir un deuxième exemple, si la caractéristique d désignait les puissances, l'équation générale (834) ou (839), en y supposant $\phi x \equiv 0$, représenterait de simples équations algébriques; et l'équation réduite (837) ou (840), en y supposant $s \equiv 0$, et en formant ses coefficients par ceux de l'équation-réciproque la plus proche de l'équation proposée (834), pourra notoirement être résolue aussi par un procédé fini. — Mais, toutes ces applications de la solution universelle et rigoureusement théorique que nous venons de donner de l'équation générale (834), par notre méthode secondaire, fondée sur le problème-universel, sur cette deuxième loi fondamentale des mathématiques, seront proprement l'objet de notre cinquième ouvrage, tel qu'il est annoncé dans le Programme scientifique qui est à la tête de l'ouvrage présent. Toutefois, nous pensons que ceux des géomètres qui auront approfondi la déduction que nous venons de donner de notre méthode secondaire, de cette deuxième méthode absolue des mathématiques, sauront, dès aujourd'hui, l'appliquer à la solution des équations de tous les genres. Et, pour s'exercer dans ces nouveaux calculs, nous les engageons à donner ainsi l'intégration ou la solution de l'équation différentielle du troisième ordre (746), que nous avons pris pour exemple de l'application de la méthode secondaire, en nous bornant d'abord à une préparation arbitraire (749) de cette équation. Il faut maintenant, pour avoir la solution rigoureusement théorique de cette équation (746), substituer, à sa préparation arbitraire (749), la préparation absolue qui est indiquée par la présente équation normale (836) ou (838).

Mais, revenons à notre méthode suprême (142), (143), etc., sur laquelle il nous reste encore à dire un dernier mot. — Nous avons déjà remarqué que, si l'on fait $\phi x \equiv 0$, et $H_2 \equiv 0$, dans l'équation générale (834), cette équation représentera les susdites équations de condition (818) de la méthode suprême (142); et nous concluons ici que la solution (846) de cette équation

générale (834), telle que nous venons de la donner par notre méthode secondaire (743) à (760), formera en même temps la solution de toutes les équations de condition (818) dont dépend l'application de la méthode suprême (142). Ainsi, cette application se trouve maintenant tout à fait déterminée; et la méthode suprême, cette principale méthode absolue des mathématiques, se trouve, dès ce moment, par cet accomplissement (846) de la méthode secondaire, accomplie elle-même, et par conséquent prête à la solution de tous les problèmes des mathématiques, à cette solution absolue qui, comme nous l'avons déjà dit, doit couronner la science.

Quant à l'application définitive de cette méthode suprême à la solution de tous les problèmes, il suffit de savoir, comme nous l'avons prouvé dans notre Philosophie de la Technique algorithmique, que les différences et les différentielles sont les éléments absolus des quantités, et par conséquent que, dans tous les problèmes, à l'exception seulement des problèmes téléologiques de la Théorie des Nombres, les différences ou les différentielles des quantités cherchées sont données nécessairement, d'une manière explicite, ou du moins d'une manière implicite, parce que, sans cela, les problèmes ne sauraient réellement être déterminés. Il faut donc, dans tout problème, en déduire d'abord, et avant tout, les différences ou les différentielles des quantités inconnues ou cherchées; et on le peut toujours facilement, lors même que les équations, immanentes ou transcendantes, qui déterminent les problèmes, ne contiennent pas explicitement ces différences ou différentielles des quantités inconnues. Il suffit, en effet, de considérer alors ces inconnues comme étant des fonctions d'une des quantités principales données, qui entrent dans les problèmes, ou bien d'y introduire convenablement une quantité arbitraire dont les quantités inconnues pourraient être considérées comme étant des fonctions, et de prendre ensuite les différences ou les différentielles de ces équations proposées, par rapport à ces quantités supposées variables.

Or, ayant ainsi, soit explicitement, soit implicitement, les différences ou les différentielles des quantités problématiques, on aura manifestement les éléments absolus de ces quantités; et ce sont précisément ces éléments absolus qui seuls entrent, comme données, dans la méthode suprême (142). On pourra donc appliquer alors cette principale méthode absolue à la détermination définitive de la nature de ces quantités problématiques, et par conséquent à la solution péremptoire de tous les problèmes des mathématiques. — Nous nous dispenserons ici d'entrer dans les détails de ces hautes applications, dans ces détails immenses qu'après tout ce que nous avons déjà dit, les géomètres sauront, pour peu qu'ils aient approfondi cette réforme des mathématiques, suppléer facilement. — Nous nous bornerons à rappeler ce que nous avons dit plus haut concernant l'intégration des équations aux différences ou aux différentielles partielles, savoir, que, dans l'application de la méthode suprême (142), il faut

d'abord opérer la génération théorique de la fonction problématique Fx , d'après la loi suprême . . . (850)

$$Fx = A_0 \cdot \Omega_0 + A_1 \cdot \Omega_1 + A_2 \cdot \Omega_2 + A_3 \cdot \Omega_3 + \text{etc.}, \text{ etc.},$$

séparément avec chacune des variables indépendantes ξ , v , ζ , etc., dont l'inconnue x est fonction, en considérant ainsi, à chaque fois, comme constantes, les différences ou différentielles partielles de l'inconnue x , par rapport à toutes les autres variables indépendantes. On obtiendra de cette manière autant d'équations distinctes (850) qu'il y a de variables indépendantes; et ces équations contiendront respectivement les différences ou différentielles de x par rapport aux autres variables indépendantes ξ , v , ζ , etc. Et joignant alors à ces équations (850) l'équation proposée, on pourra, en prenant sur toutes ces équations, des différences ou différentielles ultérieures par rapport à chacune des variables indépendantes ξ , v , ζ , etc., en pourra, disons-nous, entre ces équations, dont le nombre sera arbitraire, éliminer toutes les différences ou différentielles qu'elles contiendront; et l'équation résultante, qui contiendra toutes les constantes d'intégration, donnera la détermination de l'inconnue x par toutes ses variables indépendantes ξ , v , ζ , etc., et elle présentera ainsi la solution complète, et rigoureusement théorique, du problème proposé. — Généralement, pour la solution de tous les problèmes, lorsque, par l'application de la méthode secondaire (834) à (846), on aura obtenu les fonctions génératrices Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , etc., dans la loi suprême (850), et par conséquent, en vertu de la méthode suprême, la génération théorique (142) de la fonction problématique Fx , si cette génération (142) contient encore des différences ou des différentielles, ou d'autres quantités inconnues quelconques, on pourra toujours, et même très-facilement, en prenant, sur cette primitive génération théorique (142), et sur l'équation proposée, leurs différences ou différentielles ultérieures, et en éliminant alors, entre toutes ces équations, les quantités inconnues qui subsistent encore dans la génération primitive (142), arriver à l'équation résultante qui donnera la solution rigoureusement théorique des problèmes, quel qu'en soit le genre, et quelque compliqués qu'ils puissent être. — Le cas le plus simple de cette application de la méthode suprême, est évidemment celui où il s'agit de l'intégration des fonctions données et considérées comme fonctions différentielles. En effet, ces fonctions différentielles données seront immédiatement les éléments qui entrent dans la méthode suprême (142); de sorte que la détermination des fonctions génératrices Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , etc., par l'intervention de la méthode secondaire (846), présentera sur-le-champ, sous une forme progressive et indéfinie, mais rigoureusement théorique, la génération de la nature elle-même des intégrales cherchées. Et nous pouvons ici affirmer de nouveau, et péremptoirement enfin, que l'impossibilité que les géomètres, principalement Lagrange, croyaient voir dans une méthode générale d'intégration, n'existe nul-

lement, et atteste, dans la science actuelle qui l'a supposée, un progrès bien peu avancé et une absence de tout esprit philosophique.

Il est sans doute superflu de faire remarquer, dans cette détermination finale et définitive de la méthode suprême, que les nombreuses constantes qui y résultent de l'intégration (846) des équations de condition (818), servent merveilleusement pour la détermination de plus en plus parfaite des expressions que donne cette méthode absolue, en attribuant à ces constantes d'intégration des valeurs propres à rendre ces expressions conformes aux conditions connues du problème, du moins conformes aux valeurs numériques des différentielles données, prises vers les distances extrêmes des variables. — D'ailleurs, l'étude approfondie de la méthode suprême, avec toutes ses conditions et modifications, telles qu'elles sont exposées, en détail et avec précision, sous les marques citées (142), (143), etc., suffira pour en saisir toutes les circonstances, et pour l'appliquer à la solution de tous les problèmes, aujourd'hui que l'intégration (846) de ses équations de condition (143)', (144)', etc., vient d'être dévoilée, et que l'accomplissement final de cette grande méthode se trouve ainsi donné positivement.

Encore un mot sur la fonction auxiliaire $s.e^{rs}$ que nous avons introduite dans la présente solution universelle (846) des équations (834) de tous les genres. — Nous avons déjà prévenu que cette fonction se trouve ainsi introduite pour écarter toute indétermination dans les fonctions génératrices Q_0 , Q_1 , Q_2 , Q_3 , etc., qui, dans l'expression finale (760), donnent cette solution rigoureusement théorique des équations quelconques (834). Et nous ajouterons ici que le sens philosophique de cette fonction auxiliaire $s.e^{rs}$ consiste à lier entre elles, lorsqu'il en est besoin, les parties qui, dans le problème-universel (743), distinguent respectivement ce qu'il y a de fini et ce qu'il y a d'infini dans tout problème mathématique, savoir, les deux parties qui, dans ce problème-universel (743), forment les fonctions distinctes (743)' et (743)'', et qui, par conséquent, dans la présente solution (846) des équations de tous les genres, forment les deux classes de fonctions distinctes $f\Omega$ et $f.\Omega$. Et, pour pouvoir ainsi établir la liaison de ces fonctions distinctes dans le problème-universel, la fonction auxiliaire $s.e^{rs}$ dont il s'agit, contient deux quantités arbitraires s et r , dont la première s , en devenant zéro, rend inutile cette liaison, comme cela arrive dans les équations primitives, immanentes et transcendentes, et dont la seconde r , en prenant des valeurs convenables, introduit, dans les solutions (846) et (760) des équations, les déterminations les plus propres à la nature des fonctions problématiques. — Parmi ces valeurs de la quantité arbitraire r , nous nous bornerons ici à signaler celles qui conduisent à nos fonctions périodiques des ordres supérieurs, à ces fonctions que, déjà en 1811, nous avons dévoilées dans notre *Philosophie des Mathématiques* (pages 191 et suiv.), sous les marques (53) à (59), et complétées dans la note de la page 513 du second

tomé de la *Philosophie de la Technique algorithmique*. Nous regrettons que l'espace ne nous permette pas d'exposer ici en détail cette nouvelle théorie des sinus et cosinus des ordres supérieurs; mais nous nous en consolons par le peu d'empressement que les géomètres, nos contemporains, mettent à connaître ces hautes vérités de leur science. Peut-être même, s'ils n'avaient pas trouvé dans la géométrie, notamment dans le cercle, les sinus et les cosinus, ils ne connaîtraient pas encore ces fonctions algorithmiques; car, jusqu'à l'apparition de notre philosophie des mathématiques, tous les géomètres, sans exception, dérivait de la nature du cercle leur connaissance des sinus et cosinus, et nul d'entre eux ne se doutait d'une autre origine pour ces fonctions purement algorithmiques. Eh bien, ne serait-ce que pour la postérité, si on lui laisse parvenir nos ouvrages, nous allons donner ici quelques développements à cette haute découverte des fonctions périodiques des ordres supérieurs, et nous poserons ainsi au moins les principes pour leur détermination et pour leur théorie, en les considérant dans tout leur accomplissement que nous avons déjà signalé, en 1817, dans la susdite Note du second tome de la *Philosophie de la Technique*.

Pour simplifier les expressions, désignons généralement par $\psi(m, n)$ la fonction des deux nombres entiers m et n qui forment l'exposant dans le principe de ces ordres supérieurs de sinus et de cosinus, savoir, la fonction (851)

$$\psi(m, n) = \left\{ (-1)^n \right\}^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{n\pi}{2m} + \sin \frac{n\pi}{2m} \cdot \sqrt{-1};$$

les nombres m et n étant des nombres entiers quelconques, pairs ou impairs. — Or, le principe en question des fonctions périodiques de tous les ordres, d'après ce que nous avons montré dans les ouvrages que nous venons de citer, est (852)

$$\begin{aligned} x^{\psi(m, n)} &= Fx + f_1x \cdot \psi(m, n) + f_2x \cdot \psi(m, n)^2 + f_3x \cdot \psi(m, n)^3 + \\ &+ f_4x \cdot \psi(m, n)^4 : \dots f_{m-1}x \cdot \psi(m, n)^{m-1}; \end{aligned}$$

en désignant par $Fx, f_1x, f_2x, f_3x, \dots, f_{m-1}x$, les fonctions qui résultent d'un tel développement de la fonction exponentielle, formant le premier membre de cette égalité (852). Et, d'après ce que nous avons dévoilé dans notre *Philosophie des Mathématiques*, sous la marque (55), ce sont précisément ces fonctions qui constituent les fonctions transcendentes et périodiques des ordres supérieurs, notamment de l'ordre $(m-1)$, quelque grand que puisse être le nombre m , et de plus du *genre elliptique*, lorsque le nombre n est impair, et du *genre hyperbolique*, lorsque ce nombre n est pair, en prenant ces dénominations par analogie avec ce qui arrive dans le premier

civ

RÉFORME DES

ordre, pour $m = 2$, c'est-à-dire, pour les sinus et les cosinus du premier ordre, qui seuls étaient connus jusqu'à ce jour. Dans nos ordres supérieurs, nous nommons généralement *cosinus* la fonction Fx , *premier sinus* la fonction f_1x ; *second sinus*, la fonction f_2x ; *troisième sinus*, la fonction f_3x , et ainsi de suite jusqu'au $(m-1)^{\text{me}}$ *sinus* $f_{m-1}x$, dans l'ordre $(m-1)$; par où l'on voit qu'il n'existe qu'un sinus dans le premier ordre connu, correspondant à $m = 2$. Mais, pour simplifier les expressions, nous dénoterons généralement le cosinus par . . . (853)

$$Fx = f_0x,$$

en considérant ainsi le cosinus comme étant le sinus du *degré zéro*. Alors, le principe (852) de ces fonctions périodiques supérieures pourra être exprimé simplement par . . . (854)

$$a^{\pi \cdot \psi(m, n)} = \Sigma_{\mu} \left\{ f_{\mu} x \cdot \psi(m, n)^{\mu} \right\},$$

en désignant par la caractéristique Σ_{μ} la somme des termes correspondant à toutes les valeurs entières de l'indice μ , depuis $\mu = 0$, jusqu'à $\mu = (m-1)$.

Or, la propriété fondamentale de ces fonctions supérieures, celle que nous avons dévoilée à la susdite marque (55) dans notre Philosophie des Mathématiques, consiste en ce que, d'après la loi de création qui préside à la formation de l'Algorithmie, ces transcendentes supérieures, en y appliquant l'algorithme de la graduation, font fonction de l'algorithme de la sommation. En effet, si l'on désigne par x_1, x_2, x_3 , etc., plusieurs déterminations différentes de la quantité x dont ces transcendentes sont fonctions, on aura toujours l'égalité . . . (855)

$$\Sigma_{\mu} \left\{ f_{\mu} x_1 \cdot \psi(m, n)^{\mu} \right\} \times \Sigma_{\mu} \left\{ f_{\mu} x_2 \cdot \psi(m, n)^{\mu} \right\} \times \Sigma_{\mu} \left\{ f_{\mu} x_3 \cdot \psi(m, n)^{\mu} \right\} \times \Sigma_{\mu} \left\{ f_{\mu} x_4 \cdot \psi(m, n)^{\mu} \right\} \times \text{etc.} = \Sigma_{\mu} \left\{ f_{\mu} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \text{etc.}) \cdot \psi(m, n)^{\mu} \right\};$$

égalité qui, pour le cas où ces quantités x_1, x_2, x_3 , etc., sont en nombre de ξ , et deviennent toutes égales à x , se réduit à celle-ci . . . (856)

$$\left[\Sigma_{\mu} \left\{ f_{\mu} x \cdot \psi(m, n)^{\mu} \right\} \right]^{\xi} = \Sigma_{\mu} \left\{ f_{\mu} (\xi x) \cdot \psi(m, n)^{\mu} \right\}.$$

Et c'est précisément cette propriété fondamentale (855) et (856), qui, d'après ce que nous avons démontré dans notre Philosophie des Mathématiques, donne à ces fonctions transcendentes leur caractère de périodicité.

Pour en venir à la détermination distincte de ces fonctions périodiques, observons que, d'après l'expression générale (851) de la fonction $\psi(m, n)$, il existe, avec des valeurs différentes du nombre n , prises entre 1 et $2m$, ou plutôt depuis 1 jusqu'à $2m$ inclusivement, m valeurs différentes pour cette

fonction $\psi(m, n)$, quel que soit le nombre n , pair ou impair. Et nous verrons que l'équation générale (854) donnera autant d'équations différentes pour la détermination des m fonctions distinctes $f_0x, f_1x, f_2x, \dots, f_{m-1}x$, dont il est question. Nous marquerons par $n_1, n_2, n_3, \dots, nm$, ces m valeurs différentes du nombre n , soit pair, soit impair. Et nous aurons ainsi, pour la détermination des m fonctions périodiques en question, les m équations distinctes . . . (857)

$$\begin{aligned} a^x \cdot \psi(m, n_1) &= \sum_p \left\{ f_p x \cdot \psi(m, n_1)^p \right\}, \\ a^x \cdot \psi(m, n_2) &= \sum_p \left\{ f_p x \cdot \psi(m, n_2)^p \right\}, \\ a^x \cdot \psi(m, n_3) &= \sum_p \left\{ f_p x \cdot \psi(m, n_3)^p \right\}, \\ &\dots \dots \dots \\ a^x \cdot \psi(m, nm) &= \sum_p \left\{ f_p x \cdot \psi(m, nm)^p \right\}. \end{aligned}$$

Or, en désignant par v un nombre entier quelconque, compris entre zéro et $(m-1)$, et en multipliant les présentes équations (857) successivement par . . . (858)

$\psi(m, n_1)^{m-v}, \psi(m, n_2)^{m-v}, \psi(m, n_3)^{m-v}, \dots, \psi(m, nm)^{m-v}$;
nous aurons les m équations nouvelles . . . (859)

$$\begin{aligned} \psi(m, n_1)^{m-v} \cdot a^x \cdot \psi(m, n_1) &= \sum_p \left\{ f_p x \cdot \psi(m, n_1)^{m+p-v} \right\}, \\ \psi(m, n_2)^{m-v} \cdot a^x \cdot \psi(m, n_2) &= \sum_p \left\{ f_p x \cdot \psi(m, n_2)^{m+p-v} \right\}, \\ \psi(m, n_3)^{m-v} \cdot a^x \cdot \psi(m, n_3) &= \sum_p \left\{ f_p x \cdot \psi(m, n_3)^{m+p-v} \right\}, \\ &\dots \dots \dots \\ \psi(m, nm)^{m-v} \cdot a^x \cdot \psi(m, nm) &= \sum_p \left\{ f_p x \cdot \psi(m, nm)^{m+p-v} \right\}. \end{aligned}$$

Ajoutons maintenant les termes respectifs de ces équations, et observons que, lorsque v n'est pas égal à μ , on a . . . (860)

$$\psi(m, n_1)^{m+p-v} + \psi(m, n_2)^{m+p-v} + \psi(m, n_3)^{m+p-v} \dots + \psi(m, nm)^{m+p-v} = 0,$$

et que, lorsque $v = \mu$, on a . . . (861)

$$\psi(m, n_1)^m + \psi(m, n_2)^m + \psi(m, n_3)^m \dots + \psi(m, nm)^m = m \cdot (-1)^n;$$

en prenant ici pour n un nombre pair ou un nombre impair, suivant que les nombres $n_1, n_2, n_3, \dots, nm$ sont pairs ou impairs. Et nous trouverons immédiatement, par cette addition des équations (859), pour les fonctions périodiques dont il est question, l'expression générale . . . (862)

$$f_{\mu}x = \frac{(-1)^n}{m} \cdot \left\{ \psi(m, n_1)^{n-\mu} \cdot a^{x \cdot \psi(m, n_1)} + \psi(m, n_2)^{n-\mu} \cdot a^{x \cdot \psi(m, n_2)} + \right. \\ \left. + \psi(m, n_3)^{n-\mu} \cdot a^{x \cdot \psi(m, n_3)} \dots + \psi(m, nm)^{n-\mu} \cdot a^{x \cdot \psi(m, nm)} \right\}.$$

Telle est donc la détermination générale de ces transcendentes périodiques ou de ces sinus et cosinus de tous les ordres, dont ceux du premier ordre, lorsque $m = 2$, étaient les seuls connus des géomètres, et ne leur étaient même connus qu'*in concreto*, comme lignes géométriques, dans les sections coniques où ils se trouvent réalisés, et nullement *in abstracto*, comme fonctions numériques, dans l'Algorithmie, où ils reçoivent leur génération par la loi de création. Et, dans cette détermination générale (862), on a, d'après l'expression initiale (851), pour une puissance quelconque k de la fonction $\psi(m, n)$, la formule . . . (863)

$$\psi(m, n)^k = \left\{ (-1)^n \right\}^{\frac{k}{m}} = \cos \frac{n k \pi}{2 m i} + \sin \frac{n k \pi}{2 m i} \cdot \sqrt{-1};$$

les sinus et cosinus étant ici ceux du cercle, et la quantité π la circonférence du cercle pour le rayon égal à l'unité, en ne perdant pas de vue que le nombre n , et par conséquent les nombres $n_1, n_2, n_3, \dots, nm$, sont impairs lorsqu'il s'agit de fonctions elliptiques, et pairs lorsqu'il s'agit de fonctions hyperboliques, d'après l'analogie que nous avons signalée plus haut.

On pourra maintenant déduire facilement, de l'expression générale (862), les déterminations particulières de ces sinus et cosinus pour tous les ordres. Et c'est là ce que les géomètres auront à faire actuellement pour donner à leur science ces fonctions décisives dans toutes les hautes questions des mathématiques. — Nous allons leur en indiquer la voie en déduisant ainsi, de l'expression générale (862), quelques premiers ordres de ces fonctions transcendentes.

Pour le premier ordre, lorsque $m = 2$, l'expression (862) donnera la formule . . . (864)

$$f_{\mu}x = \frac{(-1)^n}{2} \cdot \left\{ \psi(2, n_1)^{n-\mu} \cdot a^{x \cdot \psi(2, n_1)} + \psi(2, n_2)^{n-\mu} \cdot a^{x \cdot \psi(2, n_2)} \right\};$$

les nombres n_1, n_2 , et n étant impairs pour le genre elliptique, et pairs pour le genre hyperbolique. Ainsi, pour ces deux genres, la formule (864) deviendra respectivement . . . (865)

$$(e1)f_{\mu}x = -\frac{1}{2} \cdot \left\{ \psi(2, 1)^{n-\mu} \cdot a^{x \cdot \psi(2, 1)} + \psi(2, 3)^{n-\mu} \cdot a^{x \cdot \psi(2, 3)} \right\},$$

$$(h1)f_{\mu}x = +\frac{1}{2} \cdot \left\{ \psi(2, 0)^{n-\mu} \cdot a^{x \cdot \psi(2, 0)} + \psi(2, 2)^{n-\mu} \cdot a^{x \cdot \psi(2, 2)} \right\};$$

en dénotant par (e1) le premier ordre elliptique, et par (h1) le premier ordre

hyperbolique. Et l'expression (863) de la fonction $\psi(m, n)^2$ donnera ici les valeurs . . . (866)

$$\psi(2, (2p+1))^2 = \cos \frac{(2p+1)k\pi}{4} + \sin \frac{(2p+1)k\pi}{4} \cdot \sqrt{-1},$$

$$\psi(2, 2p)^2 = \cos \frac{pk\pi}{2} + \sin \frac{pk\pi}{2} \cdot \sqrt{-1};$$

le nombre p étant successivement $p=0$, et $p=1$. Donc, en introduisant ces valeurs dans les formules (865), on obtiendra, pour ce premier ordre de sinus et cosinus, les déterminations respectives, savoir, pour le genre elliptique . . . (867)

$$(e1)f_0x = + \frac{1}{3} \cdot \left\{ a^{+x} \sqrt{-1} + a^{-x} \sqrt{-1} \right\},$$

$$(e1)f_1x = + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \left\{ a^{+x} \sqrt{-1} - a^{-x} \sqrt{-1} \right\};$$

et pour le genre hyperbolique . . . (868)

$$(A1)f_0x = + \frac{1}{2} \cdot \left\{ a^{+x} + a^{-x} \right\},$$

$$(A1)f_1x = + \frac{1}{2} \cdot \left\{ a^{+x} - a^{-x} \right\}.$$

Et ce sont là, dans ces deux genres, le cosinus et le sinus connus, qui, lorsque la base a devient le nombre philosophique des logarithmes, se réalisent respectivement dans le cercle et dans l'hyperbole équilatérale.

Pour le deuxième ordre de ces sinus et cosinus, qui sont encore inconnus, on aura $m=3$, et l'expression générale (862) donnera, pour leur détermination, la formule . . . (869)

$$f_n x = \frac{(-1)^n}{3} \cdot \left\{ \psi(3, n1)^{3-p} \cdot a^{x \cdot \psi(3, n1)} + \psi(3, n2)^{3-p} \cdot a^{x \cdot \psi(3, n2)} + \psi(3, n3)^{3-p} \cdot a^{x \cdot \psi(3, n3)} \right\};$$

les nombres $n1, n2, n3$, et n étant impairs pour le genre elliptique, et pairs pour le genre hyperbolique. Ainsi, pour ces deux genres, la formule (869) deviendra respectivement . . . (870)

$$(e2)f_n x = - \frac{1}{3} \cdot \left\{ \psi(3, 1)^{3-p} \cdot a^{x \cdot \psi(3, 1)} + \psi(3, 3)^{3-p} \cdot a^{x \cdot \psi(3, 3)} + \psi(3, 5)^{3-p} \cdot a^{x \cdot \psi(3, 5)} \right\},$$

$$(A2)f_n x = + \frac{1}{3} \cdot \left\{ \psi(3, 0)^{3-p} \cdot a^{x \cdot \psi(3, 0)} + \psi(3, 2)^{3-p} \cdot a^{x \cdot \psi(3, 2)} + \psi(3, 4)^{3-p} \cdot a^{x \cdot \psi(3, 4)} \right\};$$

en dénotant de nouveau par $(e2)$ le second ordre elliptique, et par $(A2)$ le second ordre hyperbolique. Et l'expression (863) de la fonction $\psi(m, n)^2$ donnera ici les valeurs . . . (871)

$$\psi(3, (2p+1))^k = \cos \frac{(2p+1)k\pi}{6} + \sin \frac{(2p+1)k\pi}{6} \cdot \sqrt{-1},$$

$$\psi(3, 2p)^k = \cos \frac{pk\pi}{3} + \sin \frac{pk\pi}{3} \cdot \sqrt{-1};$$

le nombre p étant successivement $p=0$, $p=1$, et $p=2$. Introduisant donc ces valeurs dans les formules (870), on obtiendra, pour ce deuxième ordre de sinus et cosinus, les déterminations respectives, savoir, pour le genre elliptique . . . (872)

$$\begin{aligned} (e2)f_{\alpha}x &= +\frac{1}{3} \cdot \left\{ a^{-x} + 2a^{\frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{bx\sqrt{3}}{2} \right\}, \\ (e2)f_1x &= -\frac{1}{3} \cdot \left\{ a^{-x} - a^{\frac{x}{2}} \cdot \left[\cos \frac{bx\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin \frac{bx\sqrt{3}}{2} \right] \right\}, \\ (e2)f_{\beta}x &= +\frac{1}{3} \cdot \left\{ a^{-x} - a^{\frac{x}{2}} \cdot \left[\cos \frac{bx\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \cdot \sin \frac{bx\sqrt{3}}{2} \right] \right\}; \end{aligned}$$

et pour le genre hyperbolique . . . (873)

$$\begin{aligned} (h2)f_{\alpha}x &= +\frac{1}{3} \cdot \left\{ a^{+x} + 2a^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{bx\sqrt{3}}{2} \right\}, \\ (h2)f_1x &= +\frac{1}{3} \cdot \left\{ a^{+x} - a^{-\frac{x}{2}} \cdot \left[\cos \frac{bx\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \cdot \sin \frac{bx\sqrt{3}}{2} \right] \right\}, \\ (h2)f_{\beta}x &= +\frac{1}{3} \cdot \left\{ a^{+x} - a^{-\frac{x}{2}} \cdot \left[\cos \frac{bx\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin \frac{bx\sqrt{3}}{2} \right] \right\}; \end{aligned}$$

le nombre b étant le logarithme naturel de la base a .

Et, procédant toujours de cette manière, on pourra, avec la même facilité, déduire, de l'expression générale (862), les déterminations particulières de tout ordre de ces transcendentes périodiques ou de ces sinus et cosinus supérieurs. Nous nous bornerons ici à donner encore ceux du troisième ordre, lorsque $m=4$, du moins pour le genre elliptique, qui, avec les deux ordres précédents de ces fonctions, suffira pour les besoins actuels de l'application de la méthode suprême, ou généralement pour les besoins actuels de la résolution des équations de tous les genres. — Les voici . . . (874)

$$(\epsilon 3) f_{\epsilon} x = + \frac{1}{2} \cdot \left(a^{+x} \sqrt{\frac{1}{2}} + a^{-x} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cdot \cos \left(bx \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right),$$

$$(\epsilon 3) f_x x = + \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \left\{ \left(a^{+x} \sqrt{\frac{1}{2}} + a^{-x} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cdot \sin \left(bx \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right) + \left(a^{+x} \sqrt{\frac{1}{2}} - a^{-x} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cdot \cos \left(bx \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \right\},$$

$$(\epsilon 3) f_{\epsilon} x = + \frac{1}{2} \cdot \left(a^{+x} \sqrt{\frac{1}{2}} - a^{-x} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cdot \sin \left(bx \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right),$$

$$(\epsilon 3) f_x x = + \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \left\{ \left(a^{+x} \sqrt{\frac{1}{2}} - a^{-x} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cdot \sin \left(bx \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right) - \left(a^{+x} \sqrt{\frac{1}{2}} + a^{-x} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cdot \cos \left(bx \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \right\};$$

en dénotant encore par ($\epsilon 3$) ces fonctions elliptiques du troisième ordre. — Nous laissons aux géomètres de compléter ce troisième ordre de sinus et cosinus, en déterminant de même ceux du genre hyperbolique. Mais, ce que nous laissons surtout aux géomètres, du moins à ceux des temps à venir, c'est le développement de la théorie très-vaste de ces transcendentes périodiques de tous les ordres, théorie dont nous n'aurons peut-être plus le temps de nous occuper nous-mêmes, et dont nous ne pouvons signaler ici que quelques exemples, que voici.

En outre de la propriété fondamentale (855) de ces fonctions périodiques, on leur a reconnu déjà plusieurs propriétés caractéristiques dans le premier ordre (867) et (868), qui seul était connu. Et ces propriétés caractéristiques se retrouvent dans tous les ordres de ces fonctions.

Ainsi, la somme ou la différence des carrés du premier ordre (867) et (868) des sinus et cosinus connus, est notoirement égale à l'unité (*Philosophie des Mathématiques*, page 21); et cette somme ou différence des carrés des sinus et cosinus de tous les ordres présente toujours des fonctions déterminées, qui fixent la nature du progrès de ces transcendentes périodiques. Par exemple, dans le troisième ordre (874), la somme des carrés des sinus et cosinus est (875)

$$((\epsilon 3) f_{\epsilon} x)^2 + ((\epsilon 3) f_x x)^2 + (\epsilon 3) f_{\epsilon} x^2 + (\epsilon 3) f_x x^2 = a^{+x} \sqrt{2} + a^{-x} \sqrt{2};$$

et elle montre que ces fonctions, tout en revenant périodiquement sur elles-mêmes, croissent progressivement, et contiennent ainsi une qualité que n'ont pas encore les sinus et cosinus ordinaires ou du premier ordre.

Une deuxième propriété caractéristique de ces sinus et cosinus du premier ordre consiste en ce que ces fonctions de la somme ou de la différence de deux, et par conséquent de plusieurs quantités x , y , z , etc., peuvent être exprimées par les fonctions pareilles et distinctes de chacune de ces quantités x , y , z , etc. (*Philosophie des Mathématiques*, pages 24 et 25, (A) et (B)). Et cette propriété se retrouve encore dans tous les ordres de ces transcendentes périodiques. Par exemple, dans le troisième ordre (874), en y négligeant la notation ($\epsilon 3$), on a (876)

$$\begin{aligned} f_0(x+y) &= f_0x \cdot f_0y - f_2x \cdot f_2y - f_4x \cdot f_4y - f_6x \cdot f_6y, \\ f_1(x+y) &= f_1x \cdot f_0y + f_0x \cdot f_1y - f_3x \cdot f_3y - f_5x \cdot f_5y, \\ f_2(x+y) &= f_2x \cdot f_0y + f_0x \cdot f_2y + f_4x \cdot f_4y - f_6x \cdot f_6y, \\ f_3(x+y) &= f_3x \cdot f_0y + f_0x \cdot f_3y + f_5x \cdot f_5y + f_7x \cdot f_7y. \end{aligned}$$

Et comme, en vertu des expressions (874), on a manifestement . . . (877)

$$\begin{aligned} f_0(+z) &= +f_0(-z), & f_1(+z) &= -f_1(-z), \\ f_2(+z) &= +f_2(-z), & f_3(+z) &= -f_3(-z); \end{aligned}$$

on déduira facilement, des présentes expressions (876), celles qui correspondent à la différence $(x-y)$ dans ces mêmes fonctions, savoir, dans les fonctions . . . (878)

$$f_0(x-y), \quad f_1(x-y), \quad f_2(x-y), \quad \text{et} \quad f_3(x-y).$$

Une troisième et principale propriété caractéristique des sinus et cosinus du premier ordre, de ceux qui sont connus, consiste dans la périodicité de leurs différentielles, c'est-à-dire, dans le retour périodique de ces différentielles, et dans leur détermination par les fonctions du même ordre. Et cette propriété principale se retrouve de nouveau et nécessairement dans tous les ordres de ces sinus et cosinus; car, c'est de ce retour périodique de leurs différentielles que dépend manifestement la périodicité de ces fonctions transcendentes elles-mêmes. Ainsi, e étant le nombre philosophique des logarithmes, si, pour simplifier les expressions, on fait $a = e$, et par conséquent $b = 1$, on a, dans un ordre quelconque $(m-1) = p$, pour le genre elliptique, les différentielles consécutives et périodiques . . . (879)

$$\begin{aligned} d(ep)f_0x &= -(ep)f_1x \cdot dx, \\ d(ep)f_1x &= + (ep)f_0x \cdot dx, \\ d(ep)f_2x &= + (ep)f_3x \cdot dx, \\ d(ep)f_3x &= + (ep)f_2x \cdot dx. \end{aligned}$$

Et il en est de même pour le genre hyperbolique, à la seule différence du signe négatif. — Telles sont, en effet, les différentielles de ces fonctions périodiques que donne immédiatement l'expression générale (862) de ces fonctions. — Aussi, par suite de ce retour périodique des différentielles en question, peut-on obtenir avec facilité le développement en séries de ces fonctions transcendentes, en observant d'ailleurs que, pour la valeur de $x = 0$, l'expression générale (862), en ayant égard aux relations (860) et (861), donne, pour un ordre quelconque $(m-1) = p$, et pour chacun des deux genres, elliptique et hyperbolique, les valeurs . . . (880)

$$f_0(0) = 1, \quad f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0, \quad f_3(0) = 0, \quad . . . \quad f_p(0) = 0;$$

valeurs qui légitiment la dénomination de *sinus* pour toutes ces fonctions qui, lorsque $x = 0$, deviennent zéro, et de *cosinus* pour celles qui, lorsque $x = 0$, deviennent égales à l'unité. — Et c'est effectivement d'après ces principes que, déjà dans notre *Philosophie des Mathématiques* (page 195), nous avons donné, sous la marque (59), les développements en séries de ces sinus et cosinus d'un ordre quelconque $(2n - 1)$, du moins pour leur genre elliptique.

Enfin, une propriété caractéristique des sinus et cosinus connus, de ceux du premier ordre, est la détermination de ces fonctions périodiques pour un multiple quelconque de leur variable x , au moyen de puissances de ces mêmes fonctions simples, de celles qui ne sont fonctions que de la seule variable x ; et réciproquement, la détermination de ces puissances des fonctions simples, au moyen des fonctions de multiples de la variable x . Et cette importante propriété se retrouve encore dans nos présentes fonctions périodiques de tous les ordres. Ainsi, par exemple, en faisant $x = y$ dans les expressions (876) des fonctions de la somme $(x + y)$, on obtiendra immédiatement, pour ces fonctions elliptiques du troisième ordre, les fonctions du double $2x$ de la variable x , savoir . . . (881)

$$\begin{aligned} f_0(2x) &= (f_0x)^2 - (f_0x)^2 - 2.f_0x.f_2x, \\ f_1(2x) &= 2.f_0x.f_1x - 2.f_2x.f_3x, \\ f_2(2x) &= 2.f_0x.f_2x + (f_1x)^2 - (f_3x)^2 = 4.f_0x.f_3x, \\ f_3(2x) &= 2.f_0x.f_3x + 2.f_1x.f_2x. \end{aligned}$$

Et, procédant de la même manière, on obtiendra, pour les fonctions du triple $3x$ de la variable x , au moyen des puissances des fonctions simples de cette variable, les déterminations . . . (882)

$$\begin{aligned} f_0(3x) &= (f_0x)^3 - 3.f_0x.(f_1x)^2 - 3.(f_1x)^2.f_0x + 3.f_0x.(f_2x)^2 - 6.f_0x.f_1x.f_3x, \\ f_1(3x) &= 3.(f_0x)^2.f_1x - 3.(f_1x)^2.f_2x - 3.f_1x.(f_2x)^2 + (f_3x)^3 - 6.f_0x.f_1x.f_3x, \\ f_2(3x) &= 3.(f_0x)^2.f_2x + 3.f_0x.(f_1x)^2 - 3.f_0x.(f_2x)^2 - (f_3x)^3 - 6.f_1x.f_2x.f_3x, \\ f_3(3x) &= 3.(f_0x)^2.f_3x - 3.(f_1x)^2.f_3x - 3.f_1x.(f_2x)^2 + (f_3x)^3 + 6.f_0x.f_1x.f_3x. \end{aligned}$$

Et ainsi de suite pour les fonctions des multiples quelconques ξx de la variable x ; en observant que, par suite de ces relations mêmes (881), (882), etc., les puissances des fonctions simples de la variable x peuvent être déterminées par les fonctions des multiples de cette variable; et tout cela même directement par les principes ou par les propriétés fondamentales de ces sinus et cosinus de tous les ordres. — On conçoit, en effet, que, partant de la propriété fondamentale (856), qui établit, pour ces transcendentes périodiques de tous les ordres, la relation entre leurs puissances ξ et leurs multiples ξx , on pourra,

en développant la puissance ξ , et en formant, avec les différentes valeurs $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ du nombre n , autant d'équations différentes, on pourra, disons-nous, déterminer les fonctions des multiples ξx par les puissances des fonctions simples de x , et réciproquement, ces puissances des fonctions simples de la variable x , par les fonctions des multiples ξx de cette variable, en suivant le procédé que nous avons suivi pour la solution des équations (857).

Et, si l'on a une fonction quelconque de ces sinus et cosinus d'un ordre $(m-1) = p$, c'est-à-dire, en désignant ces sinus et cosinus par la notation

$$x_0 = f_0 x, \quad x_1 = f_1 x, \quad x_2 = f_2 x, \quad x_3 = f_3 x, \quad \dots \quad x_p = f_p x,$$

si l'on a une fonction quelconque $F(x_0, x_1, x_2, \dots, x_p)$ de ces transcendentes périodiques, on pourra toujours développer cette fonction par rapport à ces mêmes sinus et cosinus des multiples progressifs de la variable x . En effet, désignant, de plus, par $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$, les fonctions suivantes

$$y_1 = a^x \psi(m, n_1), \quad y_2 = a^x \psi(m, n_2), \quad y_3 = a^x \psi(m, n_3), \text{ etc., etc.,}$$

qui entrent dans l'expression générale (862) des transcendentes $x_0, x_1, x_2, \dots, x_p$, ces transcendentes seront manifestement, en vertu de cette même expression générale (862), des fonctions de ces variables secondaires $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$. Et alors, par les lois que nous avons données dans le second tome de la Philosophie de la Technique (pages 156 et suiv.), depuis la marque (268), on pourra développer la fonction proposée $F(x_0, x_1, x_2, \dots, x_p)$, par rapport aux puissances progressives des variables secondaires $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$. Mais, en vertu des équations (857), ces puissances seront en même temps les puissances des seconds membres de ces équations (857); et elles formeront ainsi, en vertu de la propriété fondamentale (856) de ces transcendentes périodiques, les fonctions des multiples de la variable x , correspondant aux degrés de ces puissances progressives. Donc, etc., etc.

Nous sommes forcés de nous arrêter ici; et nous laissons conséquemment aux géomètres, surtout à ceux des temps à venir, la tâche d'accomplir cette vaste théorie des sinus et cosinus de tous les ordres, lorsque la science sera assez avancée pour avoir besoin de ces décisives fonctions périodiques, en se servant des méthodes absolues que nous venons de lui dévoiler. En effet, l'introduction de la fonction auxiliaire $a.e^x$ dans la solution générale (846) des équations de tous les genres (834) et (836), spécialement des équations de condition (818), desquelles dépend l'accomplissement de la méthode suprême (142), (143), etc., offre le moyen d'introduire, dans cette solution (846) des équations (834) et (818), les fonctions périodiques (862) d'un ordre quelconque

($m-1$); car, en attribuant à l'exposant arbitraire r de cette fonction $s.e^x$, la détermination (851), savoir, . . . (885)

$$r = b.\psi(m, n) = b.\left\{(-1)^n\right\}^{\frac{1}{m}},$$

cette fonction auxiliaire prendra, en vertu du principe (852) ou (854) des fonctions périodiques (862), la forme . . . (886)

$$s.e^x = a^x.\psi(m, n) = \sum_p \left\{ f_p.r.\psi(m, n)^p \right\},$$

et elle contiendra effectivement ces transcendentes supérieures, lesquelles sont manifestement propres à la génération de toute fonction transcendante et périodique, et par conséquent à la solution de tout problème mathématique, quelque compliquée que puisse être cette solution. Il suffira évidemment de prendre ces fonctions périodiques (886) dans leurs ordres progressifs, correspondant successivement aux valeurs $m=2$, $m=3$, $m=4$, etc.; et l'on introduira ainsi nécessairement, dans la solution (846) des équations (834) et (818), des fonctions périodiques des ordres de plus en plus élevés, et par conséquent de plus en plus propres à la génération des fonctions problématiques, quelque transcendentes et compliquées qu'elles puissent être. — Déjà même, comme cela est notoire, l'introduction des sinus et cosinus du premier ordre connu devient indispensable dans l'astronomie, dans la mécanique céleste, et dans toutes les hautes questions de la physique; et cependant ces fonctions périodiques du premier ordre ne font que revenir sur elles-mêmes, sans aucun accroissement ou décroissement dans ce retour périodique. Et l'on conçoit, bien plus, on voit, dans les mouvements des astres, des écarts de leur état moyen, ou plutôt des oscillations continues qui, en outre de leurs retours périodiques, impliquent des accroissements et décroissements continus et alternatifs, que nos transcendentes périodiques des ordres supérieurs pourront seules représenter. — Ainsi, dans l'application finale de la méthode suprême (142), surtout dans son application à la mécanique céleste, il faudra, pour couronner la science, c'est-à-dire, pour obtenir des résultats absolus, introduire, dans la solution ou dans l'intégration (846) des équations de condition (818) de cette méthode suprême, nos présentes fonctions périodiques des ordres supérieurs, au moyen de la fonction auxiliaire (886); et l'on parviendra alors manifestement à saisir tous les mouvements des astres; et généralement tous les phénomènes les plus compliqués du monde physique.

Mais, comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut, la science est encore très-loin de cette perfection finale. Et, dans son état actuel, nous formerons une grande idée des géomètres, nos contemporains, si, comme nous l'avons déjà dit, après avoir étudié la présente réforme des mathématiques, ils parviennent au moins à comprendre la nécessité de substituer au théorème de Taylor, à ce seul et grossier instrument universel qu'ils aient eu jusqu'à ce

jour, la méthode primordiale (729), cette anticipation technique sur la méthode suprême (142), qui doit aujourd'hui ouvrir la nouvelle et dernière période historique des mathématiques.

Quoi qu'il en arrive, la science est maintenant accomplie. — Ses principes philosophiques sont déduits de la loi de CAUSATION elle-même, de cette loi qui préside nécessairement à la génération de tous les systèmes de réalités, et par conséquent à l'établissement de toutes les vérités. Ses trois lois fondamentales, constituant la trichotomie mathématique, savoir, sa loi SUPRÊME, son FAIBLEMENT-UNIVERSEL, et son FAIT TÉLÉOLOGIQUE, sont dévoilés. Et ses méthodes absolues, fondées sur ses trois lois fondamentales, savoir, la MÉTHODE SUPRÊME (142), la MÉTHODE SECONDAIRE, systématique (760) et élémentaire (808), et la MÉTHODE TÉLÉOLOGIQUE (308) et (310), laquelle, sans avoir une nécessité absolue, présente au moins une *contingence* absolue, sont établies péremptoirement. Bien plus, une transition de l'état relatif de la science, où elle est demeurée jusqu'à ce jour, à son état absolu, où elle doit être portée actuellement, savoir, la MÉTHODE PRIMORDIALE (729), qui est une anticipation sur la méthode suprême (142), est développée dans tous ses détails, et peut ainsi servir, dès aujourd'hui, même pour les géomètres, nos contemporains, à entrer dans ces nouvelles et absolues voies de la science. — Nous pouvons donc, non-seulement sans exagération, comme nous l'avons déjà dit plus haut, mais de plus avec la certitude absolue de l'assentiment de toute la postérité, déclarer ici que la science du géomètre, la plus grande des sciences, ce prototype de tout le savoir humain, est rigoureusement accomplie par notre PHILOSOPHIE ABSOLUE, et qu'elle offre ainsi un critérium infaillible de la toute-puissance de cette philosophie suprême.

Nous pourrions donc, dans l'ouvrage présent, arrêter ici ce que nous avions à dire pour accomplir la réforme des Mathématiques pures ; car, strictement parlant, tout ce qu'il reste encore à faire, ne forme plus que des corollaires que l'on peut déduire facilement, soit de nos présentes méthodes absolues, soit de nos principes philosophiques de la science, que nous avons établis dans nos ouvrages précédents. Malheureusement cette déduction des corollaires ultérieurs, quelque facile qu'elle soit, ne paraît pas encore être un besoin de la science actuelle, ou du moins un besoin des géomètres, nos contemporains, comme cela vient d'être prouvé irréfutablement par le présent ouvrage lui-même. En effet, à l'exception de la loi téléologique, de cette troisième loi fondamentale des mathématiques, toutes les autres lois et tous les procédés qui en résultent, surtout les méthodes absolues, que nous produisons dans cet ouvrage, ne sont manifestement que des corollaires, et même, en quelque sorte, des corollaires immédiats des principes et des lois fondamentales que nous avons produits dans nos ouvrages précédents ; et néanmoins, trente années se sont écoulées sans que les géomètres, nos contemporains, surtout les académiciens de Paris, parmi

lesquels ces ouvrages ont été publiés et ont été détruits, aient pu en tirer aucun de ces décisifs corollaires que nous produisons aujourd'hui. — Nous sommes donc forcés, quelque précieux que soit pour nous le temps que nous perdons ainsi, à produire encore, dans cet ouvrage, deux corollaires majeurs, sans lesquels nos géomètres ne comprendraient peut-être pas l'accomplissement qu'il nous reste à donner pour la réforme des Mathématiques appliquées.

Ces corollaires sont : 1°. l'extension de notre méthode secondaire à la solution des équations conjointes à plusieurs inconnues, quels que soient le nombre et le genre de ces équations; et 2°. l'intégration immédiate, sous une forme finie, des fonctions formant des différences ou des différentielles, à une ou à plusieurs variables indépendantes. — Ces deux corollaires de notre philosophie des mathématiques deviennent indispensables, comme on va le voir, pour l'accomplissement présent de la réforme des Mathématiques appliquées; et nous allons conséquemment, par la raison que nous venons d'alléguer, les produire ici, en nous bornant toutefois à n'en signaler que les déterminations fondamentales.

Pour ce qui concerne d'abord la solution des équations conjointes à plusieurs inconnues x_1, x_2, x_3 , etc., soient données ces équations d'un genre quelconque . . . (887)

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \text{etc.}) = n,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, \text{etc.}) = 0,$$

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, \text{etc.}) = 0,$$

$$\text{etc., etc. ;}$$

les caractéristiques $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, etc., désignant autant de fonctions différentes. — Or, ces inconnues x_1, x_2, x_3 , etc., pourront être immédiatement fonctions d'une variable indépendante et commune x , comme dans la mécanique céleste, où les mouvements inconnus x_1, x_2, x_3 , etc., sont tous fonctions du temps x , ou bien ces inconnues des présentes équations (887), pourront être considérées comme étant fonctions d'une quantité principale qui entre dans ces équations, ou du moins d'une quantité commune et arbitraire x , qu'on introduira convenablement dans ces équations, suivant le principe (744) de notre méthode secondaire. Et alors, si les différentielles de ces inconnues x_1, x_2, x_3 , etc., prises par rapport à leur variable commune x , ne sont pas déjà données d'avance, comme elles le sont dans notre mécanique céleste, on pourra toujours, en prenant les équations différentielles des équations proposées (887), par rapport aux inconnues x_1, x_2, x_3 , etc., et par rapport à leur variable commune x , on pourra, disons-nous, par les procédés de la solution des équations linéaires ou du premier degré, spécialement par notre procédé (683), déterminer, pour chacune de ces inconnues, leurs dérivées différentielles de tous les ordres . . . (888)

$$\frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2}, \frac{d^3x_1}{dx^3}, \text{ etc. ; } \frac{dx_2}{dx}, \frac{d^2x_2}{dx^2}, \frac{d^3x_2}{dx^3}, \text{ etc. ; } \frac{dx_3}{dx}, \frac{d^2x_3}{dx^2}, \frac{d^3x_3}{dx^3}, \text{ etc. ; etc.}$$

Et, d'après nos lois (311) et (312), on pourra ensuite, comme nous l'avons fait sous les marques (759) et (828), déterminer leurs différentielles réciproques

(889)

$$\frac{dx}{dx_1}, \frac{d^2x}{dx_1^2}, \frac{d^3x}{dx_1^3}, \text{ etc. ; } \frac{dx}{dx_2}, \frac{d^2x}{dx_2^2}, \frac{d^3x}{dx_2^3}, \text{ etc. ; } \frac{dx}{dx_3}, \frac{d^2x}{dx_3^2}, \frac{d^3x}{dx_3^3}, \text{ etc. ; etc.}$$

Or, avec ces données très-simples, notre élémentaire méthode secondaire (806) à (812) donnera immédiatement la solution des équations conjointes (887), en présentant, pour chacune des inconnues x_1, x_2, x_3 , etc., sa détermination distincte (808). Il suffira, pour cela, en déterminant ainsi, par l'expression générale (808), l'une quelconque x_p de ces inconnues, de considérer toutes les autres inconnues x_i , comme étant fonctions de l'inconnue cherchée x_p , en vertu de leur variable commune x ; et l'on y aura manifestement, en outre des différentielles immédiates, prises sur l'inconnue cherchée x_p , comme dans l'expression (808), où il n'y a qu'une seule inconnue, on y aura, disons-nous, les différentielles médiate, prises sur toutes les autres inconnues x_i , savoir :

(890)

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dx_p} &= \frac{dx_i}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{dx_p} \right), \quad \frac{d^2x_i}{dx_p^2} = \frac{d^2x_i}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx}{dx_p} \right)^2 + \frac{dx_i}{dx} \cdot \left(\frac{d^2x}{dx_p^2} \right), \\ \frac{d^3x_i}{dx_p^3} &= \frac{d^3x_i}{dx^3} \cdot \left(\frac{dx}{dx_p} \right)^3 + 3 \cdot \frac{d^2x_i}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx}{dx_p} \right) \cdot \left(\frac{d^2x}{dx_p^2} \right) + \frac{dx_i}{dx} \cdot \left(\frac{d^3x}{dx_p^3} \right), \\ &\text{etc., etc. ;} \end{aligned}$$

qui toutes, au moyen des différentielles directes (888), et réciproques (889), seroient parfaitement déterminées. Et, mettant alors, dans cette expression normale (808), à la place de toutes les inconnues x_1, x_2, x_3 , etc., des valeurs quelconques w_1, w_2, w_3 , etc., les plus proches possibles des véritables valeurs de ces inconnues, lorsqu'on peut les prévoir, on obtiendra ainsi, d'abord par cette formule (808), la détermination théorique et générale de chacune des inconnues x_1, x_2, x_3 , etc., et ensuite, par les formules (811) et (812), leur génération-outre convergente, et propre à la détermination numérique de leurs valeurs respectives. — Quant au choix de celle des équations proposées (887) qui doit ainsi servir, par l'expression normale (808), à la détermination respective de l'une des inconnues x_1, x_2, x_3 , etc., il est manifeste qu'il faudra, pour cela, prendre celle des équations proposées (887), qui, par la nature du problème, sert exclusivement à la détermination de l'inconnue cherchée, comme cela a lieu dans notre mécanique céleste, ou du moins il faut prendre celle des équations (887), qui exerce la plus grande influence sur la détermination de l'inconnue cherchée. Et, dans les cas où toutes les équations proposées (887)

suraient la même influence sur la détermination de chacune des inconnues x_1 , x_2 , x_3 , etc., il est manifeste que le choix de ces équations, pour la détermination respective de chacune de ces inconnues, serait tout à fait indifférent.

Nous obtenons donc ainsi, d'une manière absolument générale, par l'application de notre élémentaire méthode secondaire (806) à (812), la solution complète des équations conjointes (887), quels que soient leur nombre et leur genre, soit primitives, immanentes ou transcendentes, soit dérivées, aux différences ou aux différentielles, totales ou partielles. Et les géomètres remarqueront sans doute que c'est là précisément la solution du problème, le plus grand et le plus difficile de leur science, de ce problème immense qu'ils osaient à peine envisager dans son infinie généralité. — Nous en verrons à l'instant une application dans notre réforme de la mécanique céleste; et, dans le cinquième des ouvrages que nous commençons ici à publier, nous en verrons des applications générales, où nous emploierons même, pour cette solution universelle des équations conjointes (887), notre systématique méthode secondaire (760) et (781).

Pour ce qui concerne ensuite le second des deux grands corollaires par lesquels nous terminons ici la réforme des Mathématiques pures, c'est-à-dire, celui qui a pour objet l'intégration immédiate, sous une forme finie, des fonctions formant des différences ou différentielles, à une ou à plusieurs variables indépendantes, nous l'obtiendrons par l'application des facultés algorithmiques, que notre Philosophie des Mathématiques a introduites dans la science, déjà en 1810, par notre premier Mémoire, adressé à la Classe des sciences de l'Institut, où nous lui avons fait connaître la loi suprême des mathématiques. Et, pour ne pas répéter ici ce qui est déjà publié, nous supposerons que le lecteur aura sous les yeux la susdite *Refutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, où nous avons présenté, dans la première des Notes qui sont à la fin de cet ouvrage, les principes et les lois de la théorie générale de ces facultés algorithmiques.

Par la nature de ces facultés, on a immédiatement, pour l'intégration de la différence régressive . . . (891)

$$Fx = \Sigma Fx - \Sigma F(x - \xi),$$

formant une fonction quelconque Fx , c'est-à-dire, pour la somme . . .
. . . (892)

$$\Sigma Fx = F\xi + F(2\xi) + F(3\xi) + F(4\xi) . . . + Fx,$$

prise depuis la valeur $x = \xi$, l'expression générale et finie . . . (893)

$$\Sigma Fx = \frac{1}{\xi} \cdot L \left\{ \left[e^{L \cdot F(x + \frac{1}{2}\xi)} \right] \right\} + \text{const. period.},$$

où dénotant par L les logarithmes naturels, par e la base de ces logarithmes, et par le point placé sur la lettre x , la valeur zéro qu'il faut donner à cette

quantité x après les opérations qu'implique la présente faculté algorithmique. Nous venons de dire que cette expression finie des sommes Σ résulte immédiatement de la construction même de nos facultés générales, comme on peut s'en convaincre facilement. — Or, en appliquant à la présente faculté (893), savoir, à la faculté . . . (894)

$$(\varphi x)^{n|t} = \left[e^{t.F(x+1)} \right]^t,$$

notre loi fondamentale de ces puissances d'un ordre supérieur, telle que nous l'avons donnée, sous les marques (61) à (65), dans la *Réformation de Lagrange*, en y faisant . . . (895)

$$\alpha = \frac{x}{\xi}, \quad \varphi x = e^{t.Fx+1}, \quad \text{et par conséquent } L(\varphi x) = \xi.F(x+\xi);$$

on obtiendra immédiatement, par l'expression finale (65) de cette loi, la détermination générale et purement théorique de la somme problématique (893), savoir . . . (896)

$$\Sigma Fx = \frac{1}{\xi} \cdot L \left\{ N_0 + N_1 \cdot \frac{\xi}{1} + N_2 \cdot \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} + N_3 \cdot \frac{\xi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.} \right\}.$$

Et dans le cas où, par suite d'un grand accroissement ξ ou d'une grande valeur de la variable x , ce développement serait divergent, on le comparerait à la série générale (765), en faisant . . . (897)

$$A_0 = N_0, \quad A_1 = \frac{N_1}{1}, \quad A_2 = \frac{N_2}{1 \cdot 2}, \quad A_3 = \frac{N_3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \text{etc.},$$

et les expressions (773) à (775), ou immédiatement (774) et (797), donneraient la génération-neutre de cette somme (896), et par conséquent la détermination convergente de sa valeur numérique.

Ainsi, ce grand problème de l'intégration, sous une forme finie, des différences formant une fonction quelconque Fx , rationnelle ou irrationnelle, immanente ou transcendante, se trouve enfin résolu par notre présente expression finie (893), constituant le logarithme d'une faculté algorithmique, c'est-à-dire, d'une puissance d'ordre supérieur. Et, pour que l'on ne se méprenne pas sur la qualité théorique et finie de cette expression (893), en voyant que, pour son évaluation, il faut recourir à la loi (896) qui régit les facultés algorithmiques, il suffit de remarquer que si, au lieu de ces puissances d'ordre supérieur, il entrait, dans l'expression (893) en question, de simples puissances ordinaires à exposants fractionnaires de la forme $\frac{x}{\xi}$, il aurait également fallu, pour l'évaluation de cette expression problématique (893), recourir à la loi fondamentale de ces puissances ordinaires, c'est-à-dire, au binôme de Newton; en observant, d'ailleurs, que notre loi fondamentale (65), de laquelle dérive le

présent développement (896) de l'expression finie (893), est exactement pour les facultés arithmétiques, c'est-à-dire, pour ces puissances d'ordre supérieur, ce qu'est le binôme de Newton pour les puissances ordinaires. — Et nous devons encore faire remarquer que, lorsque les différentielles, et par conséquent les différences de la fonction proposée Fx , deviennent égales à zéro dans leurs ordres ultérieurs, le développement (896) de l'intégrale de cette différence Fx , quoiqu'il ait généralement une forme indéfinie, se réduit toujours à une forme finie.

Et lorsque l'accroissement ξ devient négatif, c'est-à-dire, lorsque la somme (892) serait . . . (898)

$\Sigma F(x) = F(-\xi) + F(-2\xi) + F(-3\xi) + F(-4\xi) \dots + F(-x)$, en la prenant toujours depuis $x = -\xi$, il faudrait manifestement, dans l'expression (893) de cette somme, changer le signe de l'exposant x , et le signe de l'accroissement ξ ; de sorte que, pour cette somme à accroissements négatifs, on aura l'expression . . . (899)

$$\Sigma F(x) = -\frac{1}{\xi} \cdot L \left\{ \left[e^{-t} F(x-t) \right] \frac{x}{t} - t \right\} + \text{const. périod.};$$

expression dans laquelle, pour l'application de notre loi fondamentale (65), (*Refutation de Lagrange*), on aura ici, comme à la marque (895), les déterminations . . . (900)

$m = \frac{x}{\xi}$, $\varphi x = e^{-t} F(x-t)$, et par conséquent $L(\varphi x) = -\xi \cdot F(x-\xi)$;

en prenant aussi négativement l'accroissement ξ dans le développement (896). — Ainsi, pour toute valeur de la variable x , positive ou négative, on aura toujours, par les expressions (893) et (899), la détermination de la somme ΣFx , prise depuis $x = +\xi$, ou $x = -\xi$; de sorte qu'en ajoutant à ces expressions la quantité $F(0)$, on aura généralement cette somme, depuis $x = 0$, jusqu'à $(+x)$, par l'expression (893), et jusqu'à $(-x)$, par l'expression (899).

Procédons maintenant à l'intégration, également sous une forme finie, des fonctions différentielles quelconques ($Fx \cdot dx$). — Et, pour le faire, déduisons immédiatement, de l'expression générale (893) des sommes Σ , ces intégrales particulières à accroissement indéfiniment petit, en y faisant . . . (901)

$$\xi = dx = \frac{1}{\infty}.$$

En effet, nous obtiendrons ainsi sur-le-champ, pour l'intégrale de la fonction quelconque ($Fx \cdot dx$), l'expression . . . (902)

$$\int (Fx \cdot dx) = L \left\{ \left[1 + \frac{1}{\infty} \cdot F(x) \right] \frac{x}{1} \right\} + \text{constante}.$$

Or, dans notre *Critique de la théorie des fonctions génératrices de Laplace* (*), où nous avons donné (pages 112 à 119) l'intégration finie des équations aux différences du second ordre, par le moyen de nos facultés algorithmiques, en y annonçant l'application générale de ces facultés à l'intégration finie des équations et des fonctions quelconques, annonce que nous réalisons ici pour l'intégration finie des fonctions, nous avons eu besoin de compléter notre théorie des facultés algorithmiques, par l'algorithme inverse de celui de leur formation directe, c'est-à-dire, par l'algorithme de l'extraction des bases des facultés. Et, pour cela, dans la Note relative à cette intégration des équations, nous avons présenté (page 133), sous la marque (161), le principe général de cet algorithme inverse des facultés, savoir . . . (903)

$$\left((fx)^{\frac{p}{a}} \right)^{\frac{q}{n}} = (fx)^{\frac{pq}{an}} \quad (161)$$

fx étant une fonction quelconque de la variable x , les quantités $n\frac{q}{a}$ et $p\frac{q}{n}$ étant les accroissements successifs de cette variable dans la formation des facultés, et de plus p, q, a, n , étant des nombres quelconques. Et nous y déduisons de ce principe, pour l'extraction des bases des facultés, les résultats suivants :

« Si l'on avait donc une fonction connue Fx et une fonction inconnue fx ,
« telles que . . . (904)

$$(fx)^{\frac{q}{n}} = Fx \quad (162)$$

« on tirerait immédiatement, du principe (903), le résultat . . . (905)

$$fx = (Fx)^{\frac{n}{q}}; \quad (162')$$

« et c'est là l'extraction des bases des facultés, correspondant à l'extraction des racines des puissances (**). — Ainsi, en appliquant au second membre de ce

(*) Comme on le verra dans notre *Manifeste historique*, formant le Supplément du second tome de l'ouvrage présent, cette *Critique de Laplace* a été imprimée en 1813, mais n'a été publiée qu'en 1819.

(**) En apprenant ainsi, dans nos ouvrages, cette analogie entre l'extraction des bases des facultés et celle des racines des puissances, les géomètres doivent bien se garder de confondre ces deux algorithmes inverses qui, malgré cette apparente analogie, sont au fond essentiellement différents. Ainsi, avait-ce une marque certaine d'ignorance si, pour cacher le plagiat, on posait cette confusion jusqu'à se servir de nom et de la notation des racines des puissances pour désigner les bases des facultés. En effet, ce serait une preuve, non-seulement de ce que l'on ne comprend pas notre Philosophie des Mathématiques, dans laquelle, en vertu de la loi de création, les deux algorithmes des puissances et des facultés sont essentiellement différents, mais, de plus, une preuve de ce que l'on ne comprend pas même la nature des facultés, par la raison que, d'après notre principe posant (903), l'exposant $\frac{pq}{an}$ dans le second membre, peut, à la vérité, se décomposer en deux exposants $\frac{p}{a}$ et $\frac{q}{n}$ dans le premier membre, comme dans les puissances, mais les accroissements respectifs $n\frac{q}{a}$ et $p\frac{q}{n}$ de ces opérations séparées, dans le premier membre, sont différents; et c'est là le caractère instructeur des facultés, qui rompt leur analogie avec les puissances.

• résultat (903), notre loi fondamentale des facultés, telle qu'elle est donnée, sous les marques (61) à (65), dans la première Note de la *Réfutation de Lagrange*, on obtiendra, moyennant la fonction connue Fx , la génération de cette fonction inconnue fx , déterminée par l'équation du nouveau genre (904), à laquelle, comme nous le verrons ailleurs, se réduit l'intégration finie des équations.

Et nous ajouterons ici que ce même principe (903) de l'algorithme inverse des facultés, c'est-à-dire, de l'extraction de leurs bases, nous conduira également à l'intégration finie des fonctions différentielles, nommément à la présente intégration (902). En effet, par suite de ce principe (903), la faculté qui forme l'expression (902), peut se décomposer de la manière que voici . . . (906)

$$\left[1 + \frac{1}{\infty} \cdot Fx\right]^{\frac{1}{\infty}} = \left(\left[1 + \frac{1}{\infty} \cdot Fx\right]^{\frac{1}{\infty}}\right)^{x^i};$$

et il ne restera qu'à déterminer la fonction . . . (907)

$$\left[1 + \frac{1}{\infty} \cdot Fx\right]^{\frac{1}{\infty}} = \varphi x,$$

en ayant soin de ne pas confondre la présente fonction problématique φx , qu'il s'agit ici de découvrir, avec la fonction générale qui entre dans le principe (903), et qui est dénotée de la même manière. — Et, d'après cette supposition problématique (907), l'égalité (906) sera . . . (908)

$$\left[1 + \frac{1}{\infty} \cdot Fx\right]^{\frac{1}{\infty}} = (\varphi x)^{x^i}.$$

Or, d'après notre théorie philosophique des facteurs élémentaires, il est manifeste que, dans la faculté qui forme le premier membre de la présente égalité (908), le facteur élémentaire du rang μ , c'est-à-dire, correspondant à la partie μx de l'exposant ∞x de cette faculté, est . . . (909)

$$\text{Fact. élém.} \left[1 + \frac{1}{\infty} \cdot Fx\right]^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty} \cdot F(x + \mu).$$

Et, d'après l'expression générale (73), que, dans la *Réfutation de Lagrange*, nous avons donnée des facteurs élémentaires, nous aurons, dans la faculté qui forme le second membre de la même égalité (908), pour le facteur élémentaire du rang μ , c'est-à-dire, correspondant à la partie μ de son exposant x , l'expression . . . (910)

$$\begin{aligned} \text{Fact. élém.} [(\varphi x)^{x^i}] &= 1 + \frac{1}{\infty} \cdot \left\{ L\varphi(x + \mu) - \Theta_1 \cdot \frac{dL\varphi(x + \mu)}{dx} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1} \cdot \Theta_2 \cdot \frac{d^2 L\varphi(x + \mu)}{dx^2} - \frac{1}{1 \cdot 1!} \cdot \Theta_3 \cdot \frac{d^3 L\varphi(x + \mu)}{dx^3} + \text{etc.} \right\}; \end{aligned}$$

les quantités $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, etc., étant les nombres de Bernoulli. Donc, pour écarter la quantité arbitraire μ , qui s'élimine toujours par elle-même, faisons $\mu = 0$, et, de plus, pour simplifier les expressions, faisons . . . (911)

$$\varphi x = e^{4x}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad L(\varphi x) = \varphi x;$$

et la comparaison des deux expressions (909) et (910) du même facteur élémentaire, donnera l'équation . . . (912)

$$Fx = \varphi x - \theta_1 \cdot \frac{d^1 \varphi x}{dx^1} + \frac{1}{1} \cdot \theta_1 \cdot \frac{d^2 \varphi x}{dx^2} - \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \theta_2 \cdot \frac{d^3 \varphi x}{dx^3} + \text{etc., etc.,}$$

qui servira à la détermination de la fonction φx , et par conséquent de la fonction problématique φx dans l'expression (908). — Et, pour peu qu'on examine cette équation (912), on s'aperçoit facilement, par la nature des nombres de Bernoulli, qui en forment les coefficients, que la fonction cherchée φx est . . . (913)

$$\varphi x = \frac{1}{1} \cdot Fx + \frac{1}{1 \cdot 1!} \cdot \frac{d^1 Fx}{dx^1} + \frac{1}{1 \cdot 2!} \cdot \frac{d^2 Fx}{dx^2} + \frac{1}{1 \cdot 3!} \cdot \frac{d^3 Fx}{dx^3} + \text{etc., etc.};$$

car, en introduisant cette détermination de la fonction φx dans l'équation (912), on voit facilement que, par suite de la relation qui existe entre les nombres de Bernoulli, d'après leur relation générale . . . (914)

$$0 = \frac{1}{n+1} - \theta_1 + \frac{n}{1} \cdot \theta_2 - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2!} \cdot \theta_3 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 3!} \cdot \theta_4 - \text{etc.,}$$

toutes les différentielles de la fonction Fx disparaissent successivement dans l'équation (912), et il ne reste que l'équation identique $Fx = Fx$.

Ainsi, la fonction φx se trouve complètement déterminée par l'expression (913), au moyen de la fonction proposée Fx , et de ses dérivées différentielles; et par conséquent, la fonction problématique φx , dont la fonction φx forme le logarithme, se trouve également déterminée. Et alors l'expression problématique (902) deviendra . . . (915)

$$\int (Fx \cdot dx) = L[(e^{4x})^{e^{1/2}}] + \text{constante};$$

et le grand problème de l'intégration, sous une forme finie, d'une fonction différentielle quelconque, sera finalement résolu.

Il ne faut pas perdre de vue qu'à cause de sa dérivation de la somme (893), la présente expression (915), dans laquelle le point placé sur la lettre x de l'exposant $e^{1/2}$, indique qu'il faut, après les opérations qu'exige cette faculté, faire $x = 0$, exprime l'intégrale prise depuis $x = 0$ jusqu'à une valeur positive quelconque x . Et alors, pour avoir l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à toute valeur négative de x , il faudra, d'après la présente déduction de cette expression (915), prendre négativement la différentielle dx , c'est-à-dire, l'exposant x de la faculté. On aura ainsi, pour l'intégrale correspondant à la valeur

négaive de la variable x , l'expression . . . (916)

$$\int (Fx, dx) = + \mathbf{I}[(e^{\frac{1}{2}x})^{-x}] + \text{constante}.$$

Mais, en vertu des lois (57) à (60) de notre théorie des facultés (*Réfutation de Lagrange*), on a . . . (917)

$$(e^{\frac{1}{2}x})^{-x} = \frac{1}{[e^{\frac{1}{2}(x-x)}]^{x^2}} = \frac{1}{[e^{\frac{1}{2}(x-x)}]^{x^2-1}} = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{[e^{\frac{1}{2}x}]^{(x+1)-1}}.$$

Donc, en introduisant cette valeur dans l'expression (916), nous aurons définitivement, pour l'intégrale de la fonction différentielle (Fx, dx) , prise depuis $x=0$, jusqu'à toute valeur négative de la variable x , l'expression générale . . . (918)

$$\int (Fx, dx) = - \mathbf{I}[(e^{\frac{1}{2}x})^{(x+1)-1}] + \psi x + \text{constante}.$$

Et par conséquent, l'intégrale générale $\int (Fx, dx)$, prise depuis la valeur négative y de la variable x , jusqu'à sa valeur positive z , sera . . . (919)

$$\int (Fx, dx) = - \mathbf{I}[(e^{\frac{1}{2}x})^{(z+1)-1}] + \mathbf{I}[(e^{\frac{1}{2}x})^{(y+1)-1}] + \psi z + \text{constante};$$

expression de laquelle on pourra ensuite déduire facilement les valeurs des intégrales définies, prises entre les valeurs quelconques a et b de la variable x , en y faisant $y=0$, lorsque les deux limites a et b sont positives, et $z=0$, lorsqu'elles sont négatives. — Il faut ici remarquer qu'on pourrait réunir également, dans une seule expression, les formules séparées (893) et (899), pour avoir l'expression générale des sommes Σ , prises depuis la valeur négative y de la variable x , jusqu'à sa valeur positive z ; et par là même, on aurait l'expression générale de ces sommes définies Σ , entre deux limites quelconques a et b .

Mais, ce qu'il faut ici remarquer essentiellement, c'est la susdite loi (896) qui régit la génération des facultés, cette loi fondamentale que nous avons déjà fait connaître en 1810, dans notre premier Mémoire présenté à la Classe des sciences de l'Institut, et que nous avons publiée en 1812, sous les marques (61) à (65), dans la *Réfutation de Lagrange*. En effet, cette loi des facultés ou des puissances d'ordres supérieurs, par laquelle les facultés qui forment les présentes expressions (915), (916), et (919), peuvent être développées théoriquement et déterminées numériquement, ainsi que nous l'avons déjà vu plus haut, aux marques (896) et (897), pour les sommes Σ , devient actuellement décisive pour la science, en ce qu'elle offre le moyen de la détermination finie des intégrales des fonctions différentielles quelconques, de ces intégrales qui forment notoirement le deuxième grand problème de la science, dont la solution était devenue le désespoir des géomètres, au point, comme nous l'avons déjà remarqué plusieurs fois, qu'ils considéraient comme une folie la recherche de cette solution.

— Il est sans doute superflu de répéter ici, à l'occasion de ces intégrales sous (16).

la forme finie (915) et (916), ce que nous avons dit plus haut, à l'occasion des sommes sous la forme également finie (893) et (899), savoir, que l'application de la loi fondamentale des facultés, de cette loi décisive dont nous venons de parler, et par laquelle on obtient ainsi la génération, théorique et technique, de ces expressions (915) et (916), n'altère pas plus leur détermination finie que l'application du binôme de Newton n'altère la détermination finie des puissances ordinaires. Ce qu'il peut y avoir de réellement infini dans ces expressions finies (915) et (916) des intégrales, c'est la fonction ϕx qui est déterminée par l'expression (913); mais, c'est là précisément ce qui, d'après notre réforme des mathématiques, est nécessairement infini dans ce problème spécial, comme il y a toujours et inévitablement un élément infini dans tous les problèmes supérieurs. Aussi, lorsque la fonction proposée Fx est telle que ses différentielles finissent par devenir zéro, la fonction ϕx , donnée par l'expression (913), se trouve-t-elle être finie; et alors l'application de notre loi des facultés au développement des expressions (915) et (916) donne toujours, pour les intégrales correspondantes, des expressions également finies.

Mais n'avons pas non plus besoin de répéter ici ce que nous avons dit plus haut, à l'occasion de l'expression (896), concernant le cas où l'application de la loi des facultés au développement des présentes intégrales (915) et (916), savoir : . . . (920)

$$\int (Fx, dx) = L \left\{ N_0 \pm N_1 \cdot \frac{1}{1} + N_2 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \pm N_3 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + N_4 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \text{etc.} \right\},$$

conduirait à une génération numérique divergente. Il est, en effet, manifeste que, pour les présentes intégrales (920), comme pour les susdites sommes (896), il faudrait transformer cette divergente génération technique en génération-neutre (773) à (775), en établissant ici de même les relations (897) entre les présents coefficients N_0, N_1, N_2 , etc., et les coefficients A_0, A_1, A_2 , etc., de la série générale (765), à laquelle se rapporte cette génération-neutre (773) à (775). Mais, nous devons ici prévenir que, par suite de ce que l'accroissement ξ dans les présentes facultés (915) et (916), est égal à l'unité, les expressions immédiates (774) et (797) de la génération-neutre en question, suffiront presque toujours pour la détermination de ces intégrales, lorsque leur développement (920) se trouverait être divergent.

Quant à la démonstration de cette décisive loi fondamentale des facultés, que nous avons d'abord fait connaître à l'Institut de France, en même temps que la loi suprême des mathématiques, les commissaires de ce corps savant, Lagrange et Lacroix, en reconnaissant l'importance de nos générales facultés algorithmiques, ont déclaré, dans leur rapport, qu'on pourrait constater facilement leur loi fondamentale par le moyen du théorème de Taylor. Et ils avaient raison, lorsqu'il ne s'agit que de vérifier cette loi pour les cas où l'exposant

m des facultés est un nombre entier. Aussi, devons-nous leur attribuer l'honneur d'avoir les premiers constaté ainsi la vérité de cette loi fondamentale pour les cas où l'exposant m est un nombre entier. Mais, cette vérification de notre loi n'est pas encore sa démonstration, parce que cette dernière doit porter généralement sur toutes les valeurs de l'exposant m des facultés, entières et fractionnaires, rationnelles, et même irrationnelles ou transcendentes. Et, sous cet aspect véritable et nécessaire, la démonstration de notre loi fondamentale des facultés n'est pas encore donnée jusqu'à ce jour. Cependant, dans une note qui précède l'exposition de cette loi dans la *Refutation de Lagrange*, nous avons prévenu les géomètres que sa véritable démonstration était très-facile. Malheureusement, cette facilité dépend de la connaissance de notre philosophie des mathématiques; et, jusqu'à ce jour, aucun géomètre ne paraît encore avoir compris cette philosophie. En effet, puisqu'il faut enfin le dire ouvertement, la rigoureuse démonstration en question de notre loi fondamentale des facultés consiste tout simplement dans la multiplication des audits *facteurs élémentaires* de ces fonctions supérieures, tels que nous les avons fait connaître, dans la *Refutation de Lagrange*, d'abord, sous la marque (73), pour les facultés à une seule variable, et ensuite, sous la marque (76), pour les facultés d'un nombre quelconque de variables indépendantes. — Et, à cette occasion, nous devons prévenir les géomètres que la rigoureuse démonstration pareille du binôme de Newton, pour toutes les valeurs de l'exposant des puissances, démonstration qu'ils n'ont pas plus que celle de notre loi des facultés, dépend également de la connaissance de notre philosophie des mathématiques, et consiste ainsi de même dans la simple multiplication des *facteurs élémentaires* des puissances, tels que nous les avons dévoilés, sous la marque (6), dans l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques* (page 162).

Jusqu'ici, nous n'avons déterminé que les sommes et les intégrales des fonctions d'une seule variable; et il existe notoirement de pareilles sommes et intégrales des fonctions à deux ou à plusieurs variables indépendantes. Mais, ces dernières, à plusieurs variables, dépendent toujours des premières, à une seule variable; et la science se réduit ainsi essentiellement à la connaissance des sommes et des intégrales des fonctions à une seule variable indépendante. — Toutefois, notre théorie générale des facultés algorithmiques, en employant les facultés à plusieurs variables, offre les moyens également faciles pour déterminer les sommes et intégrales des fonctions à plusieurs variables. — Nous ne pouvons plus entrer ici dans ces détails ultérieurs de notre théorie générale des facultés algorithmiques; et nous laissons cette tâche aux géomètres, surtout à ceux des temps à venir, en les prévenant que les principes que, dans la susdite *Refutation de Lagrange*, nous avons établis pour la théorie générale des facultés, leur fourniront tous les éléments nécessaires pour l'accomplissement de cette théorie et de son application universelle. — D'ailleurs, comme nous ve-

nous da le remarquer, dans la connaissance des sommes et des intégrales des fonctions, la science se réduit essentiellement à la connaissance de ces sommes et de ces intégrales des fonctions d'une seule variable, auxquelles se réduisent notamment et facilement toutes les autres. Et ce sont ces sommes et ces intégrales fondamentales que nous venons de déterminer complètement, non-seulement sous une forme fixe, mais, de plus, par l'application de notre loi fondamentale des facultés, dans la double et rigoureuse génération, théorique et technique, de ces sommes et de ces intégrales; de sorte qu'à cet égard, comme à tous les autres, la science se trouve de nouveau accomplie par notre réforme des mathématiques. Aussi, sommes-nous convaincus que, dans cette décisive question de la sommation et de l'intégration générale des fonctions, la postérité ne pourra plus rien ajouter à ce que notre philosophie des mathématiques vient ici de donner à la science. Et par conséquent, pour rendre à jamais et immédiatement praticables ces grands résultats, dans toute l'étendue dans laquelle la science pourra en avoir besoin, nous joignons ici la table des soixante premiers nombres de Bernoulli, qui forment les éléments de notre loi fondamentale des facultés algorithmiques. Cette table, où, à l'exception du premier, on ne donne que les nombres de Bernoulli à indices pairs, parce que tous ceux à indices impairs sont notoirement zéro, a été calculée par M. Arson, il y a trente ans; et nous pouvons en garantir l'exactitude. La voici, en nous servant, pour désigner ces nombres, de la susdite notation que nous leur attribuons généralement . . . (931)

Nombres de Bernoulli.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= + \frac{1}{2}, & \theta_2 &= + \frac{1}{12}, & \theta_4 &= - \frac{1}{120}, & \theta_6 &= + \frac{1}{252}, \\ \theta_8 &= - \frac{1}{240}, & \theta_{10} &= + \frac{1}{132}, & \theta_{12} &= - \frac{691}{32760}, \\ \theta_{14} &= + \frac{1}{12}, & \theta_{16} &= - \frac{3617}{8160}, & \theta_{18} &= + \frac{43867}{14364}, \\ \theta_{20} &= - \frac{174611}{6600}, & \theta_{22} &= + \frac{77683}{276}, & \theta_{24} &= - \frac{236364091}{65520}, \\ \theta_{26} &= + \frac{657931}{12}, & \theta_{28} &= - \frac{3392780147}{3480}, \\ \theta_{30} &= + \frac{1723168255201}{85932}, & \theta_{32} &= - \frac{7709321041217}{16320}, \\ \theta_{34} &= + \frac{151628697551}{12}, & \theta_{36} &= - \frac{26315271553053477373}{69090840}, \\ \theta_{38} &= + \frac{154210203991661}{12}, & \theta_{40} &= - \frac{561082718496449322051}{541200} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{41} &= + \frac{1 \ 520 \ 697 \ 643 \ 918 \ 070 \ 802 \ 691}{75 \ 852}, \\
\theta_{41} &= - \frac{2 \ 530 \ 297 \ 234 \ 481 \ 911 \ 294 \ 093}{2 \ 700}, \\
\theta_{46} &= + \frac{25 \ 932 \ 657 \ 025 \ 822 \ 267 \ 968 \ 607}{564}, \\
\theta_{46} &= - \frac{5 \ 609 \ 403 \ 368 \ 997 \ 817 \ 686 \ 249 \ 127 \ 547}{2 \ 227 \ 680}, \\
\theta_{50} &= + \frac{19 \ 802 \ 288 \ 209 \ 643 \ 183 \ 928 \ 499 \ 101}{132}, \\
\theta_{50} &= - \frac{61 \ 628 \ 132 \ 164 \ 268 \ 458 \ 257 \ 532 \ 691 \ 681}{6 \ 360}, \\
\theta_{54} &= + \frac{29 \ 149 \ 963 \ 634 \ 884 \ 862 \ 421 \ 418 \ 123 \ 812 \ 691}{43 \ 092}, \\
\theta_{56} &= - \frac{354 \ 198 \ 989 \ 901 \ 889 \ 536 \ 240 \ 773 \ 677 \ 094 \ 747}{6 \ 960}, \\
\theta_{58} &= + \frac{2 \ 913 \ 228 \ 046 \ 513 \ 104 \ 891 \ 794 \ 716 \ 413 \ 587 \ 449}{708}, \\
\theta_{60} &= - \frac{1 \ 215 \ 233 \ 140 \ 483 \ 755 \ 572 \ 040 \ 304 \ 994 \ 079 \ 820 \ 246 \ 041 \ 491}{3 \ 407 \ 203 \ 800}.
\end{aligned}$$

Voici, de plus, en faisant abstraction de leur signe, positif ou négatif, les logarithmes vulgaires de ces nombres . . . (922)

Logarithmes des Nombres de Bernoulli.

$$L\theta_1 = 9,698 \ 9700,$$

$$\begin{aligned}
L\theta_2 &= \underline{8},920 \ 8187, & L\theta_{12} &= \underline{2},449 \ 4169, & L\theta_{43} &= \underline{16},301 \ 8766, \\
L\theta_4 &= \underline{2},920 \ 8187, & L\theta_{14} &= \underline{3},557 \ 2075, & L\theta_{44} &= \underline{17},962 \ 2629, \\
L\theta_6 &= \underline{2},598 \ 5995, & L\theta_{16} &= \underline{4},738 \ 9991, & L\theta_{46} &= \underline{19},662 \ 5679, \\
L\theta_8 &= \underline{2},619 \ 7888, & L\theta_{18} &= \underline{5},988 \ 9765, & L\theta_{48} &= \underline{21},401 \ 0636, \\
L\theta_{10} &= \underline{2},879 \ 4261, & L\theta_{20} &= \underline{7},302 \ 1732, & L\theta_{50} &= \underline{23},176 \ 1418, \\
L\theta_{12} &= \underline{8},\underline{324} \ \underline{1341}, & L\theta_{22} &= \underline{8},674 \ 2958, & L\theta_{52} &= \underline{24},986 \ \underline{3217}, \\
L\theta_{14} &= \underline{8},920 \ 8187, & L\theta_{24} &= \underline{10},101 \ 6010, & L\theta_{54} &= \underline{26},830 \ 2421, \\
L\theta_{16} &= \underline{9},646 \ 6583, & L\theta_{26} &= \underline{11},580 \ 7882, & L\theta_{56} &= \underline{28},706 \ 6381, \\
L\theta_{18} &= \underline{0},484 \ 8625, & L\theta_{28} &= \underline{13},108 \ 9312, & L\theta_{58} &= \underline{30},614 \ 3415, \\
L\theta_{20} &= \underline{1},422 \ 5277, & L\theta_{30} &= \underline{14},683 \ 4208, & L\theta_{60} &= \underline{32},552 \ 2609;
\end{aligned}$$

en ne perdant pas de vue que tous ceux de ces nombres dont l'indice est divisible par 4, sont négatifs, et que tous les autres à indice pair sont positifs. Quant à ceux de ces nombres de Bernoulli dont les indices sont impairs,

nous avons déjà rappelé qu'à l'exception du premier, tous les autres sont zéro.

En résumant ici les deux corollaires majeurs (887) et (919) ou (893), par lesquels nous terminons, dans cet ouvrage, la réforme des Mathématiques pures, nous n'avons pas, sans doute, besoin de faire remarquer aux géomètres que ce sont là les solutions, non-seulement des deux plus grands problèmes de leur science, mais, de plus, les solutions décisives qui donnent enfin à cette grande science un véritable accomplissement didactique, parce que, sans ces solutions décisives, toutes les fois qu'il s'agissait de plusieurs équations conjointes de genres supérieurs, ou d'intégrations théoriques des fonctions transcendentes, la science du géomètre, cette science si hautement précocisée, était réduite au tâtonnement, et même à l'absolue impuissance. Mais, ce que nous devons ici faire remarquer, c'est que ces deux corollaires offrent respectivement, pour nos deux premières méthodes absolues, pour la méthode primordiale (729), et pour la méthode secondaire (760) ou (808), leur final accomplissement, par lequel elles deviennent immédiatement et généralement applicables. En effet, l'intégration théorique (919) ou (893) des fonctions différentielles quelconques offre cet accomplissement final à la méthode primordiale (729), en y supplant à l'imperfection que lui implique son aussit élément technique $(x-a)$; et la solution théorique des équations conjointes (887) d'un genre quelconque offre le même accomplissement final à la méthode secondaire (760) ou (808), en l'étendant à la solution simultanée d'un nombre quelconque d'équations.

Ainsi, pour ce qui concerne d'abord la méthode primordiale (729), on pourra maintenant, par l'intégration immédiate (919) de la fonction différentielle $d(Fx)$, à laquelle s'applique cette méthode absolue, déterminer immédiatement, et d'une manière théorique, la fonction Fa qui sert de base à cette méthode, et qui répond à une valeur quelconque a de la variable x . Par ce moyen, en répétant cette détermination de la fonction Fa pour plusieurs valeurs a_1, a_2, a_3 , etc., de la variable x , autant que cela peut devenir nécessaire, la partie théorique $\Sigma(\omega)$ de cette méthode primordiale, déterminée, d'après (637), par l'expression (729)', sera toujours convergente pour toute valeur de la variable x , et suffira pour donner la génération théorique de la fonction problématique Fx , dans toutes les questions des Mathématiques appliquées. Bien plus, la partie technique $S(\omega + 1)$ de cette méthode primordiale, c'est-à-dire, la série complémentaire (729)'' sera toujours convergente à volonté. — Aussi, par ce présent accomplissement (919) de la méthode primordiale (729), la transformation de sa série complémentaire (729)'' en génération-neutre, telle que nous l'avons indiquée sous la marque (779), n'est plus strictement nécessaire, à moins que la valeur de la fonction problématique Fx ne soit idéale (imaginaire), et que cette valeur idéale n'ait pas déjà été déterminée dans l'intégration (919) et (920) de la fonction fondamentale Fa . Mais, par le présent

accomplissement (919) de notre méthode primordiale (729), sa transformation totale en génération-neutre absolue, telle que nous l'avons indiquée sous les marques (791) à (793), et (798) à (800), devient absolument inutile, et ne peut servir que dans le cas où, faisant abstraction de l'actuel accomplissement (919), il s'agirait de déterminer la valeur de la fonction problématique Fx par la seule méthode primordiale (729) elle-même.

Pour ce qui concerne ensuite la méthode secondaire (760) ou (808), on pourra maintenant, par les procédés (888) à (890), l'étendre facilement à la solution d'un nombre quelconque d'équations conjointes (887), soit lorsque, par la méthode systématique (744), on aura déterminé préalablement la susdite valeur fondamentale de l'une des inconnues x_1, x_2, x_3 , etc., dans chacune des équations proposées (887), soit lorsque, par la méthode élémentaire (806), on n'aura déterminé préalablement cette valeur fondamentale d'aucune de ces inconnues, et qu'on leur attribuera provisoirement des valeurs quelconques w_1, w_2, w_3 , etc. Dans les deux cas, notre méthode secondaire, soit systématique, soit élémentaire, recevra ainsi, surtout généralement par l'application de sa forme normale (808), et, au besoin, de sa transformation (811) et (812), son accomplissement final par son extension à la solution simultanée d'un nombre quelconque d'équations (887).

Nous avons maintenant, et dans leur plus haute perfection, tous les moyens, surtout les MOYENS ABSOLUS, que la science possède pour la solution de tous les problèmes des mathématiques. Et nous pouvons conséquemment arrêter ici notre réforme des Mathématiques pures, dont le principal objet était précisément de découvrir ces procédés ou ces MÉTHODES ABSOLUES de la science. — Nous laissons à la postérité de constater que la science du géomètre n'aura jamais d'autres moyens pour la solution de ses problèmes; et nous offrons cet accomplissement final et irrévocable des Mathématiques, de ce prototype de toutes les sciences, pour la garantie de la vérité de notre philosophie absolue, de laquelle nous venons de déduire ces résultats infaillibles.

Passons donc à ce qu'il nous reste encore à dire, dans cet ouvrage, pour l'accomplissement pareil de la réforme des Mathématiques appliquées, notamment pour la solution des trois grands problèmes du monde physique. Et continuons conséquemment ce que nous avons déjà commencé plus haut pour la solution du premier de ces problèmes, pour celui de la construction du monde par les corps célestes, formant l'objet de la mécanique céleste.

En nous reportant à nos Prolegomènes du Messinisme, où la solution de ce premier et grand problème est donnée dans toutes ses déterminations fondamentales, nous avons fait remarquer plus haut que ce qui manquait à cette solution, c'était son triple accomplissement, algorithmique, dynamique, et philosophique. Et, dans l'ouvrage présent, nous avons déjà donné, d'abord, tout cet accomplissement algorithmique de la mécanique céleste, par les méthodes abso-

lues de la science, qui rendent possible la solution de toutes les grandes questions algorithmiques, numériquement toutes les intégrations qu'il reste encore à opérer dans les résultats qui, pour cette haute mécanique, sont produits dans les *Prolegomena*. Et nous y avons donné, de plus, sinon tout l'accomplissement dynamique de la mécanique céleste, lequel précisément, avec l'accomplissement philosophique de cette science, fera l'objet spécial du deuxième des ouvrages que, d'après le Programme, nous commençons à publier, nous avons donné, disons-nous, au moins la condition fondamentale de cet accomplissement dynamique, consistant dans la détermination générale (111) et (113) des trois forces techniques $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{L}$, considérées faussement comme des forces perturbatrices dans la construction du monde physique. Nous allons donc, pour compléter cette condition fondamentale, découvrir ici, précisément dans ces trois forces techniques, les conditions de la *razonnicità* qui règle les mouvements des astres, et par conséquent les conditions de la permanente stabilité de l'équilibre mécanique dans les corps célestes.

Avant tout, ajoutons ici quelques remarques concernant les expressions (113) de ces trois forces techniques $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{L}$. — Observons d'abord que les fonctions périodiques, sinus et cosinus, qui entrent dans ces expressions, portent toutes sur les distances des mouvements Φ et (Φ) par rapport au nœud ascendant (ψ) , et sur la différence Δ de ces mouvements. Ainsi, en rapportant ces mêmes mouvements au nœud descendant $\left[\left(\frac{\psi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$, et en changeant conséquemment le signe de l'inclinaison (π) , il faudrait que les expressions (113) demeurassent les mêmes. Et il en est ainsi effectivement; ce qui offre, s'il en était besoin, une vérification de ces décisives expressions (113). — Mais, de cette invariabilité résulte, en outre, l'avantage de pouvoir, sans aucune modification de ces formules, rapporter indifféremment le plan de l'orbite de l'astre perturbateur C au plan de l'orbite de l'astre B qui subit cette perturbation, comme on le rapporte effectivement pour les expressions (113), ou rapporter réciproquement le plan de l'orbite de l'astre B au plan de l'orbite de l'astre perturbateur C, pourvu que, dans ce cas réciproque, on change, dans les expressions (113), le signe de l'inclinaison (π) , et que l'on considère conséquemment comme négative cette inclinaison (π) contre le nœud ascendant de l'astre B rapporté ainsi au plan de l'orbite de l'astre C, dans toutes les déterminations qui dépendent de ce nœud ascendant de l'astre B, telles que sont les deux dernières des trois déterminations (70) de notre canon astronomique, dans lesquelles entre cette inclinaison (π) , qui y est désignée simplement par π , et qu'il faut alors, dans le cas réciproque en question, prendre négativement. — On peut encore concevoir directement cette invariabilité des expressions (113) dans les deux cas réciproques dont nous venons de parler, en considérant immédiatement le nœud ascendant dans le cas direct, c'est-à-

dire, le nœud ascendant du plan C rapporté au plan B, comme étant le nœud descendant dans le cas réciproque, c'est-à-dire, le nœud descendant du plan B rapporté au plan C. En effet, prenant alors le nœud ascendant du plan B pour origine des mesures, les sinus et cosinus des distances $[(\Phi) - (\psi)]$ et $[(\Phi) - (\psi)]$ deviendront négatifs dans les expressions (113), ce qui équivaudra à y rendre négative l'inclinaison (η); et, de plus, dans le nœud commun, ascendant pour l'astre C et descendant pour l'astre B, l'inclinaison π dans les deux dernières des trois déterminations (70) du canon astronomique, devient également négative, parce que ces trois déterminations sont ici celles du plan de l'orbite de l'astre B rapporté au plan de l'orbite de l'astre perturbateur C. — Il est sans doute superflu de prévenir que, dans ce cas réciproque, lorsqu'on rapporte le plan de l'astre B au plan de l'astre C, il faut, en outre du changement du signe de l'inclinaison (π), substituer, à la place du nœud (ψ) qui concerne l'astre perturbateur C, le nœud ϕ de l'astre B, nœud qui servira ainsi pour distinguer ce cas réciproque, en désignant d'ailleurs indifféremment par (π) l'inclinaison réciproque des deux plans des orbites des astres B et C.

Une deuxième remarque essentielle qu'il faut encore faire concernant les expressions générales (113) des forces techniques $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{V}$, c'est que, d'après la génération des mouvements Φ et (Φ) , conformément à la loi suprême (65) de la mécanique céleste, ces mouvements des astres dans leurs plans respectifs, ainsi que ceux χ et (χ) de leurs lignes des apsides, ont pour origine nos susdites lignes fixes χ et (χ) , que nous nommons *lignes fixes des orbites*. Il faut donc, pour compléter, sous le point de vue de cette loi suprême (65), les expressions générales (113) des trois forces techniques en question, y introduire, à la place des mouvements accomplis Φ et (Φ) , leurs générations respectives $[\Phi + \chi]$ et $[(\Phi) + (\chi)]$; et cela même dans leur différence Δ , qui deviendra ainsi . . . (114)

$$\Delta = [(\Phi) + (\chi)] - [\Phi + \chi].$$

Procédons maintenant à la construction mécanique du monde, eu tant qu'elle dépend de l'influence des forces techniques $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{V}$, et qu'elle constitue ainsi, par la périodicité de tous les mouvements des astres, une permanente stabilité ou un continuel équilibre des corps célestes. — Et voici d'abord, pour l'entente de ces lois supérieures du monde physique, ce que nous en disons, dans la *Reforme de la Mécanique céleste*, pour servir d'introduction à l'accomplissement de ces lois techniques ou supérieures.

Nous devons, en faveur des mathématiciens-philosophes, dire ici quelques mots pour expliquer pourquoi nous nommons *lois techniques* celles des lois astronomiques qui président au mouvement des astres dans un système entier, et *lois théoriques*, celles de ces lois qui ne président qu'au mouvement relatif

de deux astres, formant des équilibres élémentaires dans le système entier. — Pour le faire, nous devons d'abord renvoyer le lecteur à ce que nous avons dit, dans les *Prolegomènes du Messianisme* (pages 208 à 236), sur les caractères et sur les parties constitutives de la loi de création, par laquelle s'établissent ainsi, d'abord, les lois théoriques ou *autothétiques* qui président à ce qui est donné dans tout système de réalités, et ensuite, les lois techniques ou *autogéniques* qui président à ce qu'il faut faire ou ce qu'il a fallu faire pour accomplir ce système de réalités. Mais, pour la parfaite intelligence de cette haute distinction dans la création des réalités, il faut remonter jusqu'aux deux sources primitives desquelles découlent respectivement, d'une part, l'*AUTOTHÉSIS* dans la création, qui est l'objet des *lois théoriques*, et de l'autre part, l'*AUTOGENESIS* dans la création, qui est l'objet des *lois techniques*. Et, pour cela, nous devons, de plus, renvoyer le lecteur à ce que, dans les mêmes *Prolegomènes du Messianisme* (pages 546 à 556), nous avons dit concernant les deux éléments de l'essence intime de ce qui, sous le nom d'*ARCHI-ABSOLU* ou d'*INFINICIEL*, constitue le principe premier de la philosophie-absolue formant le Messianisme. Le lecteur comprendra alors que, pour atteindre le mieux possible aux destinées finales de la création de l'Univers, les corps célestes, pris deux à deux, tels que leur équilibre s'établit immédiatement par un simple *LOGOS*, c'est-à-dire, par une simple connexion de principes et de conséquences, durent être constitués en système, par une véritable *SYNTHÉTICITÉ*, c'est-à-dire, par la seule vue du BUT FINAL, de manière à conserver entre eux, dans ce système total, un équilibre permanent. Et il saura alors pourquoi, suivant cette haute distinction, nous nommons *lois théoriques*, c'est-à-dire, lois créées, celles qui président à l'équilibre *AUTOTHÉTIQUE* de deux corps célestes, et *lois techniques*, c'est-à-dire, lois créatrices, celles qui président à l'équilibre *AUTOGÉNIQUE* d'un nombre quelconque de corps célestes, en tant qu'ils sont constitués en un système organique. — Bien plus, cette déduction des noms, en faisant remonter le lecteur jusqu'aux deux principes absolus de la création, tels qu'ils sont signalés dans les *Prolegomènes du Messianisme*, l'éclairera maintenant sur le caractère distinctif de la loi (38), que, dans ce même ouvrage, nous avons découverte, comme étant, au milieu des actions perturbatrices provenant des autres corps, le *PRODUIT MODÉRATEUR* entre les deux éléments fondamentaux et hétérogènes de chaque orbite, c'est-à-dire, entre le paramètre p , comme *espace* (élément-être), et la vitesse moyenne w , comme *temps* (élément-savoir); produit-modérateur qui, par sa condition (59), fixe les limites aux écarts de ces deux éléments fondamentaux p et w , et introduit ainsi, dans tous les éléments de l'orbite, qui tous en dépendent, une simple *OSCILLATION PÉRIODIQUE*, laquelle précisément constitue, dans un système d'un nombre quelconque de corps célestes, cet *ÉQUILIBRE DE SECOND ORDRE* qui, par son susdit principe autogénique, établit la permanence de ce système de corps

célestes, et qui, par conséquent, se trouve régi par les lois techniques que nous avons dévoilées dans les *Prolégomènes du Messianisme*, sous les marques (46) à (82), et dont nous allons ici préciser mieux la haute signification.

Pour cela, en supposant toujours que le lecteur a sous les yeux les *Prolégomènes du Messianisme*, remontons à nos trois lois primitives (i), (ii), (iii), telles qu'elles sont données par les expressions (16), (8), (13), savoir

$$\begin{aligned} 0 &= v - w \cdot \sqrt{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cdot \cos \varphi}, \\ 0 &= r \cdot (1 - \zeta \cdot \cos \varphi) - p, \\ 0 &= dx - \frac{r \cdot d\varphi}{w \cdot (1 - \zeta \cdot \cos \varphi)}; \end{aligned}$$

en ne perdant pas de vue que l'anomalie-vraie φ est toujours donnée par l'expression (46), savoir . . . (116)

$$\varphi = \Phi - \alpha.$$

Et observant que, par nos diverses expressions, on a les valeurs . . . (117)

$$\begin{aligned} w^3 &= \frac{\mathfrak{D}}{p} = \frac{\mathfrak{D}}{b \cdot (1 - \zeta^2)}, & \frac{r \cdot d\varphi}{dr} &= \tan \varpi, \\ \frac{dx}{dr} &= \frac{1}{(v1)} = -\frac{1}{\zeta w \cdot \sin \varphi}; \end{aligned}$$

on verra que les trois lois primitives (115) prennent la forme . . . (118)

$$\begin{aligned} 0 &= b w^3 \cdot (1 - \zeta^2) - \mathfrak{D} \cdot (1 + \zeta^2 - 2\zeta \cdot \cos \varphi), \\ 0 &= r \cdot (1 - \zeta \cdot \cos \varphi) - b \cdot (1 - \zeta^2), \\ 0 &= 1 - \zeta \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi \cdot \tan \varpi); \end{aligned}$$

dans laquelle, par suite de la détermination (116), entrent les trois éléments constants b , α , ζ , de l'orbite de deux astres A et B, et les quatre éléments variables Φ , r , ϖ , v de cette orbite, ainsi que la somme $\mathfrak{D}$ des masses de ces astres.

Or, parmi ces huit quantités, qui entrent, comme éléments, dans ces trois lois fondamentales (118) de l'équilibre des deux corps célestes A et B, les cinq dernières, savoir, Φ , r , ϖ , v , et $\mathfrak{D}$, forment des quantités en quelque sorte *matérielles*, et les trois premières, savoir, b , α , ζ , ne sont que des quantités *intellectuelles*. Et l'on conçoit conséquemment que de l'altération que peuvent recevoir, par une cause physique quelconque, les cinq quantités matérielles, il en résultera nécessairement, en vertu de leurs liaisons fondamentales (118), une altération correspondante des trois quantités intellectuelles. Toutefois, comme cela est notoire, les variations continues des quatre premières quantités matérielles, savoir, des quantités Φ , r , ϖ , v , telles que ces variations ont lieu

par suite des causes inhérentes aux deux corps A et B eux-mêmes, ne produisant aucune variation dans les trois quantités intellectuelles b , a , ζ ; car, ce sont précisément les variations des quatre quantités Φ , r , ω , v , qui, par le moyen des quatre quantités constantes b , a , ζ , Ω , se trouvent déterminées par les trois équations fondamentales (118). En effet, pour une valeur quelconque de la quantité angulaire Φ , la première de ces équations détermine la quantité variable v ; la seconde, la quantité variable r ; et la troisième de ces équations, la quantité variable ω . Mais, parmi ces quatre quantités variables, la première est seule absolument arbitraire; les trois autres se trouvent ainsi déterminées constamment par cette quantité angulaire Φ , et elles ne sauraient conséquemment, en dehors de ces limites de leurs déterminations respectives, recevoir des valeurs arbitraires, parce qu'alors les équations (118), en outre qu'elles pourraient donner des valeurs différentes pour la quantité Φ , donneraient de plus des valeurs impossibles, en conduisant à des sinus et cosinus plus grands que l'unité. — Mais, en dehors de ces variations régulières des quatre quantités Φ , r , ω , v , variations qui, en formant ainsi l'orbite des deux astres A et B, fixent précisément, par ce mouvement continu et régulier, l'équilibre mécanique de ces astres, on peut concevoir des variations irrégulières, c'est-à-dire, des altérations de ces quatre quantités matérielles Φ , r , ω , v , provenant de causes étrangères à celles qui sont inhérentes aux deux astres A et B eux-mêmes. Et cette altération étrangère des quantités variables Φ , r , ω , v , produira nécessairement, en vertu des équations fondamentales (118), une altération correspondante dans les trois quantités constantes b , a , ζ .

Pour déterminer ces altérations réciproques, il suffit de remarquer que, pour ce qui concerne la quantité angulaire Φ , son altération, quelles qu'en soient les causes, ne peut provenir que des altérations préalables des trois autres quantités matérielles r , ω , v , de celles précisément qui, en vertu des trois équations (118), sont des fonctions distinctes de cette quantité angulaire Φ , formant leur variable indépendante. On pourra alors, ou plutôt on devra, pour faire abstraction des susdites variations régulières des quatre quantités Φ , r , ω , v , lorsqu'il s'agit maintenant des altérations étrangères de ces quantités, considérer provisoirement comme constante la quantité angulaire Φ , tout comme l'est la somme des masses Ω , et déterminer alors la relation entre les altérations de toutes les autres quantités, en prenant leurs variations par les équations fondamentales (118), dans lesquelles on considérera ainsi comme constantes les deux quantités Ω et Φ .

Ces variations des équations (118), en les résolvant immédiatement, donneront, pour les variations des trois quantités constantes b , a , ζ , les déterminations . . . (119)

$$\begin{aligned}\delta b &= + \frac{2v\delta^3}{\Omega} \cdot \delta v + \frac{2b^3}{r^3} \cdot \delta r, \\ \delta \zeta &= + \frac{2 \cdot (\zeta - \cos \varphi)}{v} \cdot \delta v + \frac{(\zeta - \cos \varphi)}{r} \cdot \delta r + \frac{r \cdot \sin \varphi}{b} \cdot \delta \omega, \\ \delta x &= - \frac{2 \cdot \sin \varphi}{\zeta v} \cdot \delta v - \frac{\sin \varphi}{\zeta r} \cdot \delta r + \frac{2\zeta b - r \cdot \cos \varphi}{\zeta b} \cdot \delta \omega;\end{aligned}$$

la quantité φ étant toujours donnée par l'expression (116).

Il ne reste donc qu'à connaître les variations δv , δr , $\delta \omega$, que peuvent subir les trois quantités matérielles v , r , ω , par des causes étrangères à l'équilibre ou au mouvement relatif des deux astres A et B dans leur orbite. — Or, quelle que soit la nature de ces causes étrangères, on conçoit que, pour saisir et préciser leur influence sur la variation en question des trois quantités matérielles v , r , ω , il faut les fixer dans la direction des causes intimes ou inhérentes aux deux astres A et B, de ces causes qui produisent le mouvement relatif de ces astres, formant leur orbite. Et ces causes intimes sont notoirement la *force centripète* et la *force centrifuge* de ces deux astres A et B; comme cela résulte, d'ailleurs, immédiatement de notre nouveau principe de la mécanique céleste, de celui qui, dans les *Prologomènes du Messianisme* (page 255), sous la marque (1), constitue la loi suprême de tout le système des réalités qui font l'objet de la mécanique céleste. Il faut donc, pour centraliser leur influence, fixer l'action des causes étrangères dont il est question, dans la double direction, savoir, 1°. dans la direction du rayon vecteur r , où s'exerce la susdite force centripète, et 2°. dans la direction perpendiculaire à ce rayon vecteur, où s'exerce la susdite force centrifuge, en appliquant naturellement cette double action perturbatrice à l'astre B qui se meut dans l'orbite relative des deux astres A et B.

C'est ici le lieu de remarquer combien s'écartent de la vérité ces déterminations arbitraires de la direction des forces perturbatrices dont il est question, lorsque, en procédant par la simple analyse, on prend, pour cette direction, les trois coordonnées quelconques de l'espace, lesquelles n'ont manifestement rien de commun avec la nature du problème, si ce n'est qu'elles sont les conditions générales de l'espace dans-lequel a lieu le problème. C'est par de tels écarts qu'en se servant, à tous propos, d'une commode et grossière analyse, et en la considérant comme le triomphe et la gloire de la science, on est parvenu, dans ces derniers temps, surtout parmi les illustres académiciens de Paris, à dénaturer toutes les hautes questions de la physique, et plus spécialement la mécanique céleste. — Mais, laissons là ces prétentieuses erreurs, cette pompeuse analyse, par laquelle on a voulu masquer le défaut de la véritable science; et revenons à la vérité.

Quelles que soient les causes étrangères qui produisent les susdites altérations

δv , δr , $\delta \omega$, soit résistance du milieu, soit la forme des astres A et B, soit enfin l'attraction que d'autres corps célestes C, C', etc., exercent sur les astres A et B, attraction qui est proprement la cause principale de ces altérations, eu nous bornant ici à celles de ces causes qui agissent dans le plan de l'orbite des astres A et B, décomposons-les, d'après notre principe susdit, dans la direction du rayon vecteur r , et dans la direction perpendiculaire à ce rayon vecteur; et, comme plus haut, désignons la force motrice de la première par $\mathfrak{z}$, et celle de la seconde par γ . — Il s'agit donc de déterminer les trois altérations δv , δr , $\delta \omega$, par l'action des deux forces $\mathfrak{z}$ et γ , durant la variation indéfiniment petite dx du temps x . Mais, pour rentrer dans la question, n'ayant plus à tenir compte des variations simultanées d'autres quantités, considérons immédiatement les présentes variations δv , δr , $\delta \omega$, comme de simples différentielles, savoir . . . (120)

$$\delta v = dv, \quad \delta r = dr, \quad \delta \omega = d\omega, \quad \text{et} \quad \delta x = dx.$$

Or, en appliquant ici notre nouveau principe de la mécanique céleste, la susdite loi suprême (i), on trouvera facilement, comme on le verra dans notre Réforme de la Mécanique céleste, les déterminations des différentielles dont il est question, savoir . . . (121)

$$dv = + \left\{ \mathfrak{z} \cos \omega + \gamma \sin \omega \right\} . dx,$$

$$dr = 0,$$

$$d\omega = - \frac{1}{v} \left\{ \mathfrak{z} \sin \omega - \gamma \cos \omega \right\} . dx.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions (119) des altérations δb , $\delta \zeta$, $\delta \alpha$, que nous pouvons maintenant considérer également comme des différentielles, correspondant à la variation différentielle dx du temps x , nous obtenons, pour les trois quantités intellectuelles b , ζ , α , les déterminations rigoureusement exactes . . . (122)

$$b = (b) + \int \left\{ \frac{2v\delta^2}{\mathfrak{z}} \cdot [\mathfrak{z} \cos \omega + \gamma \sin \omega] . dx \right\},$$

$$\zeta = (\zeta) + \int \left\{ + 2b \cdot [\zeta - \cos(\Phi - \alpha)] \cdot [\mathfrak{z} \cos \omega + \gamma \sin \omega] \right. \\ \left. - r \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot [\mathfrak{z} \sin \omega - \gamma \cos \omega] \right\} \cdot \frac{dx}{bv},$$

$$\alpha = (\alpha) - \int \left\{ + 2b \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot [\mathfrak{z} \cos \omega + \gamma \sin \omega] \right. \\ \left. + [\mathfrak{z}^2 b - r \cdot \cos(\Phi - \alpha)] \cdot [\mathfrak{z} \sin \omega - \gamma \cos \omega] \right\} \cdot \frac{dx}{\zeta \delta v};$$

en désignant respectivement par (b) , (ζ) , (α) , les constantes de ces intégrales, déterminées pour le temps $[x]$, c'est-à-dire, pour l'époque à laquelle les quantités b , ζ , α , données par l'observation, sont $[b]$, $[\zeta]$, $[\alpha]$.

Quant à la quatrième quantité matérielle Φ , dont la variation, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, résulte de la variation des trois autres quan-

tités matérielles v , r , ω , nous aurons ici immédiatement, en vertu de la loi suprême (65) de la mécanique céleste, et de sa loi téléologique (33), la détermination . . . (123)

$$\Phi = (\Phi) + \int \left| \frac{p\omega \cdot dx}{r^2} \right| = (\Phi) + \sqrt{B} \cdot \int \left| \frac{\sqrt{p} \cdot dx}{r^2} \right|;$$

c'est-à-dire, par suite de l'expression (11) du demi-paramètre p , la détermination . . . (124)

$$\Phi = (\Phi) + \sqrt{B} \cdot \int \left| \frac{\sqrt{b \cdot (1 - \zeta^2)} \cdot dx}{r^2} \right|;$$

en désignant de même par (Φ) la constante de cette intégrale, déterminée pour la susdite époque $[x]$, à laquelle la quantité Φ , donnée par l'observation, est (Φ) . — Il est sans doute superflu de faire remarquer que, dans cette expression (124) du mouvement angulaire Φ de l'astre B autour de l'astre A, non-seulement le rayon vecteur r , duquel dépend originairement ce mouvement d'abord régulier, mais aussi les quantités b et ζ , telles qu'elles sont données par les deux premières des expressions (122), sont toutes des quantités variables.

Nous avons donc maintenant, dans les présentes expressions (122) et (124), en y joignant les trois lois (118) ou (115), les déterminations rigoureusement exactes des lois fondamentales qui président au mouvement relatif de deux astres A et B, soumis à des perturbations quelconques qu'ils peuvent subir dans le plan de leur orbite. — Il ne nous reste donc qu'à connaître également les lois qui président au mouvement de ce plan de l'orbite, par suite des perturbations que les deux astres A et B peuvent subir en outre dans des directions perpendiculaires à ce même plan de l'orbite; perturbations dont nous désignons, comme plus haut, par χ la force motrice, telle que, par la différence de ces actions, elle s'exerce relativement sur l'astre B.

Or, ces dernières lois, qui doivent ainsi fixer l'inclinaison variable χ de l'orbite, son lieu du nœud ψ , également variable, et la position variable de la ligne fixe χ de cette orbite, à laquelle ligne se rapportent les susdits mouvements angulaires Φ et α , ces dernières lois fondamentales, disons-nous, qui régissent ainsi le mouvement de l'orbite des deux astres A et B, se trouvent déjà données complètement, sous la marque (70), dans les *Prolégomènes* du *Messianisme* (page 291), où elles sont également déduites, à la marque (69), de notre nouveau principe (1) de la mécanique céleste, par suite duquel ce mouvement du plan de l'orbite s'opère, à chaque instant dx , par une simple rotation $d\psi$ autour du rayon vecteur r . Et ces lois (70), qui forment notre *Canon astronomique*, en tant qu'elles introduisent l'*UNIFORMITÉ* dans les divers plans du mouvement des astres, sont, de même que les lois présentes (122) et (124), rigoureusement exactes; pourvu que, lorsqu'il s'agit de cette exactitude rigoureuse, on y substitue la vitesse vraie v à la place de la vitesse

moyenne ω , parce que, dans cette rotation continue du plan de l'orbite autour de son rayon vecteur, la vitesse v du mouvement de l'astre B dans l'orbite ne change pas, et que c'est uniquement pour simplifier ces expressions (70) que nous y avons mis la vitesse moyenne ω à la place de la vitesse vraie u . — Pour compléter ce canon astronomique (70), qui donne séparément les déterminations des trois susdites quantités η , ψ , χ , nous joindrons ici la détermination pareille de la différence $(\chi - \psi)$ des deux dernières de ces quantités, qui détermine la distance au nœud ψ de la ligne fixe χ de l'orbite, et qui devient ainsi très-importante dans les calculs, surtout dans les intégrations de ces lois (70). La voici . . . (125)

$$\chi - \psi = - \int \left\{ \sin[(\chi - \psi) + \Phi] \cdot \frac{h \cdot dx}{\omega \cdot \tan \eta} \right\};$$

où il faudra de même substituer la vitesse vraie v à la place de la vitesse moyenne ω , lorsqu'il s'agira d'exactitude rigoureuse. — Il est inutile de dire que, de même que pour les intégrales (122) et (124), il faut ajouter aux intégrales (70) et (125) leurs constantes respectives (η) , (ψ) , (χ) , et $(\psi - \chi)$, déterminées toujours pour la susdite époque $[x]$, à laquelle ces quantités, données par l'observation, sont $[\eta]$, $[\psi]$, $[\chi]$, et $[\psi - \chi]$.

Or, en réunissant les présentes lois (122) et (124), qui régissent les mouvements dans le plan de l'orbite, et les lois (70) et (125), qui forment le canon astronomique, et qui, comme telles, régissent les mouvements du plan même de l'orbite, et en y joignant, d'une part, les trois lois (118) ou (115), ainsi que leurs corollaires, que nous en avons déduits dans les *Prolegomènes* du *Messianisme*, et de l'autre part, les expressions générales (111) et (113) des trois forces perturbatrices $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{L}$, que nous avons données dans l'ouvrage présent, on aura manifestement l'ensemble complet des lois fondamentales qui constituent la mécanique céleste, et par conséquent les moyens pour la solution de ses problèmes principaux, spécialement pour la solution du fameux problème des trois corps. Bien plus, cette grande et si difficile solution du problème des trois corps se trouve ici donnée immédiatement, et avec une exactitude rigoureuse, par ces lois mêmes que nous venons de rappeler, et qui régissent, dans toutes leurs circonstances, tous les mouvements des astres. Il ne manque actuellement, pour l'accomplissement final de ces lois et de ces solutions qui en dérivent, rien autre que l'exécution des intégrales qui entrent dans leurs expressions rigoureuses; et les méthodes algorithmiques, celles qui constituent nos méthodes absolues, telles que nous venons de les donner dans l'ouvrage présent, servent à opérer ces intégrations par des procédés en quelque sorte purement mécaniques, comme nous en verrons ci-après un exemple décisif dans la théorie lunaire que, sur la demande du Parlement britannique, nous avons eu le malheur de porter en Angleterre.

Mais, ces lois (122) et (124), que nous venons de découvrir pour le sys-

tème du monde, ne sont proprement que les LOIS DU DÉSORDRE, si tant est que le désordre puisse avoir des lois. En effet, les causes ou forces $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{I}$, de la manière dont elles y agissent, n'opèrent proprement qu'une altération continue (122) des éléments intellectuels b , ζ , α , de l'orbite des astres A et B; et les mouvements matériels ou réels Φ et r dans cette orbite, n'ont ainsi lieu, en vertu de leurs déterminations respectives (124) et (118), que par suite de la variation continue de ces éléments intellectuels b , ζ , α . — Aussi, ne peut-il en résulter, dans ces mouvements réels Φ et r , AUCUN ORDRE apparent, par la raison qu'ils proviennent uniquement du désordre, c'est-à-dire, du dérangement continu de l'orbite. Nous disons aucun ordre *apparent*, puisqu'il n'existe ainsi aucun principe manifeste de l'ordre, quoiqu'on soit forcé de postuler ici l'existence d'un ordre quelconque dans les mouvements Φ et r , parce que, sans cela, le système du monde physique ne saurait subsister. Et en effet, on a aperçu, dans ces mouvements réels, quelque périodicité, c'est-à-dire, quelque ordre véritable; mais, dans l'état où se trouve la science, on ne pouvait logiquement attribuer cet ordre à rien autre qu'à un simple hasard. — A la vérité, dans les dernières tentatives de la mécanique céleste, on a voulu attribuer cet ordre à une prétendue invariabilité du grand-axe $2b$ des orbites des astres; mais, comme nous pouvons maintenant le prouver rigoureusement, c'est là une grossière erreur.

En effet, par la première de nos présentes expressions (122), nous avons maintenant la détermination rigoureusement exacte de ce grand-axe $2b$; et nous pouvons y reconnaître facilement que cet élément des orbites des astres n'est nullement invariable. — Il suffit, pour cela, de prendre d'abord la différentielle de cette première des expressions (122), en la mettant sous la forme . . . (126) :

$$\frac{db}{b^2} = \frac{2v}{\mathfrak{A}} [\mathfrak{A} \cos \varpi + \mathfrak{I} \sin \varpi] . dx,$$

et de prendre ensuite l'intégrale de cette expression, en déterminant la constante de cette intégration, de manière à ce qu'elle donne, pour le grand-axe $2b$, sa valeur moyenne $2.[b]$, correspondant à l'époque où les forces motrices $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{I}$ sont zéro. On obtiendra ainsi, pour ce grand-axe $2b$, la détermination générale et rigoureusement exacte . . . (127)

$$2b = \frac{2 \cdot \mathfrak{A} \cdot [b]}{\mathfrak{A} - 2 \cdot [b] \cdot \int v \cdot [\mathfrak{A} \cos \varpi + \mathfrak{I} \sin \varpi] . dx};$$

détermination qui n'est nullement invariable, même dans le cas où l'excentricité ζ des orbites serait une très-petite quantité. — Pour s'en convaincre, en ne perdant pas de vue l'expression (46) ou (116) de l'anomalie-vraie φ , observons que la combinaison du principe de transition (20) avec la loi (8), donne, pour (18).

cal

RÉFORME DES

l'angle ϖ , la détermination . . . (128)

$$\tan \varpi = - \frac{P}{\zeta r \sin(\Phi - \alpha)} ;$$

d'où l'on tire . . . (129)

$$\sin \varpi = + \frac{P}{\sqrt{p^2 + \zeta^2 r^2 \sin^2(\Phi - \alpha)}} ,$$

$$\cos \varpi = - \frac{\zeta r \sin(\Phi - \alpha)}{\sqrt{p^2 + \zeta^2 r^2 \sin^2(\Phi - \alpha)}} .$$

Et avec cette valeur de $\sin \varpi$, la voie de transition (22) nous conduira, pour la détermination de la vitesse v , à l'expression . . . (130)

$$v = w \sqrt{\zeta^2 + \zeta^2 \sin^2(\Phi - \alpha)} ;$$

en désignant toujours par ζ , d'après notre centre d'oscillation (55), le rapport entre le paramètre p , fixant l'espace, et le rayon vecteur r , dépendant du temps. — Et pour vérification, si l'on compare cette expression (130) de la vitesse v avec son expression fondamentale (16), on trouve . . . (131)

$$\zeta = 1 - \zeta \cos(\Phi - \alpha) = \frac{P}{r} ,$$

comme cela doit être. — Or, pour nous convaincre que la détermination exacte (127) du grand-axe $2b$ des orbites n'est pas invariable, lors même que l'excentricité ζ serait une très-petite quantité, et que, suivant la façon de mutilation des formules, introduite par Laplace dans la mécanique céleste, on négligerait les termes affectés de puissances supérieures de cette excentricité ζ , observons que lorsqu'on négligerait ainsi, dans les présentes expressions (129) et (130), les termes affectés de la seconde puissance de ζ , ces expressions deviendraient . . . (132)

$$\sin \varpi = 1, \quad \cos \varpi = - \frac{\zeta}{\zeta} \sin(\Phi - \alpha), \quad \text{et} \quad v = w \zeta .$$

Et substituant alors ces valeurs mutilées dans la formule (127), on obtiendrait, pour la détermination pareille du grand-axe $2b$, l'expression . . . (133)

$$2b = \frac{2\Omega \cdot [\delta]}{\Omega - 2 \cdot [\delta] \cdot \int \left\{ w \cdot [\delta - \zeta \sin(\Phi - \alpha) \cdot \Omega] \cdot dx \right\}} ;$$

où l'on voit que, quoiqu'elle soit mutilée ainsi à la façon de Laplace, cette expression ne cesse pas d'être variable, par l'influence des forces révoies γ et Ω , surtout de la dernière Ω , qui n'est guère périodique. — Il est vrai que cette influence est peu sensible dans notre système solaire, où, d'après nos expressions (113), ces forces perturbatrices γ et Ω ont, pour facteur constant, la masse (Ω) des corps perturbants; masse qui, à côté de la somme Ω des

masses centrales, est une petite quantité, et nù, de plus, à l'exception des orbites des comètes, l'excentricité ζ est également une petite quantité. Mais, lorsqu'il s'agit du principe du grand-axe, c'est-à-dire, de la raisonnable des mouvements dans le système du monde, la plus ou moins grande variation permanente est également contraire à l'établissement d'un tel principe. — Seulement, dans le cas où l'excentricité ζ serait tout à fait zéro, supposition qui, d'ailleurs, ne serait qu'instantanée, et qui ne saurait conséquemment subsister à côté de variations, même périodiques, seulement dans ce cas où $\zeta = 0$, l'expression (133), qui deviendrait alors . . . (134)

$$2b = \frac{2\Omega \cdot \delta}{\Omega - 2 \cdot \delta \cdot \int \sqrt{6 \cdot \gamma \cdot dx}},$$

pourrait être considérée comme invariable, parce que, d'après son expression (113), la force perturbatrice γ est généralement et réellement périodique. Mais, comme nous venons de le remarquer, cette supposition de $\zeta = 0$ est ici absolument inadmissible.

Nous reconnaissons ainsi, comme une vérité infaillible, que, lors même que l'excentricité ζ serait une petite quantité, et que le rapport des susdites masses (12) et Ω formerait également une petite quantité, on ne saurait considérer le grand-axe $2b$ des orbites comme invariable, et surtout on ne saurait considérer cette prétendue invariabilité (134) comme le principe de la limitation des écarts dans les mouvements des astres, et par conséquent comme le principe de la périodicité de ces mouvements. — Cette erreur de Laplace est d'autant plus grave qu'il l'a fait partager à presque tous les géomètres, depuis les plus grands, comme Lagrange, jusqu'aux plus petits, comme Poisson. Mais, le vice principal de cette erreur de Laplace, vice purement logique, qui la rend en quelque sorte grossière, c'est qu'en outre elle est fondée sur un principe évidemment faux. En effet, cette erreur repose manifestement sur le principe que, dans un système de corps célestes, tel que l'est notre système solaire, l'excentricité ζ des orbites demeurera toujours une très-petite quantité, c'est-à-dire, car c'est la même chose, sur le principe que cette excentricité ζ est invariable. Mais alors, si cette supposition était vraie, ce serait cette invariabilité des excentricités ζ qui serait le principe de l'invariabilité du grand-axe $2b$ des orbites, et par conséquent le principe premier de la stabilité de tout le système, de cette stabilité que Laplace veut faire dériver de l'invariabilité du grand-axe $2b$ des orbites; car, comme nous venons de le voir fort en détail, notre expression générale et rigoureusement exacte (127) du grand-axe $2b$ des orbites, ne peut se réduire successivement aux expressions (133) et (134), et ne peut ainsi faire illusion sur l'invariabilité de cette quantité $2b$, par rien autre que par la supposition première et fondamentale que l'excentricité ζ demeurera toujours très-petite, c'est-à-dire, ce qui est la même chose, que cette

excentricité ζ est invariable. Ce serait donc déjà, dans l'erreur de Laplace, un grossier vice logique de prendre ainsi la conséquence d'un principe manifeste pour le principe lui-même. Mais, ce qui est pis encore, s'il peut y avoir quelque chose de pis dans un raisonnement scientifique, c'est que cette supposition de l'invariabilité de l'excentricité ζ , supposition qui, comme nous venons de le remarquer, est parfaitement identique avec la supposition que l'excentricité ζ demeurera toujours une très-petite quantité, est tout à fait mal fondée. En effet, la simple inspection de la seconde de nos présentes expressions rigoureusement exactes (132), de celle qui donne la détermination de l'excentricité ζ dont il est question, savoir . . . (135)

$$\zeta = (\zeta) + \int \left\{ \begin{aligned} &+ 2b \cdot [\zeta - \cos(\Phi - \pi)] \cdot [2 \cdot \cos \varpi + 7 \cdot \sin \varpi] \\ &- r \cdot \sin(\Phi - \pi) \cdot [2 \cdot \sin \varpi - 7 \cdot \cos \varpi] \end{aligned} \right\} \cdot \frac{dx}{bv},$$

suffit pour reconnaître que cette quantité ζ n'est pas invariable, et par conséquent, qu'elle pourra ne pas demeurer toujours une petite quantité. A la vérité, cette expression de l'excentricité ζ implique, comme la susdite expression (137) du grand-axe $2b$, le même facteur de variabilité . . . (136)

$$[2 \cdot \cos \varpi + 7 \cdot \sin \varpi],$$

qui, lorsque l'excentricité ζ est encore une très-petite quantité, se réduit, comme nous venons de le voir, à son deuxième terme, à cause de la très-petite valeur (132) de $\cos \varpi$; de sorte que, par suite de ce facteur insensiblé (136), l'excentricité ζ et le grand-axe $2b$ se trouveraient simultanément invariables. Mais, la présente expression générale (135) de l'excentricité ζ implique, de plus, et à elle seule, un deuxième facteur de variabilité . . . (137)

$$[2 \cdot \sin \varpi - 7 \cdot \cos \varpi],$$

dans lequel, lors même que l'excentricité ζ est encore une très-petite quantité, le premier terme, dépendant de la force perturbatrice 2 , ne disparaît nullement, à cause de la susdite valeur (132) de $\sin \varpi$; et cette force 2 , qui est à priori indéterminée, peut, conjointement avec le rayon vecteur r , augmenter assez pour changer la valeur de ζ et la faire cesser d'être une très-petite quantité. On ne saurait donc pas admettre à priori que, dans un système de corps célestes, où les excentricités ζ des orbites sont très-petites à une époque donnée, ces excentricités demeureront toujours de très-petites quantités, comme le suppose le prétendu principe de Laplace. Et alors, en faisant même grâce à cet illustre académicien de Paris de ce que, par une véritable subreption logique, il prend la conséquence pour le principe, comme nous venons de le faire remarquer, sa supposition implicite de ce que les excentricités ζ sont toujours de très-petites quantités, supposition sur laquelle, en prenant ainsi la conséquence pour le principe, il fonde son erreur principale, celle de ce que

l'invariabilité du grand-axe des orbites est le principe de la stabilité d'un système de corps célestes, cette supposition, disons-nous, est fautive en elle-même, ou du moins n'est pas admissible à priori.

Ainsi, il n'existe, jusqu'à ce jour, dans la science de la mécanique céleste, aucun principe connu de la stabilité du système du monde, c'est-à-dire, de la périodicité dans les mouvements des astres, qui puisse fixer entre eux un équilibre permanent. Et l'on conçoit facilement que, lorsqu'on envisage la mécanique céleste sous le point de vue pour lequel nous venons d'assigner définitivement les lois rigoureusement exactes (122) et (124), sous ce point de vue de perturbation qui est celui de la science actuelle, on ne saurait, dans toute son étendue, et dans sa dernière perfection, arriver à rien de plus qu'à ces lois précisément (122) et (124), qui, comme nous les avons déjà caractérisées plus haut, ne sont proprement que les LOIS DU DÉSORDRE dans le système du monde, par les raisons que nous y avons alléguées, notamment par la raison principale que les actions des causes étrangères Σ et Υ n'y sont considérées que dans leur altération ou dérangement continu des éléments intellectuels h, ζ, α , des orbites des astres. Ces causes ne sont alors, sous un tel point de vue, rien autre que de véritables CAUSES PERTURBATRICES; et les géomètres, sans s'apercevoir du non-sens dans une doctrine du désordre du monde, ont raison d'appeler leur mécanique céleste la SCIENCE DES PERTURBATIONS. Telle est effectivement la science que Laplace a résumée, et, comme le disaient les académiciens de Paris, perfectionnée dans son artificielle *Mécanique céleste*.

Il faut donc quitter enfin ce faux point de vue de perturbations ou de désordre dans le monde; et il faut nous élever aujourd'hui au vrai point de vue de la mécanique céleste, à celui de la FINALITÉ (Zweckmässigkeit) ou du concours TÉLÉOLOGIQUE de toutes les causes mécaniques qui agissent dans les cieux, c'est-à-dire, au point de vue de l'ORDRE dans le système du monde, en vue de son *ÉTAT FINAL*, consistant dans la conservation de sa stabilité permanente, notamment d'un équilibre absolu dans les mouvements des astres. — Et c'est là la première partie de notre réforme de la mécanique céleste, cette première partie que nous avons signalée dans les *Prolegomènes du Messianisme*, et dont nous allons rapidement fixer ici les principes, autant que, par anticipation sur nos ouvrages ultérieurs, nous pourrions le faire dans l'ouvrage présent.

Or, suivant ce principe téléologique, qui est ici une nécessité logique, d'une part, subjectivement, pour la raison de l'homme, afin de pouvoir comprendre la stabilité du monde, et de l'autre part, objectivement, pour la réalité de l'univers, afin de pouvoir comprendre la rationalité dans la création, suivant ce principe supérieur et indispensable, on conçoit facilement que les prétendues forces perturbatrices Σ et Υ , qui, en apparence, dérangent l'équilibre mécanique de deux corps célestes A et B, doivent, en réalité, concourir directement à la conservation permanente de cet équilibre. Et alors, sous ce point

de vue de finalité, on conçoit sur-le-champ que la force Σ , qui agit sur le corps B, dans la direction de son rayon vecteur r , doit se joindre à la force centripète, et que la force Υ , qui agit sur ce corps B dans la direction perpendiculaire à son rayon vecteur r , doit, à son tour, se joindre à la force centrifuge, c'est-à-dire, à ces deux forces centrales qui sont inhérentes aux corps A et B, et dont la réaction égale constitue, dans le plan de leur orbite, l'équilibre dynamique de ces deux corps élémentaires A et B.

Bien plus, par cette réunion téléologique des forces étrangères Σ et Υ avec les forces centrales, centripète et centrifuge, qui sont inhérentes aux corps A et B, par cette réunion décisive qui réalise notre principe téléologique de la stabilité du monde, et qui, d'après ce que nous avons laissé entrevoir plus haut sur l'autogénie, dans la création, introduit ainsi la technique dans la mécanique céleste, comme complément de sa technique, qui, fondée sur la pure autothésie, se borne au simple équilibre dynamique de ces deux corps A et B; par cette décisive réunion téléologique, disons-nous, des forces étrangères Σ et Υ avec les forces centrales et propres aux corps A et B, il devient maintenant très-facile de calculer rigoureusement l'influence de ces forces étrangères Σ et Υ , et de résoudre ainsi tous les grands problèmes de la mécanique céleste, tous ces problèmes qui, sous le point de vue de désordre ou de pure théorie, où la science est restée jusqu'à ce jour, sont demeurés absolument insolubles. — Nous allons le prouver.

Dans la genèse absolue des lois astronomiques, telle que, suivant uniquement la loi de création, nous l'avons produite dans les Prolegomènes du Messianisme, en y déduisant ainsi, d'abord, toutes les principales lois théoriques, sous les marques (1) à (45), et ensuite, toutes les principales lois techniques, sous les marques (46) à (81), pour lesquelles dernières, qui n'y sont pas encore démontrées, nous allons précisément dévoiler les principes, dans cette absolue genèse astronomique, disons-nous, la force centripète qui, dans la théorique loi suprême (1), est désignée par G, se trouve déterminée sous la marque (32), savoir . . . (138)

$$-G.r^3 = p.u^3 = \Sigma.$$

Ainsi, en joignant à cette force centripète G, d'après notre actuel principe téléologique, la force étrangère Σ , quelle qu'en soit la cause, nous aurons, pour la détermination technique de la quantité $p.u^3$, l'expression . . . (139)

$$p.u^3 = -(G + \Sigma).r^3 = \Sigma - \Sigma.r^3;$$

la quantité Σ étant toujours la somme des masses des corps A et B. — De plus, dans la même genèse des lois astronomiques, nous avons trouvé, sous la marque (21), la détermination de la vitesse (v_2) de la force centrifuge, savoir . . . (140)

$$(v_2) = v \cdot \sin \varphi = w \cdot (1 - \zeta \cdot \cos \varphi).$$

Et alors, d'après notre actuel principe téléologique, en joignant à cette force centrifuge (v_2), la force étrangère γ , nous aurons manifestement, pour la variation de cette vitesse totale (v_2) de la force centrifuge, correspondant à la différentielle dx du temps x , l'expression très-simple . . . (141)

$$\delta(v_2) = \gamma \cdot dx;$$

qui donnera ainsi l'équation . . . (142)

$$\gamma \cdot dx = (1 - \zeta \cdot \cos \varphi) \cdot \delta v + w \cdot \delta(1 - \zeta \cdot \cos \varphi).$$

Mais, par suite de la loi théorique (12), nous avons, pour la vitesse (v_1) de la force centripète, l'expression . . . (143)

$$(v_1) = \frac{dr}{dx};$$

dont la variation, dépendant de la force étrangère ζ , et correspondant à la variation indéfiniment petite δx du temps x , sera manifestement . . . (144)

$$\delta(v_1) = \delta\left(\frac{dr}{dx}\right) = \frac{\delta dr}{dx} = (\delta \zeta) \cdot \delta x.$$

Considérant donc ces variations comme des différentielles, l'intégration de cette expression donnera, pour la variation δr du rayon vecteur, en tant qu'elle provient de l'influence de la nouvelle force centripète ζ , la détermination . . . (145)

$$\delta r = dx \cdot \int (\delta \zeta) \cdot \delta x = \left(\frac{1}{\infty}\right)' = 0.$$

C'est, au reste, la valeur que nous avons déjà trouvée dans la seconde des trois expressions (121), donnant cette même variation nulle du rayon vecteur r , par suite de l'influence de toutes les deux forces étrangères ζ et γ . Or, en tenant compte de cette nullité de la variation du rayon vecteur r , par l'influence des forces ζ et γ , nous obtiendrons, pour la variation correspondante de la loi (8) qui fixe l'orbite des astres A et B, la détermination . . . (146)

$$\delta(1 - \zeta \cdot \cos \varphi) = \frac{\delta p}{r};$$

laquelle, étant introduite dans l'équation (142), γ produira, conjointement avec la loi (8), l'équation différentielle. . . (147)

$$p \cdot dw + w \cdot dp = \gamma \cdot dx.$$

Nous obtiendrons donc, par l'intégration de cette équation, pour la détermination technique de la quantité pw , l'expression . . . (148)

$$pw = C + \int (\gamma \cdot dx);$$

dans laquelle la constante C , en la considérant comme correspondant à l'épo-
(19)

que $[x]$, où l'influence des forces téléologiques $\square$ et γ est zéro, reçoit, en vertu de l'expression théorique (33) de la vitesse moyenne w , la valeur : . . . (149)

$$C = \sqrt{|\square \cdot [p]|};$$

en désignant par $[p]$ le demi-paramètre p qui correspond à la susdite époque $[x]$, et autour duquel oscille conséquemment le demi-paramètre variable p .

Nous aurons donc, pour cette construction téléologique d'un système du monde, les deux lois universelles . . . (150)

$$p \cdot w^3 = \square - \gamma \cdot r^3,$$

$$pw = \sqrt{|\square \cdot [p]|} + \int (\gamma r \cdot dx);$$

desquelles on tire immédiatement, pour les orbites variables des astres, les déterminations techniques et rigoureusement exactes du demi-paramètre p et de la vitesse moyenne w , telles que nous les avons données, sous les marques (47) et (49), dans les *Protégomènes* du *Messianisme*. Et, d'après ce que nous y avons dit, ces deux expressions techniques (47) et (49) constituent, comme lois universelles, les accomplissements respectifs des deux lois théoriques (17) et (19), qui, dans cette genèse astronomique, forment les deux premiers éléments dérivés, les éléments *immédiats* ou *distincts* de tout système du monde. En effet, par suite de la voie théorique de transition (22), on a, pour la vitesse v , l'expression . . . (151)

$$v = \frac{pw}{r \cdot \sin \omega},$$

qui, en l'introduisant dans la loi théorique (17), donnera, pour le grand-axe $2b$, la détermination . . . (152)

$$2b = \frac{2 \cdot r^3}{2r - \frac{p}{\sin^3 \omega}};$$

dans laquelle le demi-paramètre p , tel qu'il est donné par son expression technique (47), servira ainsi d'accomplissement pour cette détermination, également technique, du grand-axe $2b$, lorsque le rayon vecteur r et l'angle ω de la direction du mouvement de l'astre B sont donnés. De même lorsque, en vertu de la dernière des expressions (44), jointe à l'expression (32) de la somme $\square$ des masses, on introduit, dans l'équation théorique (19), la vitesse moyenne w à la place de la quantité $\frac{p \cdot w^3}{nu}$, on tire de cette équation (19), pour la vitesse u de projection en aphélie, la détermination . . . (153)

$$u = -w \cdot \left(\frac{n}{r} - 1 \right) + \sqrt{\left| v^3 + w^3 \cdot \left(\frac{n}{r} - 1 \right)^3 \right|};$$

dans laquelle cette vitesse moyenne w , telle qu'elle est donnée par son expression technique (49), sert, à son tour, d'accomplissement pour cette détermi-

nation, également technique, de la vitesse u de la projection en aphélie, lorsque le rayon vecteur r et la vitesse actuelle v du mouvement de l'astre B sont donnés, en admettant, en outre, pour la distance n de l'aphélie, une excentricité ζ encore indéterminée, qui, avec la valeur précédente (152) du grand-axe $2b$, donnera cette distance n , savoir . . . (154)

$$n = b.(1 + \zeta).$$

Il est sans doute superflu de rappeler qu'ayant ainsi la vitesse moyenne w , par l'expression (49), et la vitesse u en aphélie, par la présente expression (153), on aura en même temps la détermination technique de la vitesse ($2w - u$) en périhélie.

Ainsi, lorsque les trois quantités réelles ou matérielles sont données, savoir, le rayon vecteur r , l'angle ϕ de la direction du mouvement de l'astre B, et la vitesse actuelle v de ce mouvement, les deux lois présentes (152) et (153), formant l'accomplissement technique des deux lois théoriques (17) et (19), par l'influence respective des expressions (47) et (49) du demi-paramètre p et de la vitesse moyenne w , donneront, pour l'orbite variable qui résulte du concours téléologique des forces étrangères Σ et γ , la détermination du grand-axe $2b$ de cette orbite, et de la vitesse u du mouvement dans son aphélie, de laquelle résulte immédiatement la vitesse ($2w - u$) du mouvement dans son périhélie. — Il ne reste d'indéterminée que l'excentricité ζ , qui, par l'expression (154), fixe la distance n de l'aphélie.

Toutefois, cette indétermination de l'excentricité ζ n'est ici qu'apparente; parce que le rayon vecteur r dans l'intégrale (148), qui entre dans les expressions techniques (47) et (49) de p et de w , implique déjà cette excentricité ζ , et même déjà la position α de la ligne des apsidés. — Il nous reste donc à déterminer, d'une manière également technique, mais indépendante, cette excentricité ζ et cette position α de la ligne des apsidés.

Or, dans notre genèse astronomique, telle qu'elle résulte de l'application immédiate de la LOI DE CRÉATION, d'après le prototype que nous en avons présenté au commencement de la deuxième partie de l'ouvrage présent, la détermination technique qu'il nous reste à donner des éléments ζ et α des orbites variables, appartient aux éléments que, dans cette loi de création, nous nommons *Instruments-Transitifs*, lesquels doivent opérer l'accomplissement technique des deux derniers éléments dérivés, des éléments *mediants* ou *transitifs*. — Nous allons effectivement, en suivant cette voie génétique, déterminer ainsi ces deux derniers éléments techniques ζ et α , qu'il nous reste à connaître. Et nous nous servirons, pour cela précisément, des expressions que, sous les marques (53) et (56), nous avons préparées à cette fin dans les *Prolegomènes du Messianisme*, en nous y réservant de produire, dans notre *Réforme de la Mécanique céleste*, ces derniers accomplissements techniques, que, par anticipation sur cette Réforme, nous allons ici produire actuellement.

(19).

La première (53) de ces expressions préparatoires donne, pour l'excentricité ζ , la détermination . . . (155)

$$\zeta^2 = 1 - 2\epsilon + \frac{\epsilon^2}{\sin^2 \varpi}.$$

Ainsi, en prenant sur cette égalité la variation provenant de l'influence de la seule force γ , car la force β ne saurait ici exercer aucune influence, nous aurons, pour des variations correspondant à la variation indéfiniment petite δx du temps x , l'équation . . . (156)

$$2\zeta \cdot \delta \zeta = -2\delta \epsilon + \frac{2\epsilon \cdot \delta \epsilon}{\sin^2 \varpi} - \frac{2\epsilon^2 \cdot \cos \varpi \cdot \delta \varpi}{\sin^3 \varpi}.$$

Or, en ne perdant pas de vue les variations (121) que causent les forces β et γ dans les éléments réels v , r , ϖ , nous aurons ici, en ne tenant compte que de la seule force γ , les variations suivantes . . . (157)

$$\delta \epsilon = \delta \left(\frac{p}{r} \right) = \frac{\delta p}{r}, \quad \text{et} \quad \delta \varpi = + \frac{\gamma \cdot \cos \varpi}{v} \cdot \delta x;$$

qui, étant introduites dans la présente équation (156), donneront, en changeant maintenant les variations en différentielles, l'équation différentielle . . . (158)

$$\zeta \cdot d\zeta = \frac{dp}{r \cdot \sin^2 \varpi} \cdot \left\{ \epsilon - \sin^2 \varpi \right\} - \frac{\epsilon^2 \cdot \cos \varpi \cdot \gamma \cdot dx}{v \cdot \sin^3 \varpi}.$$

De plus, par les relations présentes (148) ou (147), d'une part, et la relation antérieure (22), on a les valeurs . . . (159)

$$\gamma r \cdot dx = d(pv), \quad \text{et} \quad rv \cdot \sin \varpi = pv.$$

Donc, substituant ces valeurs dans l'équation (158), elle deviendra . . . (160)

$$\zeta \cdot d\zeta = \frac{\epsilon}{\sin^2 \varpi} \cdot \left\{ \epsilon - \sin^2 \varpi \right\} \cdot \frac{dp}{p} - \epsilon^2 \cdot \cot \varpi \cdot \frac{d(pv)}{pv}.$$

Et comme, en vertu des expressions (128) à (131), on a . . . (161)

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\sin^2 \varpi} \cdot \left\{ \epsilon - \sin^2 \varpi \right\} &= \zeta^2 \cdot \sin^2(\Phi - \alpha) - \zeta^2 \cdot \cos(\Phi - \alpha), \quad \text{et} \\ \epsilon^2 \cdot \cot \varpi &= \zeta^2 \cdot \sin^2(\Phi - \alpha); \end{aligned}$$

l'équation différentielle (160) se réduira à la forme très-simple . . . (162)

$$d\zeta = -\epsilon \cdot \cos(\Phi - \alpha) \cdot \frac{dp}{p} - \zeta \cdot \sin^2(\Phi - \alpha) \cdot \frac{dv}{v};$$

donc on pourra tirer immédiatement la détermination également simple de l'excentricité ζ , savoir . . . (163)

$$\zeta = (\zeta) - \int \left\{ \epsilon \cdot \cos(\Phi - \alpha) \cdot \frac{dp}{p} + \zeta \cdot \sin^2(\Phi - \alpha) \cdot \frac{dv}{v} \right\};$$

en désignant par $\{\zeta\}$ la constante de cette intégrale, correspondant à l'époque $\{x\}$, à laquelle l'excentricité ζ , donnée par l'observation, est $\{\zeta\}$.

Qu'on ne soit pas surpris de ce que, dans nos intégrales, nous laissons subsister les quantités inconnues qu'elles servent à déterminer, parce que, comme on doit l'avoir remarqué, l'application de notre méthode primordiale (729) et de nos facultés (915), qui est destinée à opérer ces intégrations, ne trouve aucun obstacle dans la présence des quantités inconnues que ces procédés absolus doivent déterminer. — Il est sans doute également inutile de faire remarquer que les différentielles dp et dv qui entrent ici dans nos expressions, doivent être prises par rapport au temps x , savoir . . . (164)

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right).dx, \quad dv = \left(\frac{dv}{dx}\right).dx, \quad \text{etc.}$$

Procédons maintenant à la détermination pareille de la position α de l'aphélie; et suivant la susdite genèse astronomique, employons pour cela la seconde (56) des deux expressions que, dans les Prologomènes du Messianisme, nous avons préparées à cette fin, savoir, l'expression . . . (165)

$$\frac{p}{r} = \zeta = 1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha).$$

En prenant donc également, sur cette égalité, par rapport à la variation indéfiniment petite δx du temps x , sa variation provenant de l'influence de la seule force γ , parce que la force Δ n'exerce ici plus aucune influence, et en considérant alors comme constante la quantité angulaire Φ , par la raison majeure qui nous a servi de principe pour les variations (119), c'est-à-dire, par la raison que, dans cette variation des orbites elles-mêmes, il faut faire abstraction du mouvement qui s'opère dans ces orbites, nous obtiendrons ici, en vertu des variations (131) que causent généralement les forces Δ et γ , l'équation variée . . . (166)

$$0 = \cos(\Phi - \alpha) \cdot \delta \zeta + \zeta \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot \delta \alpha + \frac{\delta p}{r};$$

qui, en y éliminant la quantité $\cos(\Phi - \alpha)$ par l'égalité (165), sera . . . (167)

$$\sin(\Phi - \alpha) \cdot \delta \alpha = \frac{\zeta - 1}{\zeta} \cdot \delta \zeta - \frac{\zeta}{\zeta} \cdot \frac{\delta p}{p}.$$

Considérons maintenant ces variations comme des différentielles, et introduisons, à la place de la variation $\delta \zeta$, sa valeur différentielle (162), nous obtiendrons l'équation différentielle . . . (168)

$$d\alpha = \frac{\zeta}{\zeta \cdot \sin(\Phi - \alpha)} \cdot \left\{ (M - 1) \cdot \frac{dp}{p} - N \cdot \frac{d(\mu v)}{\mu v} \right\},$$

ou faisant auxiliairement . . . (169)

$$M = \frac{(6-1) \cdot (6 - \sin^2 \alpha)}{\zeta^2 \cdot \sin^2 \alpha}, \quad \text{et} \quad N = \frac{6 \cdot (6-1) \cdot \cos^2 \alpha}{\zeta^2}.$$

C'est là identiquement la détermination que, sous les marques (78) à (80), nous avons produite, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, pour la position α de l'aphélie. De plus, sous la marque (81), nous avons donné, en vertu de nos présentes expressions (128) à (131), la réduction des quantités auxiliaires (169); réduction qui, en tenant compte de la dernière (131) de ces expressions citées, sera définitivement . . . (170)

$$M = 1 - \frac{\sin^2(\Phi - \alpha)}{6}, \quad \text{et} \quad N = - \frac{\zeta}{6} \cdot \cos(\Phi - \alpha) \cdot \sin^2(\Phi - \alpha).$$

Introduisant donc ces valeurs dans l'équation différentielle (168), nous en tirons immédiatement, pour la position α de l'aphélie, la détermination définitive et très-simple . . . (171)

$$x = (\alpha) + \int \left| \sin(\Phi - \alpha) \cdot \left[\cos(\Phi - \alpha) \cdot \frac{d(p/r)}{p/r} - \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{dp}{p} \right] \right|;$$

en désignant de nouveau par (α) la constante de cette intégrale, correspondant à l'époque $[x]$, à laquelle cette position de l'aphélie, donnée par l'observation, est $[\alpha]$.

Il faut ici remarquer qu'en partant de la deuxième de nos trois lois primitives (115), de celle qui, dans notre genèse astronomique, se trouve à la marque (8), savoir, de la loi . . . (172)

$$0 = r \cdot [1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha)] - p,$$

qui fixe la nature des orbites, si l'on prend sa variation, en suivant nos susdits principes de la variation de ces orbites par l'influence (121) des forces Σ et γ , nous obtiendrons, comme à la marque (166), l'équation variée . . . (173)

$$0 = \cos(\Phi - \alpha) \cdot \delta \zeta + \zeta \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot \delta \alpha + \frac{\delta p}{p},$$

dans laquelle la variation dp du demi-paramètre p est donnée par l'expression (47) de ce demi-paramètre. Il ne reste donc d'inconnues, dans cette équation (173), que les variations $\delta \zeta$ et $\delta \alpha$ de l'excentricité ζ et de l'aphélie α , variations inconnues qui peuvent ainsi être déterminées réciproquement l'une par l'autre. Ainsi, ayant donné, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, sous les susdites marques (78) à (80), la présente détermination (168) de la variation de l'aphélie α , on pouvait, par l'équation très-simple (173), conclure la présente variation (162) de l'excentricité ζ . Et l'on voit que nous avons effectivement produit, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, toutes les lois fondamentales qui constituent la présente réforme de la mécanique céleste.

Pour compléter ici la déduction de ces lois fondamentales, il ne nous reste qu'à déduire également, de nos présents principes téléologiques, la dernière de ces lois, celle qui, sous la marque (73), donne la solution du *PROBLÈME-UNIVERSAL* de la mécanique céleste, c'est-à-dire, la solution du fameux *problème des trois-corps*. — Or, en partant encore de la deuxième de nos trois lois primitives (115), de celle que nous venons de reproduire sous la marque (172), savoir, de la loi . . . (174)

$$0 = r \cdot \{ 1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha) \} - p,$$

qui fixe la nature des orbites, considérons maintenant toutes les quantités qui entrent dans cette loi, comme étant toutes variables simultanément, afin de pouvoir considérer cette équation (174) comme étant généralement l'équation de nos orbites variables, et prenons conséquemment la différentielle de cette équation par rapport à toutes les quantités r , ζ , Φ , α , p , qui la composent. Nous aurons, pour cette différentielle générale des orbites variables, l'équation . . . (175)

$$0 = dr \cdot \{ 1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha) \} + r \cdot \{ \zeta \sin(\Phi - \alpha) \cdot d\Phi - \cos(\Phi - \alpha) \cdot d\zeta \} - r\zeta \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot d\alpha - dp;$$

qui, en y introduisant la valeur (168) de $\zeta \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot d\alpha$, et en la divisant par r et par ζ , ou par la valeur (131) de ζ , deviendra . . . (176)

$$0 = \frac{dr}{r} + \frac{\zeta \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot d\Phi - \cos(\Phi - \alpha) \cdot d\zeta}{1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha)} - M \cdot \frac{dp}{p} + N \cdot \frac{d(pv)}{pv};$$

les quantités auxiliaires M et N ayant les présentes valeurs (170). — Ainsi, ayant éliminé, dans l'équation différentielle générale (175), la différentielle $d\alpha$ de l'aphélie, en la remplaçant par des fonctions différentielles équivalentes, formées par d'autres variables, nous pouvons maintenant prendre l'intégrale générale de cette équation (176), en considérant comme constante la quantité α , parce que, de la manière dont cette élimination de $d\alpha$ vient d'être faite, en enlevant cette différentielle avec tout ce qu'elle tenait de l'équation primitive (174), il sera tenu compte de la variation de cette quantité dans tout son ensemble, et cela par l'intégration des fonctions différentielles qui se trouvent ainsi équivalentes à cet ensemble de la variation de la quantité α . Nous obtiendrons donc, par cette intégration de l'équation différentielle (176), pour la détermination des orbites variables, l'équation générale . . . (177)

$$Lr + L \{ 1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha) \} = L[p] + \Sigma;$$

en faisant auxiliairement . . . (178)

$$\Xi = \int \left\{ M \cdot \frac{dp}{p} - N \cdot \frac{d'piv}{piv} \right\},$$

c'est-à-dire . . . (179)

$$\Xi = \int \left\{ [6 - \sin^2(\Phi - \alpha)] \cdot \frac{dp}{p} + \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha) \cdot \sin^2(\Phi - \alpha) \cdot \frac{d'piv}{piv} \right\} \cdot \frac{1}{6};$$

et en désignant, dans la constante $L[p]$ de cette intégration, par $[p]$ le susdit (149) demi-paramètre p qui correspond à l'époque $[x]$, à laquelle les différentielles dp et $d'piv$ sont zéro, c'est-à-dire, à l'époque où l'influence des forces téléologiques $\beth$ et $\daleth$ est nulle, et en désignant, de plus, par $[\alpha]$ la position de l'aphélie à cette même époque $[x]$. Ainsi, cette équation générale des orbites variables sera définitivement . . . (180)

$$r = \frac{[p] \cdot e^{\Xi}}{1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - [\alpha])};$$

et c'est là l'équation que, sous la marque (73), nous avons produite pour la solution du problème-universel de la mécanique céleste, et dont il nous restait ici à donner la déduction.

Cette solution spéciale (180) du problème-universel, qui ne contient que les deux quantités variables Φ et ζ , dont la première Φ est donnée par la loi suprême elle-même (63) de la mécanique céleste, et dont la seconde ζ est donnée par notre présente détermination technique (163) de l'excentricité, a l'avantage de ce que l'intégrale Ξ qui en fait partie, peut, dans des cas pratiques, être déterminée facilement par des approximations suffisantes, comme nous l'avons montré aux marques (74) et (75), dans les *Prolegomènes* du *Mésianisme*, et comme nous en ferons nous-mêmes usage dans nos ouvrages ultérieurs, notamment, entre autres objets, pour la déviation des corps dans leur chute, à la surface de la terre, pour cette déviation, surtout vers l'équateur, que les calculs erronés de Laplace n'ont pu expliquer. — Mais, nous pouvons actuellement, en outre de la solution spéciale et purement relative (180), donner la solution absolue du problème-universel de la mécanique céleste, c'est-à-dire, du fameux *problème des trois-corps*. En effet, ayant fixé les lois que suit respectivement la variation de tous les éléments des orbites variables des astres, par l'influence des deux forces téléologiques $\beth$ et $\daleth$, la deuxième de nos trois lois primitives (115), qui, dans notre genèse des lois astronomiques par la loi de création, préside généralement à la formation des orbites des astres, savoir la loi . . . (181)

$$r = \frac{p}{1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha)},$$

donne maintenant, d'une manière immédiate, cette solution absolue du problème-universel de la mécanique céleste; car, tous les éléments qui entrent dans

la construction de cette loi, se trouvent maintenant déterminés rigoureusement par les lois que suit la variation de ces éléments. Ainsi, le demi-paramètre p est déterminé par la loi (47), l'excentricité ζ et l'aphélie α le sont par les présentes lois (163) et (171), enfin, le mouvement angulaire Φ de l'astre est déterminé par la loi-suprême elle-même (65) de la mécanique céleste. De plus, la condition dynamique de ces orbites variables, savoir, la vitesse moyenne w , de laquelle dépend la vitesse vraie v , telle qu'elle est donnée par son expression fondamentale (16), se trouve également déterminée par la loi (49). Et tous les corollaires théoriques, résultant des lois théoriques (1) à (45), qui président au propre et primitif équilibre dynamique de deux astres A et B, tels que sont, par exemple, le grand-axe $2b$, l'angle ψ de la direction du mouvement relatif de l'astre B, etc., savoir . . . (182)

$$b = \frac{p}{1 - \zeta^2}, \quad \text{tang } \psi = - \frac{1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha)}{\zeta \cdot \sin(\Phi - \alpha)}, \quad \text{etc.},$$

tous ces corollaires, disons-nous, qui, en vertu des trois lois primitives (115), ont également lieu dans les orbites variables, se trouvent de même déterminés par les présents éléments techniques ou variables qui entrent dans leur construction. Mais, il ne faut pas perdre de vue que, dans ceux de ces corollaires théoriques dans lesquels entre la somme Σ des masses des deux corps A et B, comme, par exemple, dans les corollaires (44) et (45), il faut, en vertu de la présente détermination téléologique (139) de cette somme des masses ($p \cdot w^2$), substituer la quantité composée [$\Sigma - \Sigma \cdot r^2$] à la place de la quantité simple Σ . Enfin, et c'est ici un point très-essentiel, en observant que, d'après les expressions (121) de l'influence des forces techniques Σ et $\mathcal{T}$, la variation indéfiniment petite δr ou dr du rayon vecteur r est zéro, toutes les variations instantanées de ce rayon vecteur r dans les orbites variables, ne sauraient être autres que celles qui ont lieu dans les orbites fixes; de sorte que, d'après les expressions théoriques (12) et (5), on aura de même la variation technique . . . (183)

$$dr = - \zeta v \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot dx;$$

ou bien, en vertu de l'expression théorique (128) de l'angle ψ , on aura la variation technique . . . (184).

$$dr = + \frac{p w}{r \cdot \text{tang } \psi} \cdot dx,$$

que, sous la marque (50), nous avons prise pour la voie technique de transition entre les éléments hétérogènes (47) et (49). — Il est sans doute inutile de dire que, dans ces expressions présentes (183) et (184), lorsqu'elles s'appliquent aux orbites variables, les éléments qui entrent dans la construction de ces expressions, sont ceux que nous venons de découvrir pour les orbites variables. — Nous insistons encore une fois sur ces simples variations théoriques du rayon vecteur r , parce que, avec une extrême surprise, nous avons entendu de céle-

bres astronomes (MM. Arago, Leverrier, etc.) parler des variations du rayon vecteur, autres que celles que ce rayon r reçoit, à chaque fois, dans son actuelle et propre orbite. Et l'on y ajoutait que ces astronomes étaient profondément versés dans la mécanique céleste (*), probablement dans la *Mécanique céleste* de Laplace! — Pour se bien convaincre de cette invariabilité du rayon vecteur r , parce que, à ce qu'il paraît, nos astronomes ne voudront pas y croire, il suffit de multiplier par r l'équation variée (173), et de la soustraire ensuite de l'équation différentielle générale (175). Il ne restera alors, de cette équation générale (175), que la partie . . . (185)

$$0 = dr \cdot \{ 1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha) \} + r \zeta \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot d\Phi,$$

qui est l'équation différentielle ordinaire de l'équation (174) des orbites considérées comme invariables, et qui, en y introduisant la valeur (66) de la différentielle $d\Phi$, donne, pour la différentielle dr du rayon vecteur, la susdite expression (183) purement théorique, savoir . . . (186)

$$dr = - \zeta w \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot dx;$$

expression qui démontre ainsi l'invariabilité instantanée du rayon vecteur par l'influence des forces téléologiques $\beth$ et $\daleth$. C'est seulement dans les différentielles d^2r , d^3r , etc., des ordres ultérieurs que se manifeste l'influence directe de ces forces $\beth$ et $\daleth$ sur le rayon vecteur. Aussi, lorsqu'il s'agit des orbites variables, faut-il maintenant, pour avoir ces différentielles d^2r , d^3r , etc., des ordres ultérieurs, en les prenant sur les présentes expressions (183) ou (184), considérer comme variables, à l'exception de la différentielle dx du temps, toutes les quantités qui forment ces expressions. Mais, la véritable variation continue du rayon vecteur r provient de la variation continue de l'orbite elle-même, nommément, pour ce qui concerne spécialement ce rayon vecteur, sa variation continue provient immédiatement de la variation de la vitesse v et de la direction ψ du mouvement relatif de l'astre B, telles que, d'après les expressions (121), ces variations de v et de ψ sont causées par les forces motrices $\beth$ et $\daleth$.

Nous avons actuellement toutes les fondamentales lois astronomiques, telles qu'elles résultent de leur genèse absolue par la loi de création elle-même. — Voici le tableau de cette haute genèse astronomique . . . (187)

TABLEAU DE LA GENÈSE

DES LOIS ASTRONOMIQUES, D'APRÈS LA LOI DE CRÉATION (**).

- A) *Théorie ou Autothésie*; ce qu'il y a de donné dans la construction mécanique des cieux. = LOIS THÉORIQUES de la mécanique céleste.

(*) Voyer le *Compte-Rendu* de la séance de l'Académie des sciences de Paris, du 19 octobre 1846.

(**) Il est sans doute superflu de dire que les numéros entre parenthèses qui, dans ce tableau, indi-

a) <i>Contenu ou constitution astrodynamique.</i>	
a2) <i>Partie élémentaire. = Lois astronomiques élémentaires (au nombre de sept).</i>	
a3) <i>Éléments primitifs. = Lois primitives.</i>	
a4) <i>Élément fondamental ou neutre; genèse du mouvement. = Loi de la vitesse.</i>	
[Formules (a) et (16)].	(I)
b4) <i>Éléments primordiaux ou polaires.</i>	
a5) <i>Genèse de l'espace. = Loi des aires.</i>	
[Formule (8)].	(II)
b5) <i>Genèse du temps. = Loi des aires.</i>	
[Formule (14)].	(III)
b3) <i>Éléments dérivés. = Lois organiques.</i>	
a4) <i>Éléments dérivés immédiats ou distincts :</i>	
a5) <i>Combinaison des Orbites avec la Vitesse. = Loi du grand-axe.</i>	
[Formule (17)].	(IV)
b5) <i>Combinaison des Aires avec la Vitesse. = Loi des apsides.</i>	
[Formule (19)].	(V)
b4) <i>Éléments dérivés médiateurs ou transitifs :</i>	
a5) <i>Transition de la genèse du Grand-axe à celle des Apsides; rapport du grand-axe au paramètre. = Loi de l'excentricité.</i>	
[Formule (23)].	(VI)
b5) <i>Transition de la genèse des Apsides à celle du Grand-axe; rapport du plus grand rayon-vecteur au paramètre. = Loi de l'apex.</i>	
[Formule (24)].	(VII)
ba) <i>Partie systématique. = Lois astronomiques systématiques (au nombre de quatre).</i>	
a3) <i>Diversité dans la réunion systématique des éléments primordiaux.</i>	
a4) <i>Influence partielle :</i>	
a5) <i>Influence de l'espace dans le temps, ou des Orbites dans les Aires; genèse de la force centrifuge. = Loi de la limitation centrale.</i>	
[Formule (25)].	(I)
b5) <i>Influence du temps dans l'espace, ou des Aires dans les Orbites; genèse de la force centrifuge. = Loi de la révolution centrale.</i>	
[Formules (28) et (31)].	(II)
b4) <i>Influence réciproque de ces éléments primordiaux; harmonie systématique entre l'espace et le temps ou entre les Orbites et les Aires par leur concours téléologique à la formation de l'équilibre dynamique entre deux astres. = Loi de la vitesse moyenne.</i>	
[Formule (33)].	(III)
b3) <i>Identité finale dans la réunion systématique des deux éléments distincts, du Grand-axe et des Apsides, par l'élément-neutre, la Vitesse, qui leur</i>	

quent les lois, sont les marques des formules dans lesquelles ces lois sont produites, d'abord, dans les Prologues du Mécanisme, et ensuite dans l'ouvrage présent.

est commun. = LOI DE LA MASSE des deux corps en équilibre dynamique.

[Formule (36)]. (IV)

b) *Forme ou relation astronomique.*

Nota. — A cette forme ou relation astronomique appartiennent tous les corollaires qui dérivent des précédentes lois théoriques, entre autres, le principe (44) et les conséquences (44) et (45).

B) *Technic ou Autogénie; ce qu'il a fallu faire, dans la création du monde, pour accomplir la construction mécanique des cieux.* = LOIS TECHNIQUES de la mécanique céleste.

a) Dans le contenu ou dans la constitution astronomique.

a2) Dans la partie élémentaire de cette constitution.

a3) Pour la genèse des éléments dérivés, immédiats ou distincts:

a4) Accomplissement de la genèse du Grand-axe. = LOI DE LA VARIATION DU PARAMÈTRE.

[Formules (47) et (152)].

b4) Accomplissement de la genèse des *Apides*. = LOI DE LA VARIATION DE LA VITESSE-MOYENNE.

[Formules (49) et (153)].

b3) Pour la genèse des éléments dérivés, médiate ou transfus.

a4) Accomplissement de la genèse de l'*Excentricité*. = LOI DE LA VARIATION DE L'EXCENTRICITÉ.

[Formules (53), et surtout (163)].

b4) Accomplissement de la genèse de l'*Aphélie*. = LOI DE LA VARIATION DE L'APHÉLIE.

[Formules (56), et surtout (171)].

1a2) Dans la partie systématique de cette même constitution.

a3) Pour l'accomplissement de l'*harmonie primitive* ou de la *préformation primitive* dans les deux éléments primordiaux, les *Orbites* et les *Aires*; préformation qui offre les raisons suffisantes pour la limitation des écarts en pour l'établissement de la *périodicité* dans les mouvements des astres. = MONSTRATEUR RÉGÉLOGIQUE dans la construction des cieux.

[Formules (58) à (63)].

b3) Pour l'accomplissement de l'*identité finale* dans les deux éléments distincts, le Grand-axe et les *Apides*, par l'ascension à l'*identité primitive* des deux éléments primordiaux. = LOI SUPRÊME de la mécanique céleste.

[Formule (1), comme principe théorique, premier et absolu, de la mécanique céleste, et formule (65), comme application technique de ce principe absolu].

b) Dans la forme ou dans la relation astronomique.

a2) Dans la partie élémentaire de cette relation; accomplissement des lois organiques de l'astronomie, en vue de l'*uniformité* des mouvements des astres, comme règle de ces mouvements uniformes. = CANON ASTRONOMIQUE.

[Formules (70) et (125)].

b2) Dans la partie systématique de cette même relation; accomplissement des lois

systematiques de l'astronomie, en vue de leur *identité finale*, comme *problème-universel* de la mécanique céleste. = PROBLÈME DE TROIS OU D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE CORPS CÉLESTES.

[Formules (73) ou (180), et surtout (181)].

Telles sont donc, dans leur absolu accomplissement, les lois fondamentales de l'astronomie, que nous obtenons par notre présente réforme de la mécanique céleste. — Ceux des géomètres qui pourront s'élever au point de vue de la philosophie absolue, comprendront que cet accomplissement final de la mécanique céleste provient de l'application présente de la LOI DE CRÉATION à la genèse des réalités qui constituent l'ordre mécanique du monde. Et, quant aux autres géomètres, ils pourront se former une idée de cet accomplissement absolu de la mécanique céleste par les deux critères décisifs, savoir, 1°. pour ce qui concerne le but, par la détermination COMPLÈTE ET RIGOREUSEMENT EXACTE de toutes les fondamentales lois astronomiques, à côté de simples approximations et d'incomplets fragments rhapsodiques dont se composait la prétendue science de la mécanique céleste; et 2°. pour ce qui concerne les moyens, par le procédé purement SYNTÉTIQUE que nous avons suivi dans la découverte de toutes ces lois fondamentales, à côté de simples tâtonnements d'une grossière analyse qui formaient le procédé impuissant de la prétendue science actuelle.

Dans le second des ouvrages que nous commençons ici à publier, dans celui qui aura pour objet spécial la *Réforme de la Mécanique céleste*, nous développerons toutes ces hautes considérations de la présente réforme de cette science, surtout dans l'application de ces nouvelles lois de la mécanique céleste à la solution décisive de tous ses grands problèmes. Dans l'ouvrage présent, où nous nous sommes déjà étendus au delà de ses limites, nous nous bornerons à ajouter ici quelques mots concernant les LOIS TECHNIQUES, c'est-à-dire, les nouvelles lois que nous donnons à la mécanique céleste, pour la transformer, de son faux état de science du désordre, qu'elle forme jusqu'à ce jour, en son état absolu de science de l'ordre, dans la construction mécanique des cieux. Nous nous bornerons même, dans l'ouvrage présent, à ne signaler ainsi rapidement, parmi ces lois techniques, que les trois lois systématiques, savoir, le modérateur téléologique (58), la loi suprême (65), et le problème-universel (73) et (181), qui couronnent cette nouvelle mécanique céleste.

Or, pour ce qui concerne d'abord le *modérateur téléologique* qui, dans les Prologomènes du Messianisme, est donné sous la marque (58), et qui forme le *produit modérateur* des deux éléments techniques principaux des orbites variables, c'est-à-dire, du paramètre $2p$, constituant l'accomplissement du grand-axe ou de l'espace, et de la vitesse moyenne v , constituant l'accomplissement des apsidés ou du temps, nous avons déjà laissé entrevoir, dans les susdits Prologomènes,

et nous confirmons actuellement cet aperçu par la déduction générale de la loi de création, que nous avons donnée dans l'ouvrage présent, comment ce modérateur téléologique dont il est ici question, en dérivant de l'HARMONIE PRÉÉTABLIE entre les éléments hétérogènes de tout système de réalités, établit, par la LIMITATION des écarts, et conséquemment par la RÉGULARITÉ des mouvements, un ordre supérieur d'équilibre dynamique, nommément un ÉQUILIBRE SYSTÉMATIQUE entre les corps célestes qui, précisément par la permanence de cet équilibre; forment ainsi un système spécial du monde. Et nous avons reconnu positivement que le principe de cette décisive limitation des écarts consiste en ce qu'il n'existe, dans l'expression (58) de la loi qui forme le produit modérateur (pw), rien autre que la seule force technique τ , qui, dans le plan des orbites, agit perpendiculairement au rayon vecteur, et qui, comme on pouvait le prévoir à priori, et comme cela se trouve constaté aujourd'hui par son expression générale (113), est manifestement, dans tout système de corps célestes, alternativement positive et négative, et nécessairement égale de part et d'autre; car, par la simple réunion de plusieurs corps célestes, cette action alternative et égale subsiste immédiatement par le seul fait de cette réunion. Il n'en est pas de même de la force technique ω , qui agit aussi dans le plan des orbites variables, nommément dans la direction du rayon vecteur, parce que la longueur de ce rayon vecteur r influe plus spécialement, comme on pouvait aussi le prévoir à priori, et comme cela se trouve également constaté aujourd'hui par son expression générale (113); de sorte que, tout en devenant alternativement positive et négative, son action ne pouvait, aussi régulièrement que celle de la force τ , être égale de part et d'autre. Il suffisait donc, pour l'établissement du susdit PRINCIPÉ AUTOGÉNÉRIQUE dans la création des cieux, d'introduire, dans un système de corps célestes, comme un résultat immédiat de la simple réunion de ces astres, la force technique τ , qui agit perpendiculairement au rayon vecteur, pour que, par son influence, forment ainsi une HARMONIE PRÉÉTABLIE entre les éléments hétérogènes, l'espace et le temps, il pût s'établir une MODÉRATION de l'action de ces éléments hétérogènes dans chaque orbite ou dans chaque équilibre *partiel* ou *élémentaire* de deux corps A et B, et par conséquent une LIMITATION des écarts dans les mouvements qui ont lieu dans chaque orbite. Et c'est précisément cette autogénique limitation préétablie des écarts qui est la condition de la RÉGULARITÉ des mouvements, et qui constitue ainsi cet ordre supérieur d'équilibre dynamique que nous nommons *équilibre systématique* des corps célestes. On voit par là combien est erronée, pour ne pas dire barbare, l'idée que les savants se forment encore de la mécanique céleste, en considérant les forces techniques ω , τ , γ , comme des *forces perturbatrices* de l'ordre dans les corps célestes; tandis que, comme on le reconnaît enfin par notre loi systématique et modératrice (58), ce sont précisément ces forces techniques ω , τ , γ , et principalement la seconde τ de ces forces, qui, comme

véritables *forces autogéniques* de la création, introduisent seules un ordre permanent dans le système du monde.

Quant à cette limitation périodique des écarts dans la variation des éléments de chaque orbite, telle qu'elle est établie par l'influence préétablie de la loi modératrice (58), nous l'avons démontrée généralement, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, sous les marques (59) à (63), et appliquée, comme exemple, dans le même ouvrage, sous la marque (64), aux écarts périodiques des mouvements des planètes Jupiter et Saturne. Et nous y découvrirons ainsi le champ immense qui s'ouvre maintenant à la mécanique céleste, pour la détermination de l'étendue, des limites, et des époques de ces mouvements périodiques des astres, qui forment leur équilibre systématique.

Nous devons rappeler ici la susdite erreur de Laplace, qui, par les résultats de ses formules mutilées, crut voir la cause de la périodicité des mouvements des astres dans la prétendue invariabilité du grand-axe de leurs orbites. Cette erreur, qui est déjà si grande dans une hypothèse conforme à notre système solaire, où les excentricités ζ des orbites sont actuellement de très-petites quantités, devient tout à fait monstrueuse, lorsqu'on admet, comme on doit le faire pour d'autres systèmes de corps célestes, surtout pour le système universel de ces corps, des excentricités quelconques, et des rapports quelconques entre les susdites masses $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{m}$ des astres qui agissent ainsi en vertu de leurs masses. Déjà même, dans notre système solaire, les orbites des comètes, par leurs grandes excentricités ζ , et par leurs grandes inclinaisons τ , sortent-elles des conditions où l'on pouvait se faire illusion par l'erreur de Laplace, et accusent-elles ainsi ouvertement la fausseté de son prétendu principe de la limitation des écarts, et par conséquent de la stabilité d'un système de corps célestes. En, en effet, nous reconnaissons maintenant, avec une certitude absolue, par notre détermination rigoureusement exacte (127) du grand-axe $2a$ des orbites, que, dans le cas général où les excentricités ζ ont des valeurs quelconques, et où les forces techniques $\mathfrak{A}^3$ et $\mathfrak{B}^3$ peuvent avoir des rapports quelconques avec les masses centrales $\mathfrak{M}$, comme cela a lieu dans le système universel du monde, ainsi que nous le verrons dans notre susdite *Réforme de la Mécanique céleste*, le grand-axe $2a$, tout autant que les autres éléments des orbites, est constamment et grandement variable; et l'on ne saurait conséquemment, dans aucun système de corps célestes, considérer ce grand-axe $2a$ des orbites comme le principe de la limitation des écarts dans les mouvements des astres de ce système, ni par conséquent comme le principe de sa permanente stabilité; car, dans une aussi grande question que l'est celle de la construction mécanique du monde, et surtout celle de la permanence dans cette décisive et immense construction, on ne saurait considérer comme vrai que ce qui est vrai universellement, puisqu'il n'existerait alors aucune condition fixe et certaine pour la stabilité du monde.

Bien plus, dans le cas où, contre toute probabilité téléologique, il existe-

rait réellement un vice, une cause de destruction permanente dans le système du monde, le faux principe de Laplace, sa prétendue invariabilité du grand-axe des orbites, ne saurait nullement accuser cette destruction. Aussi, cet illustre académicien de Paris a-t-il, à côté de son principe, calculé, avec une entière sécurité, l'influence, plus ou moins grande, que pourrait avoir, sur les mouvements des astres, la résistance du milieu où s'opèrent ces mouvements, parce que son principe n'a pu l'avertir que, dans cette résistance, quelque petite qu'elle fût, il y aurait une cause permanente de destruction du monde, comme nous allons le prouver rigoureusement. — Désignons par x le facteur de cette résistance hypothétique, facteur provenant de l'intensité de cette résistance et de la forme ou du volume des corps célestes; et nous aurons, à la place de l'expression (141) de la variation de la vitesse centrifuge (v_2), toujours en vertu de sa détermination (21), l'expression . . . (188)

$$\delta(v_2) = \gamma . dx - x . (v . \sin \varpi)^2 . dx ;$$

de sorte qu'en procédant comme à la suite de l'expression (141), nous obtiendrons, pour le produit modérateur (ρw), à la place de l'intégrale (148), l'intégrale complète . . . (189)

$$\rho w = C + \int (\gamma r . dx) - x . \int \{ r (v . \sin \varpi)^2 . dx \} ;$$

qui, par notre voie théorique de transition (22), deviendrait . . . (190)

$$\rho w = C + \int (\gamma r . dx) - x . \int \left\{ r . \left(\frac{\rho w}{r} \right)^2 . dx \right\} .$$

Reprenant alors la différentielle de cette égalité, divisant tous ses termes par la quantité (ρw), et mettant, dans le dernier terme, à la place du facteur r , sa valeur moyenne b , nous aurons l'équation différentielle . . . (191)

$$\frac{d(\rho w)}{\rho w} = \frac{r . \gamma}{\rho w} . dx - x b . \frac{\rho w}{r^2} . dx ;$$

dont l'intégration, en vertu de la loi suprême (65), qui détermine le mouvement angulaire Φ des astres, donnera l'équation . . . (192)

$$L(\rho w) = L[\rho w] + \int \left(\frac{r . \gamma}{\rho w} . dx \right) - x b . \Phi ;$$

où γ désignant par $L[\rho w]$ la constante de cette intégration, correspondant à l'époque où $\Phi = 0$, et où l'influence de la force γ est nulle. Ainsi, en faisant auxiliairement . . . (193)

$$\Psi = \int \left(\frac{r . \gamma}{\rho w} . dx \right) = \int \left(\frac{\gamma}{\rho w} . dx \right) ,$$

l'équation (192) donnerait, pour le produit-modérateur (ρw), la détermination . . . (194)

$$\rho w = [\rho w] . e^{\Psi - x b . \Phi} ,$$

dans laquelle Ψ , dépendant de la force modératrice γ , est une quantité périodique, et Φ , formant le mouvement angulaire de l'astre, est une quantité qui augmente sans cesse et indéfiniment; de sorte que, quelque petit que pût être le facteur α de la résistance du milieu, le produit-modérateur $p\nu$, c'est-à-dire, notre modérateur-téléologique diminuerait indéfiniment, et annoncerait ainsi, pour une époque plus ou moins éloignée, la destruction du monde. En effet, si l'on joint à cette détermination (194) du produit-modérateur, la détermination (139), de la force centripète ($p.u^2$), savoir . . . (195)

$$p.u^2 = \Omega - 2.r^3,$$

on tirera immédiatement, de ces deux équations (194) et (195), pour la vitesse moyenne ν et pour le paramètre $2p$, à la place de nos expressions téléologiques (49) et (47), les expressions destructives . . . (196).

$$\nu = \frac{\Omega - 2.r^3}{[p\nu].e^{\Psi - \alpha\delta\Phi}}, \quad \text{et} \quad p = \frac{[p\nu]^2.e^{2(\Psi - \alpha\delta\Phi)}}{\Omega - 2.r^3},$$

qui montrent que le paramètre $2p$ diminuerait indéfiniment, et qu'au contraire la vitesse moyenne ν augmenterait de même indéfiniment, c'est-à-dire, que les orbites des astres se rapprocheroient indéfiniment de la ligne droite de leurs apsidés, à l'instar des orbites des comètes, et par conséquent que les satellites tomberaient sur leurs planètes centrales, notre lune sur la terre, et toutes les planètes sur le soleil.

Il faut donc renoncer à la supposition que les astres se meuvent dans un milieu pondérable ou propre à opposer une résistance au mouvement des astres, à moins qu'on ne veuille admettre une cause permanente de destruction dans le monde. On ne saurait même admettre la supposition que, par une telle résistance, atténuée considérablement, on aurait assigné d'avance, dans la création, la durée d'un système du monde, parce qu'une telle durée, quelque grande qu'elle fût, ne saurait être conforme au développement libre du monde moral dans le monde physique, c'est-à-dire, conforme à l'accomplissement libre, plus ou moins long, des destinées des êtres raisonnables, pour lesquels existe le monde physique. Toutefois, si, à l'instar de Laplace, quelque géomètre voulait s'en convaincre par l'expérience, nos présentes formules (194) et (196) lui en offriraient les moyens infailibles, en disposant, à cette fin, les observations astronomiques. — Mais, ce qu'il nous importe essentiellement de conclure de ces calculs, c'est que, comme nous venons de le reconnaître, à côté du prétendu principe de l'invariabilité des orbites, fondée sur la prétendue invariabilité de leur grand-axe, le monde pourrait insensiblement marcher vers sa destruction.

Au reste, cette grave erreur de Laplace, dont nous venons de dévoiler les conditions destructives, et qui, sous de telles conditions, ne tendrait à rien moins qu'à dénaturer la mécanique céleste, en la privant d'un principe général

et certain pour la stabilité du monde, disparaît aujourd'hui par elle-même, en présence de la découverte de ce principe fondamental de la mécanique céleste, tel que nous l'avons produit, sous la susdite marque (58), dans les *Prolegomènes* du Messianisme. En effet, suivant la loi de création, qui préside nécessairement à la genèse de toutes les lois astronomiques, puisqu'elle préside à la genèse de toutes les réalités, nous avons, dans les *Prolegomènes*, reconnu ce principe décisif de l'ordre mécanique du monde, dans la loi systématique qui, en fixant l'HARMONIE PRÉÉTABLIE entre ses éléments hétérogènes, le temps et l'espace, devient le MODÉRATEUR des éléments hétérogènes dans chaque orbite, et qui, en limitant ainsi leurs écarts, introduit la RÉGULARITÉ dans les mouvements des astres, et devient, par là même, la condition de leur permanent ÉQUILIBRE SYSTÉMATIQUE. — Tout ce qu'il nous reste ici à ajouter, et nous engageons les géomètres à y faire attention, c'est que cette loi systématique (58), cette modératrice du mouvement des astres, telle que nous l'avons fait connaître plus haut dans toute son extension, est ABSOLUMENT GÉNÉRALE, et s'applique ainsi à tous les systèmes spéciaux du monde, quelles que soient les excentricités ζ de leurs orbites, les inclinaisons η des plans de ces orbites, et les masses respectives $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ des astres qui forment ces différents systèmes. Aussi, est-ce sous les auspices de ce principe modérateur (58) du monde physique que nous ferons connaître, dans notre susdite Réforme de la Mécanique céleste, le SYSTÈME UNIVERSEL du monde, ce système général qui est demeuré inconnu jusqu'à ce jour, et qui ne saurait subsister sans cette loi conservatrice de son permanent ordre mécanique. Nous nous contenterons ici, pour en donner une idée aux astronomes, de leur faire remarquer que, dans notre présente détermination téléologique (139) et (195) de la force centripète, cette force peut souvent devenir négative, et peut ainsi produire des mouvements hyperboliques parmi les soleils qui forment le système universel du monde, sans qu'il puisse en résulter le moindre désordre, parce que l'influence de la loi conservatrice (58), de ce modérateur téléologique des mouvements des astres, subsiste généralement dans tout ce système universel du monde.

Passons à la seconde de nos trois lois systématiques, à celle que nous avons fait connaître, dans les *Prolegomènes*, sous la marque (65), et qui, comme nous l'avons caractérisée, présente l'application technique de la LOI SUPRÊME de la mécanique céleste. Comme telle, c'est-à-dire, dans une telle application technique, cette loi suprême, ainsi que nous l'avons dit également, opère l'accomplissement de tout système de corps célestes, en réglant la génération du mouvement angulaire Φ de ces corps, par la translation de leur rayon vecteur r , afin d'entretenir par là leur force centrifuge, cette condition fondamentale de la permanence de leur équilibre dynamique, par son opposition systématique à leur inhérente et combinée force centripète. Et comme telle, cette loi suprême (65) réalise ainsi l'identité primitive qui se trouve entre ces deux forces oppo-

sées, et en quelque sorte hétérogènes, cette IDENTITÉ PRIMITIVE qui, sous la marque (1), constitue, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, le principe théorique et unique de toute notre présente réforme de la mécanique céleste.

Ainsi, par ce principe théorique (1), qui est établi entièrement à priori, cette vaste science de la mécanique céleste, qui, jusqu'à ce jour, n'a été qu'une *science empirique*, en tant qu'elle n'avait pour principe que la loi expérimentale de Newton, devient tout à coup, et dans toute son étendue, une *SCIENCE RATIONNELLE*, c'est-à-dire, une véritable science, qui déduit à priori, de la seule raison, les LOIS qui régissent un système donné de réalités, et qui ne reçoit à posteriori, de l'expérience, que les FAITS auxquels elle applique ces lois rationnelles. Et c'est cette transformation de la mécanique céleste, de *science empirique en science rationnelle*, qui est la seconde et principale partie de sa présente réforme, comme complément ou plutôt comme base de la susdite première partie de cette réforme, consistant dans la transformation de la mécanique céleste, de *science du désordre en science de l'ordre*, dans la construction du monde, comme nous venons de le prouver. — Ce sont là, en effet, les deux parties constitutantes et précises de notre présente réforme de la mécanique céleste, que nous léguons ainsi, sous ces deux CARACTÈRES INDÉLÉTABLES, sinon à nos contemporains, que ces hauts caractères scientifiques, loin d'intéresser, révolteront peut-être, du moins à la postérité, si la Providence lui fait parvenir nos ouvrages.

Nous avons déjà vu quelle est l'idée que Laplace, et par conséquent les académiciens de Paris, se forment de la stabilité du monde, en la faisant dépendre du faux principe de l'invariabilité du grand-axe des orbites des astres. Et, pour faire savoir quelle est l'idée qu'ils se forment de la mécanique céleste, considérée comme science, il suffit de faire remarquer qu'en terminant sa Mécanique céleste, Laplace s'écrit, avec enthousiasme, que toute sa science vient de démontrer la vérité de la loi newtonienne. Ainsi, la démonstration de la loi empirique de Newton est, sinon l'objet principal, du moins un objet majeur de la Mécanique céleste de Laplace ! Et à ce titre, nous sommes fondés à penser que Laplace, et par conséquent les académiciens de Paris, n'ont pas encore l'idée de la vraie mécanique céleste.

Nous ne perdrons pas le temps en cherchant à démontrer aux savants, nos contemporains, la déraison qu'il y a de vouloir ébluir la VRAIE SCIENCE sur l'expérience, c'est-à-dire, de vouloir produire une CRÉATION RATIONNELLE par le moyen inerte de la *passivité* des sens. Ils ne nous comprendraient pas encore, quand même leur intérêt personnel ne les empêcherait pas de nous comprendre. Nous nous bornerons donc, pour constater la nécessité de la *ADFORMA* DES SCIENCES que nous avons signalée dans les *Prolegomènes du Messianisme* (pages 427 à 433), et que nous développerons plus amplement dans le second tome de l'ouvrage présent, où nous dévoilerons les moyens de cette décisive et indispensable

ble réforme des sciences, nous nous bornerons ici, disons-nous, à offrir aux savants, comme un document péremptoire de la possibilité de cette grande réforme, notre présente science de la mécanique céleste. En effet, cette nouvelle science n'emprunte rien à l'expérience; et comme telle, elle est purement rationnelle, c'est-à-dire, une vraie science, dans laquelle toutes ces lois empiriques qui, jusqu'à ce jour, servaient de base à la mécanique céleste, telles que les lois de Kepler, et surtout la loi de Newton, ne sont plus que de simples corollaires de notre principe théorique (1), c'est-à-dire, du principe absolu de notre présente loi suprême (65), de ce principe absolu dont nous venons de déduire, par l'application immédiate de la loi de création elle-même, toute cette nouvelle mécanique céleste. Et c'est en cette haute qualité d'une absolue indépendance de tout ce qui dérive de l'expérience, que notre présente mécanique céleste offre ainsi, comme un document irréfragable, le premier complément du prototype que notre réforme des mathématiques présente pour la réforme générale des sciences. — Nous disons le premier complément, parce que notre nouvelle mécanique terrestre et notre nouvelle physique mathématique, dont nous avons également posé les bases dans les *Prolegomènes*, et qui acheminent la solution des trois grands problèmes du monde physique, offriront à leur tour, par leur absolue indépendance de tout principe expérimental, le deuxième et le troisième complément du prototype que, dans le premier tome de l'ouvrage présent, notre réforme des mathématiques doit présenter pour la réforme générale des sciences.

Mais, revenons à notre actuelle loi suprême (65) de la mécanique céleste, et observons que, pour ce qui concerne sa forme, elle est déjà amenée à sa dernière simplicité, et surtout à une simplicité telle, que l'on ne pouvait s'y attendre au milieu des complications immenses auxquelles sont soumis les mouvements des astres. Et cette simplicité si remarquable provient manifestement de ce que, comme nous venons de le dire, la présente loi suprême réalise ainsi, dans le terme unique dont elle est formée, l'IDENTITÉ PRIMITIVE (1) qui existe entre les éléments hétérogènes du système du monde, et par conséquent entre les forces opposées qui y agissent pour entretenir sa permanente stabilité.

Nous terminerons cet aperçu concernant la loi suprême (65), par l'observation importante de ce que, en outre de son application générale et immédiate, cette loi offre le moyen de déterminer ce qui constitue réellement le MOYEN MOUVEMENT angulaire Φ des astres, ce moyen mouvement qui, jusqu'à présent, ne se trouve pas encore déterminé pour de longues époques, ni à priori, dans la mécanique céleste, ni à posteriori, dans l'astronomie elle-même; car il n'est pas nécessaire de faire remarquer que le mouvement moyen que l'on conclut d'un nombre connu de révolutions des astres, n'est pas leur véritable mouvement moyen, correspondant à des époques différentes. — Or, la solution de

cette question, comme nous venons de l'annoncer, peut maintenant être donnée facilement par notre présente loi suprême (65). — Bien plus, cette solution se trouve déjà donnée, dans les *Prolegomènes*, par l'expression (67), faisant une réduction moyenne de la loi suprême (65), par cette expression (67) que nous y avons produite pour avoir une première détermination du mouvement angulaire Φ des astres. Et c'est aussi pour cette fin que nous y avons donné son intégrale (68), qui peut servir surtout lorsque l'intervalle x du temps n'est pas bien considérable. Mais, pour des époques éloignées, il faut, en y faisant toujours $\xi = 1$, intégrer l'expression (67) par nos procédés absolus, nommément par la méthode primordiale (739) combinée avec nos facultés intégrales (919), comme pour toutes les autres intégrations, d'après ce que nous avons reconnu et prescrit généralement.

Passons à la troisième et dernière loi systématique, à celle que nous avons produite, dans les *Prolegomènes*, sous la marque (73), et reproduite, dans l'ouvrage présent, sous la marque (180), et qui, donnant enfin, sous la marque (181), la vraie solution, la solution absolue elle-même, du fameux *problème des trois-corps*, constitue notre *problème-universel* de la mécanique céleste. — Il est manifeste, et nous l'avons déjà dit, que ce problème-universel fixe, par sa solution, la loi qui, dans un système d'un nombre quelconque de corps célestes, détermine la relation permanente entre les deux conditions fondamentales de leur équilibre systématique, entre le mouvement angulaire Φ , comme condition de la force centrifuge, que nous venons de déterminer par la loi suprême (65), et le mouvement central, le long du rayon vecteur r , comme condition de la force centripète, que nous déterminons maintenant par l'actuel problème-universel (73) ou (180), et définitivement (181).

Or, la simple inspection de la dernière (181) de ces expressions, qui donne la solution de ce problème-universel de la mécanique céleste, et qui présente immédiatement une équation polaire, complètement déterminée, entre les deux susdites conditions fondamentales de l'équilibre systématique des corps célestes, entre leur mouvement angulaire Φ et leur rayon vecteur r , suffit pour faire reconnaître que cette solution, qui donne ainsi immédiatement le rayon vecteur r par le mouvement angulaire Φ , offre, non-seulement la vraie et définitive solution du fameux problème des trois-corps, mais de plus, et même pour un nombre quelconque de corps célestes, la solution rigoureusement exacte, et surtout la solution absolue de ce grand problème. — Aussi, en nous fondant sur cette manifeste solution absolue, sommes-nous en droit de déclarer que le problème des trois-corps, loin d'avoir été résolu, n'a même pas été compris jusqu'à ce jour, en le considérant sous le point de vue de l'ordre final dans la construction mécanique du monde, sous ce haut point de vue téléologique sous lequel nous venons enfin de résoudre ce grand problème. — Et peut-être sommes-nous ainsi en droit de sourire, lorsque les illustres académiciens de

Paris; et spécialement leur savant secrétaire, ce bon M. Arago, prétendent que ce problème des trois-corps a déjà été résolu, et surtout que c'est Clairaut qui l'a résolu le premier. Il paraîtrait alors, d'après ces grands savants, que l'on peut résoudre plusieurs fois ce même problème. Et c'est probablement pour cela que cette savante Académie ne cesse de proposer des prix pour ce qu'elle appelle les perturbations des planètes. Mais alors, à quoi sert la Mécanique céleste de Laplace, dans laquelle, d'après le même M. Arago, la science est accomplie? C'est sans doute pour constater ce glorieux accomplissement que la même Académie, qui, précisément au nom de Laplace, prétend tenir le sceptre des mathématiques dans le monde, a institué, pour juger les solutions futures de cette grande question des trois-corps, cinq juges perpétuels, les nommés MM. Binet, Poinso, Arago, Cauchy, et Liouville! Eh bien, pourrions-nous aujourd'hui, sans un excès d'audace, et sans manquer de respect à cette illustre Académie, défier M. Arago, son secrétaire, de donner, ou du moins d'indiquer encore une solution du problème des trois-corps, après celle que, sous la marque (181), nous en donnons dans l'ouvrage présent. M. Arago nous répondra sans doute qu'il ne s'occupe que du commerce de la science, et non de la science elle-même. Mais alors, nous le prions de s'adresser, pour cela, à ses entrepreneurs scientifiques; et nous pouvons l'assurer que, si ces Messieurs sont réellement en fonds, ils lui diront qu'il n'y a plus lieu de trafiquer sur cette matière.

Nous terminerons cet aperçu de la réforme de la mécanique céleste par deux exemples de son application, par ces deux exemples décisifs, l'un direct et l'autre inverse, que nous avons annoncés plus haut. Dans le premier, nous montrerons comment, lorsque les forces téléologiques $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{L}$, sont données et considérées comme causes, on peut en déduire la variation des orbites, considérées comme effet; et dans le second, nous montrerons comment, lorsque cette variation des orbites, considérée comme effet, est donnée ou connue, on peut en déduire les forces téléologiques $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{L}$, considérées comme causes de cette variation. — Nous prendrons le premier de ces exemples dans la théorie lunaire que, sur la demande du Parlement britannique, nous avons portée en Angleterre; et nous prendrons le second de ces exemples dans la variation de l'orbite de la planète Uranus.

Pour ce qui concerne d'abord notre théorie lunaire, nous l'avons traitée dans les deux systèmes, dans celui de la science actuelle, c'est-à-dire, dans le système du désordre ou des prétendues perturbations, causé par les forces motrices du monde, suivant nos lois rigoureusement exactes (122), (124), (70) et (125), et dans celui de notre nouvelle science de la mécanique céleste, c'est-à-dire, dans le système de l'ordre ou du concours téléologique de ces forces motrices du monde, suivant nos lois également exactes (47), (49), (163), (171), (58), (65), (70), (125), et (181). Nous avons ainsi employé les deux systèmes

pour offrir, d'une part, une immédiate vérification des résultats, par leur concordance dans ces deux systèmes, et de l'autre part, une preuve de l'extrême simplicité de la nouvelle et véritable mécanique céleste, par sa comparaison avec les inextricables complications de la fausse mécanique céleste que l'on a poursuivie jusqu'à ce jour. — Dans notre susdite *Réforme de la Mécanique céleste*, nous reproduirons cette fausse théorie lunaire; et dans l'ouvrage présent, nous nous bornerons à signaler principalement la vraie théorie, en indiquant pour cela les procédés par lesquels, dès aujourd'hui, on pourra, avec un travail purement mécanique, l'accomplir parfaitement, sans aucun concours ultérieur de notre part. — Tout ce que nous devons dire ici concernant la fausse théorie de la science actuelle, c'est que l'orbite de la lune qui y résulte des prétendues perturbations causées par le soleil, n'est nullement identique avec l'orbite variable que découvre la vraie théorie par l'influence téléologique du soleil. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner notre loi (17) de la genèse du grand-axe; et l'on y verra en effet que, pour le même rayon vecteur r , et pour la même vitesse v du mouvement de la lune, le grand-axe $2a$ de son orbite dépend de la force centripète $(p.u^3)$, qui, dans les deux systèmes en question, dans l'ancien ou le faux, et dans le nouveau ou le vrai, est différente. Et il en est de même de l'excentricité ζ et de la position α de la ligne des apsides, comme on peut s'en convaincre également par la simple comparaison des anciennes expressions (122) et des nouvelles expressions (163) et (171) de ces éléments ζ et α . — Lorsque, dans la vraie force centripète (139), l'influence de l'action téléologique $\Delta.r^3$ est peu considérable, comme cela arrive pour les planètes, leurs orbites, dans les deux systèmes, sont peu différentes; mais pour la lune, où cette influence est considérable, la différence de son orbite, dans les deux systèmes, est également considérable.

Or, pour en venir à la théorie lunaire dont il s'agit, les lois générales qui président à la vraie mécanique céleste, et que nous venons de rappeler, savoir, les lois rigoureuses (47), (49), (163), (171), (58), (65), (70), (125) et (181), sont tellement claires et précises, que leur application à tout problème concernant le mouvement des astres dans un système proposé, est réellement donnée déjà par ces lois elles-mêmes, et par conséquent que c'est une chose superflue d'en parler séparément. Il suffit, en effet, dans tout problème distinct, de fixer les conditions spéciales de l'application de ces lois universelles, sans avoir besoin d'y ajouter aucune détermination nouvelle; et cette fixation des conditions spéciales est, pour ainsi dire, donnée immédiatement dans la nature même du problème distinct qui est proposé. Ainsi, pour établir la vraie théorie lunaire, il suffit d'abord de considérer le soleil comme la cause des forces motrices $\square$, τ , γ , qui opèrent la continuelle variation de l'orbite de la lune; et, pour cela, en rapportant cette orbite à l'écliptique, comme on le fait effectivement, si l'on désigne par $\square$ la somme des masses de la terre et de la

lune, et par (12) la masse du soleil, nos expressions (113) donneront immédiatement les trois forces techniques $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{V}$ en question, pourvu que, dans ce cas réciproque de détermination des plans des orbites, d'après ce que nous avons fait remarquer plus haut, immédiatement avant la formule (114), on change le signe de l'inclinaison η dans ces formules (113) et dans les deux dernières des trois formules (70) du canon astronomique. Et certes, toute l'application des susdites lois universelles (47), (49), . . . (181), est alors la chose du monde la plus facile; et elle n'exige même, pour ainsi dire, qu'un travail purement mécanique.

Nous nous bornerons donc à signaler rapidement les procédés pour opérer les intégrations qui entrent dans ces lois universelles. — Bien plus, ces procédés mêmes sont déjà expliqués amplement dans les méthodes absolues des mathématiques, que nous venons de dévoiler dans cet ouvrage. Aussi n'allons-nous les reproduire ici que pour prouver, en quelque sorte matériellement, que, pour l'accomplissement définitif de la théorie lunaire, comme de toutes les autres parties pratiques de la mécanique céleste, on n'a plus besoin que d'un travail purement mécanique. Cet exemple d'intégration servira même pour l'accomplissement pareil de l'ancienne ou fausse théorie lunaire, suivant nos présentes lois rigoureuses (122), (124), (70) et (125), en modifiant ici également, pour l'action du soleil sur la lune, nos expressions (113) des prétendues forces perturbatrices $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{V}$; de sorte que nous pourrions, dès aujourd'hui, considérer comme accomplie la théorie lunaire, dans ses deux systèmes, dans celui du désordre ou de prétendues perturbations, d'après les vues actuelles des géomètres, et dans celui de l'ordre ou de constitution téléologique du monde, d'après notre présente réforme de la mécanique céleste.

Or, dans cette constitution téléologique du monde, les intégrales qui entrent dans les susdites lois universelles (47) à (181), en nous bornant ici à les désigner par les numéros qui marquent leurs formules respectives, sont les suivantes . . . (197)

$$\begin{array}{ll} (\mu\nu) = [\text{Formule (58)}], & \Phi = [\text{Formule (65)}], \\ \zeta = [\text{Formule (163)}], & \pi = [\text{Formule (171)}], \\ \eta = [1^{\text{re}} \text{ Formule (70)}], & \psi = [2^{\text{de}} \text{ Formule (70)}], \\ \chi = [3^{\text{de}} \text{ Formule (70)}], & \Xi = [\text{Formule (178)}]. \end{array}$$

Mais, il est inutile, pour la détermination de la quantité Ξ , d'opérer la dernière (178) de ces intégrations, parce que, comme nous l'avons déjà dit, la solution (73) ou (180) du problème-universel, dans laquelle entre cette quantité Ξ , ne doit servir que pour des cas spéciaux où, d'après ce que nous avons indiqué, sous les marques (74) et (75), cette intégration peut suffisamment être

opérée par les nombres constants μ et ν . — Pour l'exacte solution du problème universel, il faut toujours employer la formule (181), qui donne la solution absolue de ce grand et final problème de la mécanique céleste, et qui ne contient plus aucune intégration immédiate. — Il ne reste donc qu'à opérer les sept premières de ces intégrations (197) pour achever complètement la théorie lunaire, et généralement toutes les questions pratiques de la mécanique céleste.

Dans l'ancien système de désordre, que poursuivent encore les géomètres, on aurait à opérer les intégrations suivantes . . . (198)

$$\begin{aligned} 2b &= [\text{Formule (127)}], & \Phi &= [\text{Formule (124)}], \\ \zeta &= [1^{\text{re}} \text{ Formule (122)}], & \alpha &= [3^{\text{re}} \text{ Formule (122)}] \\ \eta &= [1^{\text{re}} \text{ Formule (70)}], & \psi &= [2^{\text{re}} \text{ Formule (70)}]. \\ \chi &= [3^{\text{re}} \text{ Formule (70)}], \end{aligned}$$

On n'aurait donc également que sept intégrations à opérer dans ce faux système; mais, les quatre premières, et par conséquent les trois dernières qui en dépendent, seraient ici beaucoup plus compliquées. Néanmoins, pour la vérification immédiate des résultats, il importe, comme nous l'avons dit plus haut, d'opérer les premières (197), et les secondes (198) de ces intégrations, surtout afin d'établir complètement la théorie lunaire dans les deux systèmes, de l'ordre et du désordre, telle que nous l'avons portée en Angleterre sur la demande du Parlement britannique.

Toutes ces formules, dans les deux systèmes, le nouveau (197), et l'ancien (198), sont déterminées et développées suffisamment, et sont même amenées déjà à leur absolu état de simplicité, pour que les géomètres puissent s'en servir immédiatement, sans aucun concours ou explication ultérieure de notre part.

Nous nous bornerons donc à rappeler les procédés de nos méthodes absolues pour l'intégration des fonctions, en les appliquant immédiatement aux sept premières (197) des intégrations présentes, à celles qui constituent le système téléologique de l'ordre dans la construction mécanique du monde. — On pourra alors appliquer facilement, et pour ainsi dire littéralement, les mêmes procédés aux sept dernières intégrations (198), à celles qui appartiennent au prétendu système de désordre ou de perturbation dans le monde.

Or, les différentielles de toutes les quantités qu'il s'agit ainsi de déterminer par les intégrations en question (197) et (198), sont données complètement et rigoureusement par nos lois universelles (47) à (181), en y comprenant les expressions (113) des trois forces techniques $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{V}$. On pourra donc opérer immédiatement ces intégrations par la méthode primordiale (729). Et l'on obtiendra ainsi, par cette intégration des fonctions (197), les déterminations théoriques des quantités qui en sont les objets, savoir . . . (199)

RÉFORME DES

$$\begin{aligned} pw &= (pw)Fa + (pw)\Sigma(\psi) + (pw)S(\psi + 1), \\ \Phi &= (\Phi)Fa + (\Phi)\Sigma(\psi) + (\Phi)S(\psi + 1), \\ \zeta &= (\zeta)Fa + (\zeta)\Sigma(\psi) + (\zeta)S(\psi + 1), \\ a &= (a)Fa + (a)\Sigma(\psi) + (a)S(\psi + 1), \\ \pi &= (\pi)Fa + (\pi)\Sigma(\psi) + (\pi)S(\psi + 1), \\ \psi &= (\psi)Fa + (\psi)\Sigma(\psi) + (\psi)S(\psi + 1), \\ \chi &= (\chi)Fa + (\chi)\Sigma(\psi) + (\chi)S(\psi + 1); \end{aligned}$$

en distinguant ainsi les trois parties constituantes de la méthode primordiale (729), c'est-à-dire, les trois parties Fa , $\Sigma(\psi)$, $S(\psi + 1)$, par la quantité à laquelle elles se rapportent, et cela en attachant cette quantité à ces trois parties constituantes, et en l'y plaçant entre parenthèses avant les caractéristiques F , Σ , S de ces trois parties Fa , $\Sigma(\psi)$, $S(\psi + 1)$. Or, la première Fa des trois parties constituantes de la méthode primordiale (729), forme la valeur de la quantité cherchée pour l'époque $x = a$, valeur qui, comme FAIT astronomique, est donnée par l'observation. La seconde $\Sigma(\psi)$ de ces trois parties forme la détermination théorique de la quantité cherchée, détermination qui, d'après les expressions (637) et (729)', est généralement . . . (200)

$$\begin{aligned} \Sigma(\psi) &= \mathfrak{A}_1.P(1)_w.(x - a) + \mathfrak{A}_2.P(2)_w.(x - a)^2 + \mathfrak{A}_3.P(3)_w.(x - a)^3 + \\ &+ \mathfrak{A}_4.P(4)_w.(x - a)^4 \dots + \mathfrak{A}_w.P(\psi)_w.(x - a)^w; \end{aligned}$$

le nombre ψ indiquant le degré plus ou moins grand de cette détermination théorique de la quantité cherchée. Enfin, la troisième $S(\psi + 1)$ de ces parties constituantes de la méthode primordiale (729), achève, par un complément technique, la détermination générale de la quantité cherchée; complément qui, d'après les expressions (639) et (729)'', est généralement la série . . . (201)

$$\begin{aligned} S(\psi + 1) &= \left(\frac{x - a}{n + x} \right)^{w+1} \cdot \left\{ \mathfrak{B}_{w+1} + \mathfrak{B}_{w+2} \cdot \left(\frac{x - a}{n + x} \right) + \right. \\ &+ \mathfrak{B}_{w+3} \cdot \left(\frac{x - a}{n + x} \right)^2 + \mathfrak{B}_{w+4} \cdot \left(\frac{x - a}{n + x} \right)^3 + \text{etc. , etc.} \left. \right\}. \end{aligned}$$

Et, d'après tout ce que nous avons dit de cette application de la méthode suprême à l'accomplissement algorithmique de la mécanique céleste, déjà en 1815, en faisant connaître cette méthode suprême (142), et par conséquent d'après tout ce que nous avons déjà dit de la même application de la méthode primordiale (729), qui est une anticipation technique sur la méthode suprême (142), la première Fa de ses trois parties constituantes forme ce qu'il faudrait nommer généralement l'époque du mouvement céleste en question; la seconde $\Sigma(\psi)$ de ces trois parties, savoir, la détermination théorique (200) de ce mouvement, forme ses équations périodiques; et la dernière $S(\psi + 1)$ de ces trois parties

constituantes, savoir, le complément technique (201), forme proprement la véritable *équation séculaire* de ce même mouvement céleste.

Il est inutile de répéter ici que la réduction, plus ou moins grande, de l'équation séculaire (201), dépendra du degré ω , plus ou moins grand, de la détermination théorique (200) du mouvement céleste qui en est l'objet, de ce degré ω qui, dans chacune des intégrales (199), pourra être différent. Et il est également inutile de répéter ici ce que, sous la marque (779), nous avons dit pour la transformation en génération-neutre (773) à (775) de cette présente série complémentaire (201), qui forme ici l'équation séculaire, lorsque, par un degré insuffisant ω de la détermination théorique (200) du mouvement céleste en question, cette série complémentaire (201) devient divergente, ou du moins peu convergente pour des temps x très-éloignés de l'époque primitive a ; circonstance qui précisément donne à cette série complémentaire (201) la qualité d'une équation séculaire.

Mais, nous devons peut-être répéter ici, avec un peu plus de détail, ce que nous avons dit plus haut, à la suite des marques (893) à (920), concernant l'accomplissement de la méthode primordiale (729) par nos facultés intégrales, par ces facultés ou puissances d'ordre supérieur qui, donnant l'intégration soie des fonctions, et offrant ainsi le moyen de reproduire à volonté, pour des époques quelconques a_1, a_2, a_3 , etc., la fonction constante Fa , suppléent à l'imperfection impliquée dans la méthode primordiale par son élément technique ($x - a$), en la rendant ainsi propre à conduire à des résultats convergents à volonté, dans tous les cas et pour des temps quelconques, quelque éloignés qu'ils soient de l'époque primitive a , pour laquelle cette fonction Fa , formait ici l'époque des mouvements célestes, se trouve donnée par l'observation. — Ainsi, nous ferons remarquer qu'en considérant, dans l'expression générale (919) de ces facultés intégrales, la fonction Fx qui y est la fonction différentielle intégrée, comme étant une fonction donnée fx , si l'on désigne ici par la fonction Fx l'intégrale de cette fonction différentielle donnée ($fx \cdot dx$), l'expression générale (919) prendra la forme . . . (202)

$$Fx = \int (fx \cdot dx) = -L[(e^{xt})^{(r+1)-1}] + L[(e^{xt})^{(r+1)}] + \psi t + F(0);$$

la quantité $F(0)$ étant la constante C de cette intégration (919), et la fonction auxiliaire ψx ayant, d'après sa génération théorique (913), la détermination définie . . . (203)

$$\psi x = \frac{1}{1} \cdot fx + \frac{1}{1^{(1)}} \cdot \frac{d^2 fx}{dx^2} + \frac{1}{1^{(2)}} \cdot \frac{d^3 fx}{dx^3} + \frac{1}{1^{(3)}} \cdot \frac{d^4 fx}{dx^4} + \text{etc.}, \text{ etc.}$$

Or, pour avoir cette intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a_1$, en désignant ainsi par a_1 la valeur de x , pour laquelle la valeur constante $F(a_1)$ de l'intégrale générale Fx est donnée, il suffira, dans la présente expression générale (202); (22).

de faire $y=0$ et $z=a_1$; et l'on aura, pour cette valeur constante $F(a_1)$, l'expression . . . (204)

$$F(a_1) = L[(e^{ax})^{a_1}] + F(0);$$

qui, pour un système donné de ces facultés intégrales, fera connaître la constante indéterminée $F(0)$ par la valeur donnée $F(a_1)$. — Pour avoir ensuite la valeur de l'intégrale générale Fx , depuis $x=0$, jusqu'à $x=a_2$, en désignant par a_2 une quantité plus grande que a_1 , l'expression générale (202), en y faisant $y=0$ et $z=a_2$, donnera, pour cette deuxième valeur $F(a_2)$ de la fonction générale Fx , l'expression . . . (205)

$$F(a_2) = L[(e^{ax})^{a_2}] + F(0);$$

qui, en vertu de notre théorie des facultés [*Réputation de Lagrange*, (57), page 114], se décompose en celle-ci . . . (206)

$$F(a_2) = L[(e^{ax})^{a_2}] \times (e^{H(x+a_1)})^{(a_2-a_1)} + F(0),$$

et reçoit alors, en vertu de l'égalité (204), la détermination . . . (207)

$$F(a_2) = F(a_1) + L[(e^{H(x+a_1)})^{(a_2-a_1)}].$$

Ainsi, quelque grande que soit la valeur a_2 de la variable x , et quelque grand que soit conséquemment l'exposant $(a_2 - a_1)$ de la présente faculté, on pourra toujours, par la susdite loi (920) des facultés, déterminer la valeur en question $F(a_2)$ de la fonction générale Fx , en transformant au besoin, comme sous la marque (896) et (897), la loi (920) en *génération-neutre* (773) à (775). — Et il en serait de même si la valeur de la variable x était négative, c'est-à-dire, si l'on avait $x = -a_3$; car, l'expression générale (202), en y faisant $y=a_3$, et $z=0$, donnerait immédiatement . . . (208)

$$F(-a_3) = -L[(e^{ax})^{(a_3+1)}] + \psi x + F(0);$$

c'est-à-dire . . . (209)

$$F(-a_3) = -L[(e^{H(x-a_1)})^{a_3+1}] + F(0);$$

expression qui, en y éliminant la constante $F(0)$ par l'égalité (204), pour la ramener à la constante donnée $F(a_1)$, sera . . . (210)

$$F(-a_3) = F(a_1) - L[(e^{ax})^{a_1}] - L[(e^{H(x-a_1)})^{a_3+1}].$$

Ainsi, quelque grande que soit également cette valeur négative a_3 de la variable x , on pourra, comme dans l'expression (207), déterminer la fonction intégrale $F(-a_3)$, avec la même constante donnée $F(a_1)$. — Et par conséquent, lorsque la fonction auxiliaire ψx ne contient que la variable x , les deux lois (207) et (210) suffisent complètement pour la détermination immédiate des fonctions intégrales $F(+a_2)$ et $F(-a_3)$, quelque grandes que puissent être les

valeurs a_2 et a_3 de ces limites de leurs variables respectives. Mais, lorsque la fonction auxiliaire ϕx contient en outre d'autres inconnues qui sont fonctions de la variable x , comme cela aurait lieu dans son application à nos présentes intégrales (199) de la théorie lunaire, on ne saurait évaluer cette fonction auxiliaire ϕx qu'en la ramenant à une valeur donnée de la variable x , nommément à celle pour laquelle sont données les valeurs des inconnues en question qui sont contenues dans cette fonction ϕx . Et, pour peu que l'on examine les deux présentes lois (207) et (210), on découvre que la fonction ϕx s'y trouvera ramenée à la même valeur de la variable x , lorsqu'on y fera $ax = -1$. En effet, observant que, par notre théorie des facultés, on a . . . (211)

$$(e^{ax})^{-1} = \frac{1}{(e^{ax-1})^1} = \frac{1}{e^{a(x-1)}};$$

les deux lois (207) et (208), en y faisant $ax = -1$, prendront la forme . . . (212)

$$\begin{aligned} F(+a_2) &= F(-1) + U[(e^{a(x-1)})^{a_2+1}], \\ F(-a_3) &= F(-1) + \psi(a-1) - U[(e^{a(x-1)})^{a_3-1}]; \end{aligned}$$

et la fonction auxiliaire ϕx s'y trouvera amenée à la même valeur $x = -1$, à celle précisément à laquelle répond la constante donnée $F(-1)$ de ces intégrales. — Ainsi, quelles que soient les valeurs des inconnues qui sont contenues dans la fonction auxiliaire ϕx , construite par sa génération théorique (203), pourvu que l'on connaisse leurs valeurs correspondant à la valeur $x = -1$ de la variable x , et on les connaît toujours, parce que ce sont là, pour la même valeur $x = -1$, les constantes des intégrales qui donnent ces inconnues, on pourra toujours, par les présentes lois (212), déterminer les fonctions intégrales $F(+a_2)$ et $F(-a_3)$, quelque grandes que soient ces limites a_2 et a_3 , positive et négative, de la variable x ; et on le pourra toujours, en appliquant à ces facultés intégrales leur loi (220), et en la transformant au besoin en génération-nentre (274) et (297), comme nous l'avons dit plus haut, aux marques (896) et (897). — Il n'est même pas besoin de recourir ici à cette transformation, parce que les présentes facultés (212) peuvent, en vertu des susdites lois de leur théorie (*Refutation de Lagrange*, page 114), se décomposer en facultés à exposants aussi petits que l'on voudra, pour que les résultats de l'application de leur loi (220) soient toujours convergents. En effet, prenant pour ces exposants une quantité quelconque k , aussi petite que l'on voudra, les deux facultés (212) pourront être décomposées respectivement en un nombre τ et en un nombre τ de facultés, de manière que l'exposant de la dernière soit, de part et d'autre, également aussi petit que l'on voudra. Et alors, les deux présentes lois (212) prendront, pour l'intégration des fonctions, les formes suivantes : la

première, pour les limites positives de la variable x , la forme . . . (213)

$$F(+a_2) = F(-1) + L[(e^{H(x-1)})^{H_1}] + L[(e^{H(x-1+1)})^{H_1}] + \\ + L[(e^{H(x-1+1+1)})^{H_1}] . . . + L[(e^{H(x-1+1+1+1)})^{H_1}];$$

et la seconde, pour les limites négatives de la variable x , la forme . . . (214)

$$F(-a_3) = F(-1) + \psi(x-1) - L[(e^{H(x-1)})^{H_1}] - L[(e^{H(x-1-1)})^{H_1}] - \\ - L[(e^{H(x-1-1-1)})^{H_1}] . . . - L[(e^{H(x-1-1-1-1)})^{H_1}];$$

dans laquelle dernière on a accessoirement la détermination complémentaire . . . (215)

$$\psi(x-z-\tau k) = \psi(x-z-(\tau-1)k) - \frac{d^k \psi(x-z-(\tau-1)k)}{1.2.x} . k + \\ + \frac{d^2 \psi(x-z-(\tau-1)k)}{1.2.d.x^2} . k^2 - \frac{d^3 \psi(x-z-(\tau-1)k)}{1.2.3.d.x^3} . k^3 + \text{etc.};$$

en supposant $z=1$.

Or, il faut ici remarquer qu'en faisant successivement, dans la première (213) de ces deux lois, $a_2=(k-1)$, $a_2=(2k-1)$, $a_2=(3k-1)$, etc., et en même temps $\tau=1$, $\tau=2$, $\tau=3$, etc., on obtiendra progressivement les valeurs des intégrales $F(k-1)$, $F(2k-1)$, $F(3k-1)$, etc.; et qu'en faisant aussi successivement, dans la seconde (214) de ces lois, $a_3=(k+1)$, $a_3=(2k+1)$, $a_3=(3k+1)$, etc., et en même temps, $\tau=1$, $\tau=2$, $\tau=3$, etc., on obtiendra de même progressivement les valeurs des intégrales $F(-k-1)$, $F(-2k-1)$, $F(-3k-1)$, etc. Et ces intégrales, étant ainsi obtenues dans un système de quantités inconnues, pareil à notre système (199) de la théorie lunaire, formeront précisément les valeurs progressives des inconnues que peut contenir la fonction auxiliaire ψx , et qui correspondront ainsi aux valeurs successives $(k-1)$, $(2k-1)$, $(3k-1)$, etc., et $-(k+1)$, $-(2k+1)$, $-(3k+1)$, etc., de la variable x ; de sorte que ces déterminations ou évaluations successives des fonctions problématiques $F(+a_2)$ et $F(-a_3)$ pourront être obtenues immédiatement par ces lois elles-mêmes (213) et (214), sans avoir besoin de recourir à aucun autre procédé algorithmique. De plus, par le choix arbitraire des exposants k , que l'on pourra prendre aussi petits que l'on voudra, l'application de la loi des facultés (220) aux présentes facultés qui composent les deux systèmes d'intégration (213) et (214), donnera des résultats qui seront toujours convergents à volonté.

Or, ce sont ces deux systèmes (212) à (215) d'intégration finie des fonctions qu'il faut joindre à l'application quelconque (199) de la méthode primordiale (229), pour donner à cette méthode absolue son accomplissement final. En effet, la quantité a qui entre dans les trois parties constituantes Fa , $\Sigma(\psi)$,

$S(n+1)$, de la méthode primordiale (729), et qui, provenant de son élément technique ($x=n$), trouble la pureté de sa génération théorique, en la rendant parfois divergente, cette quantité a , disons-nous, en devenant arbitraire par les deux systèmes d'intégration finie (212) à (215), au moyen de nos facultés algorithmiques, se trouve en quelque sorte éliminée de la méthode primordiale (729); et cette méthode absolue, en devenant ainsi purement théorique, par le choix libre de son élément technique a et de l'intégrale correspondante Fa , subsiste maintenant par elle-même, comme véritable méthode absolue (*). Aussi, est-ce dans cette combinaison de la méthode (729) avec les intégrations finies (212) à (215), par lesquelles elle reçoit son accomplissement final, en devenant tout à fait théorique, qu'il faudra désormais considérer et appliquer toujours cette méthode primordiale, pour entrer dans la nouvelle et dernière période des mathématiques, qu'elle doit ainsi ouvrir actuellement.

Quant à l'origine de la variable indépendante x , qu'il faut fixer de manière à ce que la constante $F(n1)$, donnée pour l'intégration, réponde à la valeur de $x = -1$, en supposant ainsi $n1 = -1$, afin de faire correspondre à la même constante $F(-1)$ les deux systèmes (212) d'intégration finie, il est inutile de rappeler que cette origine de la variable indépendante est toujours arbitraire, et par conséquent qu'elle peut toujours être fixée à volonté par l'addition d'une quantité constante, positive ou négative. — Mais, pour ce qui concerne la présente théorie lunaire, et généralement la nouvelle mécanique céleste, il faut, dans les intégrales (199), comme dans toutes les autres déterminations des mouvements des astres; donner à l'unité du temps, qui forme ici la variable indépendante x , une quantité résultant de la combinaison de l'unité linéaire avec l'unité dynamique des masses, nommément la quantité qui, parmi les lois théoriques de l'astronomie (1) à (45), résulte de la loi téléologique (33), par laquelle se trouve établie l'harmonie entre le temps, représenté par la vitesse moyenne v , l'espace, représenté par le paramètre $2p$, et la force, représentée par la masse M . Toutefois, l'origine de cette mesure harmonique du temps, qui devient indispensable dans la nouvelle mécanique céleste, demeure arbitraire; et elle pourra conséquemment être fixée de manière à répondre aux conditions des deux systèmes (212) de notre intégration finie.

Ainsi, dans la véritable théorie lunaire (197), nous obtiendrons, par la pré-

(*) Dans l'exemple que, sous les marques (685) à (728), nous avons donné pour l'application de la méthode primordiale (729), nous avons éliminé ainsi l'influence de l'élément technique a , en profitant de la connaissance préalable de la constante Fa dans cette intégrale logarithmique, pour des valeurs progressives de la quantité a . Et nous avons pu ainsi assigner, sous la marque (728), la limite de ces opérations numériques. — Mais, cette connaissance préalable de la constante Fa , correspondant à des valeurs progressives de l'élément technique a , n'existe pas généralement. Et c'est pour la remplacer que nous accomplissons ici la méthode primordiale (729) par nos présentes intégrations finies (212), opérées avec nos facultés algorithmiques.

seule application accomplie de la méthode primordiale (729), combinée avec nos facultés intégrales (212), la détermination rigoureusement théorique (199) des sept quantités fondamentales qui, sous la forme d'intégrales, entrent dans cette difficile théorie. — Mais, ces déterminations (199) des sept quantités fondamentales (197), ne les feront pas encore connaître immédiatement, parce que, dans leurs expressions respectives, ces déterminations théoriques (199) impliqueront encore toutes les quantités inconnues (197) qu'elles servent à fixer; de sorte que ces expressions (199) ne formeront encore que des équations pour la détermination définitive des sept quantités en question. Et c'est ici qu'il faudra maintenant appliquer notre fielle méthode (887) de la solution des équations conjointes, en mettant les équations (199) sous la forme . . . (216)

$$\begin{aligned} \varphi_1 [(p\nu), \quad \Phi, \quad \zeta, \quad \alpha, \quad \pi, \quad \psi, \quad \chi] &= 0, \\ \varphi_2 [p\nu, \quad (\Phi), \quad \zeta, \quad \alpha, \quad \pi, \quad \psi, \quad \chi] &= 0, \\ \varphi_3 [p\nu, \quad \Phi, \quad (\zeta), \quad \alpha, \quad \pi, \quad \psi, \quad \chi] &= 0, \\ \varphi_4 [p\nu, \quad \Phi, \quad \zeta, \quad (\alpha), \quad \pi, \quad \psi, \quad \chi] &= 0, \\ \varphi_5 [p\nu, \quad \Phi, \quad \zeta, \quad \alpha, \quad (\pi), \quad \psi, \quad \chi] &= 0, \\ \varphi_6 [p\nu, \quad \Phi, \quad \zeta, \quad \alpha, \quad \pi, \quad (\psi), \quad \chi] &= 0, \\ \varphi_7 [p\nu, \quad \Phi, \quad \zeta, \quad \alpha, \quad \pi, \quad \psi, \quad (\chi)] &= 0; \end{aligned}$$

et en distinguant, dans chacune de ces équations, par des parenthèses, celle des inconnues qui, par la méthode primordiale (199), s'y trouve déterminée principalement.

Toutefois, quelque facile que soit la solution de ces équations conjointes (216), comme nous le verrons à l'instant, cette solution n'est pas absolument nécessaire; car, on peut déjà, par les seuls résultats (199) que donne immédiatement la méthode-primordiale accomplie (729) et (212), déterminer, avec une exactitude à volonté, les sept quantités fondamentales (197), dont il est question. En effet, ces quantités inconnues (197) entrent, à la vérité, dans les deux dernières parties constitutives $\Sigma(\psi)$ et $\Sigma(\psi + 1)$ de leurs déterminations (199), et elles y entrent nommément, d'abord, en toute leur généralité, dans les fonctions théoriques $P(1)_w$, $P(2)_w$, $P(3)_w$, etc., de la seconde (200) de ces parties constitutives, et ensuite, en valeurs particulières, dans les coefficients $\Sigma_w + 1$, $\Sigma_w + 2$, $\Sigma_w + 3$, etc., de la troisième (201) de ces mêmes parties constitutives, en valeurs particulières, disons-nous, qui dépendent à chaque fois de la valeur de l'élément technique α . Mais, comme les VALEURS MOYENNES de ces sept quantités inconnues (197) sont données par les observations astronomiques, on peut, pour avoir une première détermination générale de ces quantités, introduire, à leur place, leurs valeurs moyennes dans la seconde (200) et dans la troisième (201) des parties constitutives de leurs expressions

(199). Et cette première détermination, qui déjà sera suffisamment exacte, puisque les valeurs moyennes ne s'écartent pas trop des valeurs générales des quantités en question, pourra alors servir pour obtenir, par les mêmes expressions (199), une deuxième détermination plus exacte de ces mêmes quantités en question (197). Bien plus, en ne perdant pas de vue que les fonctions théoriques $P(1)_w$, $P(2)_w$, $P(3)_w$, etc., qui forment la deuxième partie constituante (200) de la méthode primordiale, peuvent encore, comme les fonctions génératrices Ω , Ω_1 , Ω_2 , etc. de la méthode suprême (142) qu'elles représentent, impliquer quelques éléments arbitraires, on peut, sans crainte d'aucune erreur, introduire, dans ces fonctions théoriques $P(1)_w$, $P(2)_w$, etc., à la place des quantités inconnues (197), leurs valeurs moyennes, parce que, comme nous l'avons fait remarquer en exposant la méthode primordiale, la série complémentaire $S(\mathfrak{C} + 1)$, c'est-à-dire, la troisième partie constituante (201) des expressions (199), qui, en vertu des formules (667) à (670), est construite par les éléments (635) des fonctions théoriques $P(1)_w$, $P(2)_w$, etc., tient compte de ce qu'il peut y avoir d'inexact dans ces fonctions théoriques P ; et elle complète ainsi, dans toute son exactitude, la détermination des quantités cherchées. — On peut donc, par les seules expressions (199), que donne immédiatement la méthode primordiale (729), obtenir la détermination exacte des quantités inconnues (197) dont il est question; et on le peut surtout en combinant, avec cette méthode primordiale (729), nos présentes facultés intégrales (212), par lesquelles, en donnant à l'élément technique a une valeur proche de la valeur de la variable indépendante x , c'est-à-dire, une valeur proche de celle qui mesure ici le temps x , on élimine l'influence de cet élément a , et l'on rend ainsi convergente à volonté cette génération (199) des quantités en question.

On pourra donc, comme nous l'avons avancé, se dispenser de résoudre les équations (216) pour obtenir la détermination exacte des quantités (197). Mais, pour arriver à la solution rigoureusement théorique de notre présent problème des mouvements de la lune, comme de tous les autres problèmes de la mécanique céleste, il faut en écarter de plus en plus l'influence de la série complémentaire $S(\mathfrak{C} + 1)$, c'est-à-dire, de cette troisième partie constituante (201) des expressions (199), qui est purement technique, et qui précisément, dans le procédé que nous venons d'indiquer, sert à compléter la détermination exacte des quantités cherchées (197). Et, pour cela, la solution des équations (216) devient nécessaire. En effet, augmentant de plus en plus le nombre $\mathfrak{C}$ des fonctions théoriques $P(1)_w$, $P(2)_w$, $P(3)_w$, etc., dans la seconde partie constituante (200) de la méthode primordiale, les premiers termes de la série complémentaire (201) disparaissent de plus en plus, comme nous l'avons vu à la marque (727) pour le aussit exemple (685), et comme cela est évident généralement; et supposant alors que la valeur de l'élément technique a est aussi proche que l'on voudra, de la valeur de la variable indépendante x , comme on

peut toujours la rendre telle par le moyen de nos facultés intégrales (312), la valeur de la série complémentaire (301) deviendra de plus en plus petite, et l'on pourra même, sans aucune erreur, la supprimer entièrement dans les équations (216), en y supposant ainsi l'élément a comme indéfiniment proche de la variable x . On pourra donc, par la solution de ces équations (216), et y supprimant les séries complémentaires, provoquant de la troisième partie des expressions (199), approcher indéfiniment, autant que l'on voudra, de la solution rigoureusement théorique du problème proposé. Et l'on pourra ensuite, après avoir ainsi obtenu la génération purement théorique des quantités inconnues (197) dont il est question, suppléer à ce qu'il peut y avoir d'inexact, par la détermination des séries complémentaires $S(x+1)$ dans les expressions fondamentales (199), et y introduisant, dans les fonctions théoriques $P(1)_m$, $P(2)_m$, $P(3)_m$, etc., de leurs secondes parties $\Sigma(x)$, à la place des inconnues (197), leurs valeurs théoriques que l'on aura obtenues par la solution des équations conjointes (216). — Comme telles, ces séries complémentaires $S(x+1)$, déterminées ainsi, en y supposant toujours la valeur de l'élément technique a comme proche de la valeur de la variable x , formeront à volonté de très-petites quantités; et c'est seulement dans cet état qu'elles pourront former de véritables équations séculaires dans la mécanique céleste; équations qui, sans cette DÉTERMINATION ABSOLUE, SONT UN VÉRITABLE NON-SENS dans l'actuelle mécanique céleste.

Quant à la solution elle-même des équations (216), dans lesquelles on aura ainsi supprimé les séries complémentaires $S(x+1)$, en les supplant à volonté par la valeur adéquate des constantes F_n , formant les époques de ces mouvements célestes, c'est-à-dire, par une valeur propre à tenir compte de cette suppression des séries complémentaires, elle, cette solution, ne présente aucune difficulté, en opérant par notre procédé final de la solution générale des équations conjointes (887). En effet, les différentielles directes (888) et (890), qui sont les éléments principaux de ce procédé, sont ici données immédiatement par les lois elles-mêmes (197) qui fixent le problème; et les différentielles réciproques (889), qui forment les éléments accessoires du même procédé, peuvent facilement être déduites des différentielles directes, d'après nos lois (311) et (312), conformément à celles que nous avons produites sous les marques (759) et (828); de sorte qu'eo suivant ainsi ce procédé final de la solution des équations conjointes (887), on peut appliquer immédiatement, à la solution des présentes équations (216), notre élémentaire méthode secondaire (806), et spécialement son expression normale (808), en se conformant aux règles très-simples que nous avons indiquées pour la solution des équations générales (887). Ainsi, d'après ces règles, les présentes équations (216) serviront d'abord, chacune respectivement, par l'application du procédé normal (808), à la détermination séparée de celle des inconnues qui, dans chacune de ces équations, est distinguée par des parenthèses, et qui a été développée dans cette équation,

par l'application préalable de la méthode primordiale, dans les expressions primitives (199), qui sont transformées en ces présentes équations proposées (216). Et ensuite, pour ce qui concerne les valeurs arbitraires w_1, w_2, w_3 , etc., que, d'après ces mêmes règles, il faut introduire, à la place des quantités inconnues, dans l'application du procédé normal (808) à chacune des équations (216), il faudra prendre, pour ces valeurs arbitraires w_1, w_2, w_3 , etc., les susdites valeurs moyennes de ces inconnues, et mieux encore, leurs susdites premières déterminations, telles que les donnent immédiatement les expressions primitives (199) par l'introduction de ces valeurs moyennes dans les fonctions théoriques $P(1)_m, P(2)_m, P(3)_m$, etc., de la seconde partie (200) de ces expressions primitives (199).

Nous obtiendrons donc facilement, sous la forme de l'expression normale (808), qui sert à cette solution des équations (216), les déterminations respectives des quantités inconnues en question (197), qui donnent la solution finale de cette véritable théorie lunaire. Et, sans qu'il soit ici nécessaire de recourir à leur transformation en génération-neutre (811) et (812), ces déterminations finales présenteront immédiatement la génération théorique des inconnues (197), c'est-à-dire, une génération toujours convergente, lorsque, pour les valeurs arbitraires w_1, w_2, w_3 , etc., on prendra les susdites premières déterminations de ces inconnues, résultant de leurs expressions primitives (199), ces premières déterminations qui, d'après ce que nous avons fait remarquer, peuvent être portées à une exactitude aussi grande que l'on voudra, du moins à une exactitude assez grande pour que la génération des inconnues par l'expression normale (808) soit toujours convergente, et pour que la solution du problème soit rigoureusement complète.

Il ne nous reste donc, pour accomplir entièrement cette théorie lunaire, qu'à déterminer l'influence que peut y exercer le déplacement du plan de l'écliptique, auquel se trouve ici rapporté le plan de l'orbite de la lune. — Nous allons le faire par deux procédés, l'un analytique, suivant la fausse voie actuelle de la science, et l'autre synthétique, pour arriver à la perfection absolue. — Commençons par le premier de ces procédés.

En nous rappelant ici les lois (83) qui président à la relation de trois plans, lois que nous avons produites dans cet ouvrage, si nous considérons le plan de l'écliptique comme formant celui de ces trois plans que nous nommons *plan intermédiaire*, et qui s'y trouve déterminé, dans son rapport au *plan fixe*, par les quantités $(n), (\psi), (\chi)$, il est manifeste que le *plan variable* de l'orbite lunaire se trouvera déterminé, d'abord, dans son rapport au plan de l'écliptique, par les quantités mêmes n, ψ, χ , qui entrent dans nos présentes formules (197) et (199), et de plus, dans son rapport au plan fixe, par les quantités H, W, X . Ainsi, lorsqu'on rapporte l'écliptique au plan fixe par les quantités $(n), (\psi), (\chi)$, et lorsqu'on connaît d'ailleurs les quantités n, ψ, χ , par

lesquelles l'orbite lunaire se trouve rapportée au plan de l'écliptique, on pourra, par les lois (83), déterminer les trois quantités H , Ψ , X , qui établissent la relation de l'orbite lunaire par rapport au plan fixe. — Considérant alors instantanément l'orbite lunaire comme fixe, et par conséquent les quantités H , Ψ , X , comme invariables, si l'on prend, sur les lois (83), leurs variations, d'une part, par rapport aux quantités (n) , (ψ) , (χ) , et de l'autre, par rapport aux quantités n , ψ , χ , on obtiendra six, ou proprement trois équations linéaires, par lesquelles on pourra déterminer facilement les variations δn , $\delta \psi$, $\delta \chi$, par les variations $\delta(n)$, $\delta(\psi)$, $\delta(\chi)$. On aura donc facilement les trois déterminations . . . (217)

$$\delta n = f_1 \{ \delta(n), \delta(\psi), \delta(\chi); H, \Psi, X \},$$

$$\delta \psi = f_2 \{ \delta(n), \delta(\psi), \delta(\chi); H, \Psi, X \},$$

$$\delta \chi = f_3 \{ \delta(n), \delta(\psi), \delta(\chi); H, \Psi, X \};$$

dans lesquelles les caractéristiques f_1 , f_2 , f_3 , désignent les fonctions qui résulteront ainsi de la solution des six ou trois équations linéaires, provenant de la variation des équations (83). Et ce seront là les variations que subiront à chaque instant les quantités n , ψ , χ , qui fixent la position de l'orbite lunaire, par la variation des quantités (n) , (ψ) , (χ) , qui fixent la position de l'écliptique. En changeant maintenant ces variations en différentielles, pour que l'on puisse considérer les quantités H , Ψ , X , comme variables, et prenant les intégrales des expressions (217), on obtiendra, pour l'influence du déplacement de l'écliptique sur les quantités n , ψ , χ , influence finie que nous marquerons par n' , ψ' , χ' , les déterminations . . . (218)

$$n' = \int \left[f_1 \{ d(n), d(\psi), d(\chi); H, \Psi, X \} \right],$$

$$\psi' = \int \left[f_2 \{ d(n), d(\psi), d(\chi); H, \Psi, X \} \right],$$

$$\chi' = \int \left[f_3 \{ d(n), d(\psi), d(\chi); H, \Psi, X \} \right].$$

Ce sont donc là les trois quantités qu'il faudra ajouter respectivement aux susdites trois quantités n , ψ , χ , qui mesurent le déplacement propre de l'orbite lunaire elle-même, et qui seront données par les trois dernières des expressions (199), et par les trois dernières des équations (216).

Quant aux causes qui produisent les déplacements $d(n)$, $d(\psi)$, $d(\chi)$, de l'écliptique, ce sont notoirement les actions des planètes sur la terre, et même une action pécille de la lune. En déterminant donc, par nos présentes et décisives expressions (113), les forces résultantes ζ , notre canon astronomique (70) fera connaître, pour un temps quelconque x , les quantités en question

(η), (ψ), (χ), qui déterminent la position variable du plan de l'écliptique, et dont les différentielles $d(\eta)$, $d(\psi)$, $d(\chi)$, sont données immédiatement par le canon (70), lorsque la force technique ζ est donnée par les expressions (113).

Mais, comme cela est manifeste, ce procédé (218), quoique rigoureusement exact, est purement analytique; et comme tel, il implique nécessairement quelque complication superflue; complication qui provient ici évidemment des quantités étrangères (η), (ψ), (χ), et H , Ψ , X , c'est-à-dire, en principe, de l'introduction d'un plan fixe dans la question. Il faut donc chercher à résoudre cette question par une voie purement synthétique, en écartant toute considération étrangère à cette question, et en obtenant ainsi la solution la plus simple, la solution absolue.

Nous pouvons y parvenir par l'intervention de nos lignes fixes dans les différents plans, comme nous l'avons déjà annoncé plus haut. — Il suffit, pour cela, de remarquer généralement, pour deux plans quelconques M et N en relation pareille, qu'en vertu du déplacement du plan M , auquel se trouvait d'abord rapporté le plan variable N , par les trois quantités η , ψ , χ , dont les variations ou les différentielles sont déterminées par le canon (70) et (125), il faut joindre, à ces premières variations $d\eta$, $d\psi$, $d\chi$, celles qui, d'après le même canon (70) et (125), résultent du déplacement du plan M , considéré d'abord comme fixe, en faisant simplement attention à l'échange des fonctions que remplissent ces deux plans M et N dans la formation de l'angle de leur intersection. — Ainsi, en désignant par Φ' la position de l'astre dans le plan M , considéré d'abord comme fixe, par w' la vitesse de son mouvement dans ce plan, ou bien par w' la vitesse moyenne de ce mouvement, par ζ' la force technique ou prétendument perturbatrice qui agit sur cet astre perpendiculairement à ce même plan M , par $d\eta'$ la nouvelle variation de l'inclinaison η des deux plans M et N , par $d\psi'$ la nouvelle variation du lieu ψ de leur nœud, et par $d\chi'$ la nouvelle variation de la position χ de la ligne fixe du plan N , l'une et l'autre de ces quantités ψ et χ étant toujours mesurées depuis la ligne fixe du plan M , de celui dont nous considérons maintenant le déplacement ou la rotation autour du rayon vecteur Φ' , nous aurons généralement, en vertu du canon astronomique (70) et (125), en prenant immédiatement les intégrales de ces nouvelles différentielles $d\eta'$, $d\psi'$, $d\chi'$, les déterminations . . . (219)

$$\begin{aligned}\eta' &= - \int \left\{ \cos(\Phi' - \psi) \cdot \frac{\zeta' \cdot dx}{w'} \right\}, \\ \psi' &= - \int \left\{ \sin(\Phi' - \psi) \cdot \frac{\zeta' \cdot dx}{w' \cdot \tan \eta} \right\}, \\ \chi' &= + \int \left\{ \sin(\Phi' - \psi) \cdot \tan \frac{1}{2} \eta \cdot \frac{\zeta' \cdot dx}{w'} \right\};\end{aligned}$$

et par conséquent, pour la différence des deux dernières de ces quantités, la détermination . . . (220)

$$\chi' - \psi' = + \int \left\{ \sin(\Phi' - \psi) \cdot \frac{h' \cdot dx}{w' \cdot \sin \pi} \right\}.$$

En appliquant donc cette théorie générale du déplacement des plans, à notre présente théorie lunaire, les quantités π , ψ , χ , que nous venons ici de déterminer par le procédé synthétique, seront les mêmes que celles que, sous la marque (218), nous avons déterminées par le procédé analytique, avec d'extrêmes complications. Et par conséquent, les présentes trois quantités (219), qui proviennent du déplacement du plan de l'écliptique, seront les quantités qu'il faudra ajouter respectivement aux trois quantités π , ψ , χ , qui mesurent le déplacement de l'orbite lunaire elle-même, et qui, comme nous l'avons déjà dit, seront données par les trois dernières des expressions (199), et par les trois dernières des équations (216), en observant que c'est par les mêmes procédés d'intégration (199) et de solution (216) que seront données les présentes quantités (219) et (220). — Mais, il faut ici remarquer que, lorsqu'il s'agit de la théorie lunaire, l'astre dont la position est marquée par Φ , doit être le soleil, quoique les forces techniques h soient celles qui s'exercent sur la terre. Ainsi, dans la différence même de l'action de la lune sur la terre et sur le soleil, telle que cette action h sera donnée immédiatement par la troisième de nos expressions (113), sans qu'on ait besoin d'y faire aucun changement, cette action h s'appliquera à la terre, comme elle s'appliquera toujours à la terre dans tous les autres déplacements que pourra subir le plan de l'écliptique. Il faudra donc, dans la théorie lunaire, transporter généralement au soleil cette action technique ou prétendument perturbatrice h , en changeant simplement son signe, positif ou négatif. Et il est sans doute superflu d'ajouter que la vitesse v du mouvement du soleil doit être ici la vitesse réciproque du mouvement de la terre. — Mais, nous devons, pour l'emploi général des signes, prévenir qu'en supposant que les mouvements des astres dans les deux plans ont lieu dans le même sens direct, les signes qui se trouvent attachés à toutes les quantités (70), (125), (219) et (220), proviennent naturellement de la considération de ce que les forces techniques h et h' , telles qu'elles entrent respectivement dans ces expressions (70), (125), (219) et (220), agissent l'une et l'autre dans le même sens par rapport à leurs plans respectifs, et nommément de manière que si l'angle π de l'inclinaison de ces plans est mesuré depuis le susdit plan M, qui est d'abord considéré comme fixe, les forces h et h' agissent respectivement dans la direction de l'arc qui forme cette mesure π . Ainsi, en ayant constamment égard aux signes qu'auront respectivement ces forces techniques h et h' , telles qu'elles seront données par nos présentes expressions générales (113), et aux signes que recevront respectivement toutes les autres quantités qui entrent dans les expressions (70), (125), (219) et (220), ces expressions des quantités π , ψ , χ , seront vraies généralement, dans tous les cas. — Il est sans doute inutile de faire ici remarquer également, comme nous l'avons fait plus haut, à l'égard des ex-

pressions (70) et (125), que, pour que les présentes expressions (219) et (220) soient rigoureusement exactes, il faudrait aussi y substituer, à la place de la vitesse moyenne v' du mouvement de l'astre Φ , sa susdite vitesse réelle v .

Nous avons donc maintenant, dans toutes ses conditions et dans son entier accomplissement, la solution générale, et surtout la solution théorique et rigoureuse du grand, et, jusqu'à ce jour, invincible problème des mouvements de la lune, cette solution irréfragable qui établit enfin et réalise en même temps la vraie théorie lunaire. — Et c'est cette théorie accomplie que, sur la demande du Parlement britannique, nous avons portée en Angleterre.

Mais, comme on peut le concevoir maintenant, il fallait, pour apprécier une telle théorie, une haute science, et malheureusement cette science n'existe pas encore en Angleterre, pas plus qu'elle n'existe encore en France. Le temps viendra sans doute où les savants anglais pourront comprendre cette grande solution d'une question qui, par le prix extraordinaire que le Parlement y a attaché, paraît décisive pour la domination maritime de la Grande-Bretagne. En attendant, nous en appelons au monde savant, surtout à la postérité, en portant ici le défi, pour la garantie de cette production scientifique, qu'on y découvre, non pas un point défectueux, mais seulement un point où l'on pourra désirer une plus grande perfection. — Quant à nous, qui, dans nos recherches scientifiques, sommes conduits toujours par les principes de la philosophie absolue, nous savons, avec certitude, que le monde n'aura jamais une théorie lunaire différente, à moins qu'on n'y applique finalement, pour couronner la science, notre méthode suprême elle-même (142), (143), etc.; et nous savons aussi que, pour arriver à cette couronne de la science, il se passera encore des siècles.

Quant à l'accomplissement scientifique que présente cette grave théorie lunaire, les savants qui l'auront approfondie, reconnaîtront qu'il ne faut réellement plus qu'un travail mécanique pour l'amener à ses immédiates conditions pratiques. En effet, ils reconnaîtront qu'il ne reste plus à y faire rien autre qu'à prendre des différentielles sur des fonctions données et bien déterminées; et certes, nul géomètre n'osera considérer cette différentiation des fonctions données autrement que comme un simple travail mécanique. — Enfin, pour ce qui concerne l'exactitude de la présente solution de ce grand problème, nous avons déjà fait remarquer, et personne ne saurait le contester, que, sous le point de vue théorique, cette exactitude est absolument rigoureuse. On pourra donc, dans son exécution pratique, s'arrêter à tel degré de perfection que l'on voudra. Et ces degrés de perfection s'obtiendront ici, non par la mutilation des formules, à la façon de la Mécanique céleste de Laplace, mais par la simple limitation des susdites différentielles, en considérant, plus ou moins, comme constantes dans leurs valeurs moyennes, les quantités peu variables.

Nous venons de dire que les savants anglais qui, par leur actuelle incompe-

tence scientifique, ont été forcés de décliner l'examen de cette déciaive théorie linnaire, en rendant ainsi vaines les grandes promesses du Parlement britannique, parviendront sans doute un jour à la science nécessaire à cet examen. Malheureusement, la science qui suffit pour reconnaître la vérité, ne suffit pas toujours pour l'avouer. Il faut la probité pour faire cet aveu; et quoique nous ayons une haute idée du caractère moral des savants anglais en général, tout comme nous l'avons du caractère moral des savants de tous les pays, nous savons qu'il existe, dans toutes les institutions scientifiques, des intrigants qui, pour suppléer à leur défaut de science, cherchent et parviennent à s'emparer de la gestion publique de ces institutions, et faussent ainsi, par leurs impositions, toutes les tendances loyales de ces corporations, si innocentes dans leur origine.

Nous en avons déjà parlé dans les *Prolégomènes du Messianisme* (pag. 302 et suivantes), et nous produirons toute cette scandaleuse histoire dans notre susdit *Manifeste historique*, après que nous aurons encore une fois réclamé la justice auprès du Bureau des Longitudes de Londres, non pour ce qui dépend de la science, sur laquelle nous ne pouvons pas compter encore, mais du moins pour ce qui dépend de la probité, qui, depuis le décès des susdits intrigants, doit être redevenue, dans ce corps illustre, le critérium de la haute et incontestable loyauté nationale. Ainsi, sur les trois griefs que nous avons articulés dans les *Prolégomènes* (page 304), nous renverrons à la postérité la réparation des deux premiers, et nous nous bornerons à demander la réparation du dernier, qui est établi légalement par le serment authentique d'un célèbre ecclésiastique anglais, sur ce serment solennel dont voici le texte original :

Deposition of the Rev. Frederick Nolan, Sworn at the Mansion-House, before the Lord Mayor, november 14, 1821.

FREDERICK NOLAN, of Earl street, in the City of London, clerk, deposeth as follows, and declares upon oath, — that, in making this deposition, he is not moved by favour or prejudice towards any of the parties mentioned, but influenced by the simple consideration of justice towards that which he believes to be aggrieved, and that he makes his deposition thus solemn with the view of obtaining credit in a statement, which so wholly surpasses credibility, that, without such an attestation, he deems it not likely to be believed; viz :

1. That in « the Nautical Almanack (*) » for the year 1822, published by the authority, and under the licence (p. xvi), of the Commissioners of Longitude, a Table of Refractions is given (p. 145 sqq.); and that it is declared, under the same licence and authority (p. i), « to be computed by a simple

(*) An official work destined for the English Marine.

formula, *derived originally from theory*, * and more expressly (p. 148), * to be computed *upon principles*, explained by Dr. Young, in the Philosophical Transactions for 1819. *

2. That by an Act of Parliament (58 Geo. III. cap. xx.), which is published in the same Almanack, a reward is offered (*Ibid.*, § 8.) * to any person who may have made *Proposals, Inventions, and Tables, or Corrections and Amendments* of former Inventions and Tables, ingenious in themselves; and useful to Navigation. *

3. That, in reply to the above requisition of the Legislature, and in compliance with both its conditions, a quarto Manuscript, containing a *Correction* of * the theory * from whence the Tables of Refractions, published under the forementioned licence and authority, are derived, and a *Scientific Theory* for a new set of Tables, founded on a general law; was presented to the Board of Longitude by M. Hoëné Wronski, and that the receipt of the Manuscript, containing this Correction and Theory, is acknowledged by letter of Lord Melville, President of the Board of Longitude, and of Dr. Young, Secretary of the Board of Longitude, respectively dated April 18, 1820 (*).

4. That in this letter, in which the Secretary of the Board acknowledges the receipt of Mr. Wronski's Manuscript, he likewise acknowledges the Corrections made by that learned foreigner in his theory of Refractions, and declares, that he would * acknowledge to the Board, that Mr. Wronski had detected a *blunder* in his hasty Postscript (**) on Refractions *, which is offered, under the licence of the Commissioners, as containing * the theory and principles * from whence the Tables of the Nautical Almanack * are originally derived. *

5. That in the Journal of Science (***), for July 1821 (fifteen months after the presentation of the Manuscript of Mr. Wronski), the Secretary of the Board of Longitude, who, by his office, is conductor of the Nautical Almanack (Act. uti sup., § 21), republishes * the theory, * offered under the forementioned licence and authority, as containing * the principles * from whence the Tables licensed by the Commissioners are * originally derived; * and in a manner still more full and explicit, exposes its * blunders, * and professes to rectify them in what he styles * a parenthetical correction; * and that * the correction * proposed by the Secretary of the Board of Longitude, and conductor of the Nautical Almanack, is *identical* with that presented by Mr. Wronski to the Com-

(*) This Manuscript was kept ten days by the Board of Longitude, not having been restored to the possession of Mr. Wronski, but by the official letter of the Secretary of this Board, dated the 28th April, 1820.

(**) It is under this title of *Postscript* that we find produced in the Philosophical Transactions for 1819, Doctor T. Young's Theory of Refractions.

(***) An English periodical work, published under the auspices of the principal learned men in London.

missioners, and acknowledged to have been received by letter of the President and of the Secretary.

6. That in this republication of « the theory, » from whence the Tables of Refractions are stated, under licence of the Commissioners, to be « originally derived, » an entire new section (n° 5) is introduced by its author (the Secretary), and under his name; and that it proposes new principles, as authority for the forementioned Tables, which not only supersede those offered, under licence of the Commissioners, as authority for the Tables published under their sanction, but which are *IDENTICAL* with those presented by Mr. Wronski to the Board of Longitude (fifteen months before), as the foundation of his new Theory and Tables; inasmuch as they contain the general law under the same (*) theoretical expression « which » (as that learned foreigner declares, in his *Address to the Board*, p. 70, l. 11), « being once known, the determination of Refractions is reduced to a simple algorithmic question. »

7. That, while « the Corrections » of the errors in « the theory » from whence the Tables of Refractions, licenced by the Commissioners, are « originally derived, » stands thus « *acknowledged* » by its very author, not merely filling the capacity of compiler of the Nautical Almanack, but acting in the double capacity of annual Commissioner of Longitude and of Secretary to the Board; and while the Tables of Refractions, published under the licence and authority of the Commissioners, are left destitute of all authority, unless that which is deduced from the general law, under the theoretical expression, in which Mr. Wronski disclosed his new Theory of Refractions to the Commissioners, allured by the promise of a « reward for *Proposals, Inventions, and Tables, or Corrections and Amendments* of former Inventions and Tables; » this learned stranger not only finds the reward of the national service which he has rendered, on the faith of this offer of the Legislature, *withheld by the Commissioners*, — but his *Corrections and Inventions appropriated by the Secretary of the Board*, against whose interference respecting the « *Proposals* » made by him in reply to the act of the Legislature, he had formally protested, at the time of his entrusting his new Theory of Refractions to the President of the Board.

(Signed)

FRED. NOLAN,

*A Clergyman of the Church of
England, established by Law.*

Sworn before me, at the Mansion House
this 14th November 1821.

(Signed) MAGNAY, Lord Mayor.

(*) The Reverend Mr. Nolan could have said « having literally the same expression, » for in this publication of the law of Mr. Wronski, a publication really shameless, the Secretary of the Board has not

Letter of the Reverend Mr. Nolan to Lord Melville, President of the Board of Longitude, having for its object the production of the preceding Deposition.

8, Earl Street, Finsbury Square.
November 16, 1851.

MY LORD,

In yielding to the claims of science and the imperious demands of humanity, the painful duty devolves upon me to lay the enclosed document before your Lordship.

When the reflection cast upon the character of the Nation, by the procedure which it details, is compared with the professed object of an act of the Legislature, intended to promote "the honour and interest of the country," I hesitate not to believe, there may be some ground of misconception or error, which I am unable to fathom. Presuming upon this supposition, I take the liberty of laying the enclosed Deposition before your Lordship, to be submitted, at the direction of your Lordship, to the Board of Longitude; in which the power of redressing the grievance of which it complains, is still vested. Whether be the course which the official discharge of the functions entrusted to them by the Legislature may induce them to pursue, I, at least, acquit myself, by this step, of all responsibility in the consequences that may ensue, should the document which I have furnished be employed, in the attainment of justice, in a more public form, and before an higher tribunal.

I cannot feel the painful duty which has devolved upon me conscientiously discharged, before I have submitted one point, not so much to the justice as to the humanity of the tribunal, before which this distressing case is still at issue. While they appropriate the fruits and withhold the rewards of the toilsome days and sleepless nights of a learned stranger, who, by an unparalleled sacrifice of *his whole fortune* to the interests of science, cast himself upon the faith of the nation: I am bound to attest, in his behalf, from personal knowledge that.

(Note. — Here follows a sad exposition of the unhappy circumstances to which M. Hoëné Wrooski has been reduced in England, in consequence of these injuries.)

MY LORD,

I have the honour to be
your Lordship's
Most humble servant,
FRED. NOLAN.

even taken the trouble to change the form of the algebraic expressions, and satisfied himself with the simple means of putting the letter ζ instead of the letter φ .

N. B. — This letter and the Deposition itself, remained without answer from Lord Melville, President of the Board of Longitude. After this, a Prelate of the English Church, the Vicar of the clergy, and one of the first personages in the British Empire, a man of worth and character, wrote to Lord Melville, producing to him the most honourable testimonies for M. Nolan, and renewing to him the object of the Deposition of this Ecclesiastic. But this was in vain also; contrary to all expectation, this imposing step remained unacted. The same Prelate, being, without doubt, more profoundly penetrated by this injustice, insisted, in a second letter to Lord Melville, on some sort of declaration on his part. — Even this last proceeding was treated with the same disregard, and remained again without answer.

Passons à notre deuxième exemple décimal, à celui que nous devons prendre sur la planète Uranus, pour montrer comment, lorsque les variations des orbites des astres sont données, on peut en déduire les forces téléologiques $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, considérées comme causes de cette variation. Et observons sur-le-champ que, pour ce deuxième exemple, nous n'avons pas besoin de l'accomplissement final de la mécanique céleste, tel que nous venons de le produire dans l'ouvrage présent. Les lois fondamentales de cette haute mécanique, celles que nous avons produites d'abord dans les *Prolégomènes du Messianisme*, suffisent complètement pour la solution de la question qui fait l'objet de notre actuel deuxième exemple. Aussi, en faisant entièrement abstraction de tout ce que nous venons de produire dans l'ouvrage présent, allons-nous donner la solution en question par les seules lois produites dans les *Prolégomènes du Messianisme*, en supposant toujours que le lecteur aura sous les yeux cet ouvrage préliminaire, qui a paru en 1843.

Or, en laissant subsister, dans l'intégrale (68) de la loi suprême (65) de la mécanique céleste, la quantité $\mathfrak{E}$, formant notre centre d'oscillation, quantité à laquelle nous y avons donné sa valeur moyenne $\mathfrak{E} = 1$, et en remettant, à sa place, sa valeur générale (55), cette intégrale ou formule (68), en la faisant ainsi dériver directement de la loi suprême (65), donnera immédiatement, dans de courts intervalles du temps x , pour la longitude héliocentrique Φ de la planète Uranus, l'expression rigoureuse et générale . . . (221)

$$\Phi = A + \frac{x}{1} \cdot \frac{p\nu}{r^3} - \frac{x^3}{1.2.dx} \cdot d\left(\frac{p\nu}{r^3}\right) + \frac{x^5}{1.2.3.dx} \cdot d^2\left(\frac{p\nu}{r^3}\right) - \text{etc.}, \text{ etc.};$$

dans laquelle la quantité $(p\nu)$ est le modérateur téléologique (58), savoir . . . (222)

$$p\nu = C + \int (\mathfrak{T}r.d\mathfrak{x});$$

la constante C étant donnée par l'expression (48), c'est-à-dire, par l'expression . . . (223)

$$C = \sqrt{\mathfrak{D} \cdot [p]},$$

en désignant par $[p]$ le demi-paramètre moyen, autour duquel oscille le demi-

paramètre variable p . Ainsi, en considérant que la constante A représente la longitude Φ , lorsque $x = 0$, si l'on désigne cette constante par Φ_0 , la présente loi (221) donne proprement, pour un intervalle de temps x , la correspondante différence des longitudes, savoir . . . (224)

$$\Phi - \Phi_0 = \frac{x}{1} \cdot \frac{p'''}{r^3} - \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{p''}{r^2} \right) + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{p'}{r} \right) - \text{etc.}, \text{ etc.}$$

Et cette expression sera d'autant plus convergente que le temps x , qui forme l'intervalle auquel répondent les deux longitudes Φ_0 et Φ , est moins grand. Ayant donc une suite d'observations de la longitude héliocentrique d'Uranus, ou de toute autre planète, la présente loi (224) donnera immédiatement autant d'équations différentes qui serviront respectivement à déterminer les différentes valeurs de la force perturbatrice $\mathcal{T}$, telles que ces valeurs se manifesteront ainsi aux époques de ces observations. Et par conséquent, si ces valeurs ne répondent pas à celles des forces perturbatrices pareilles $\mathcal{T}$, que les planètes connues exercent sur Uranus, on pourra en déduire facilement la position d'un ou de plusieurs astres inconnus dans lesquels se trouve la cause de ces perturbations extraordinaires.

Nous avons donc donné, déjà en 1843, dans les *Protégomènes du Messianisme*, sous la marque (68), la présente loi (221), comme *PRINCIPE AITIOLOGIQUE*, qui conduit de la connaissance des perturbations, considérées comme effets, à la connaissance de la position des astres, considérés comme causes de ces perturbations. Et cette loi (221), en dérivant immédiatement de la loi suprême (65) de la mécanique céleste, est nécessairement, comme principe aitiologique, une loi absolue de cette haute mécanique. Aussi, tout procédé pour remonter ainsi des effets aux causes, c'est-à-dire, des perturbations aux astres qui les exercent, doit être nécessairement une modification, plus ou moins compliquée, de cette loi absolue (221), parce qu'il ne saurait être rien autre; et pour cacher cette loi, c'est-à-dire, pour ne pas l'avouer en s'en servant, ces modifications peuvent aller jusqu'à la défiguration. Mais, quelle que soit ainsi la forme qu'on veuille donner à cette loi absolue (221), le fond y transparaîtra toujours nécessairement, parce qu'il n'existe absolument aucun autre principe aitiologique pour cette liaison des perturbations avec les astres qui les produisent. — Nous en concluons irréfragablement que toute recherche que, depuis 1843, on aurait faite pour conclure ainsi, en partant des perturbations existantes d'une planète, par exemple, des perturbations d'Uranus, l'existence et la position d'une planète inconnue qui exerce ces perturbations, toute recherche pareille, disons-nous, ne pouvait être faite autrement que par l'application de notre loi (221), soit en s'en servant ouvertement, soit en la modifiant, ou même en la défigurant, par des motifs quelconques qu'il appartiendra à l'histoire des sciences de scruter et de signaler.

On dira peut-être qu'il reste à ceux qui ont ainsi employé cette loi (221),

le mérite d'avoir donné l'expression générale de la force perturbatrice γ , puisque cette expression n'était pas produite en 1843, et qu'elle ne l'est qu'aujourd'hui, en 1847, dans l'ouvrage présent, sous la marque (113). — Nous ne pensons pas qu'aucun géomètre veuille se faire un mérite de cette détermination de la force perturbatrice γ , lorsque, comme cela est ici le cas, on fait abstraction de l'inclinaison des orbites des planètes; car, pour arriver à cette détermination, il suffit alors de résoudre un triangle rectiligne, nommément, un triangle dont deux côtés sont formés par les rayons vecteurs des deux astres en question, et dont l'angle compris entre ces deux côtés, est conséquemment formé par la différence des longitudes héliocentriques de ces astres. En effet, désignant toujours, comme dans la loi (221); les éléments de l'astre qui subit les perturbations, par les simples lettres que nous attribuons à ces éléments, et distinguant les éléments de l'astre qui exerce ces perturbations, en mettant entre parenthèses ces mêmes lettres que nous attribuons à ces différents éléments, on trouve immédiatement, par la solution trigonométrique du triangle rectiligne que nous venons de signaler, pour la force perturbatrice en question, la détermination . . . (225)

$$\gamma = (\mathfrak{M}) \cdot \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(r')^3} \right] \cdot (r) \cdot \sin \Delta;$$

en désignant par $(\mathfrak{M})$ la masse de l'astre inconnu qui cause les perturbations connues, par Δ l'angle que forment les deux rayons vecteurs r et (r) , et par s le côté opposé à l'angle Δ dans le triangle en question; de sorte que l'on aura . . . (226)

$$\Delta = (\Phi) - \Phi, \quad \text{et} \quad s = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2r \cdot (r) \cdot \cos \Delta}.$$

Mais alors, dira-t-on, peut-être, qu'il reste à ceux qui ont employé la loi (221) à la découverte d'un nouvel astre, au moins le mérite d'avoir appliqué cette loi à une telle découverte. — Nous ne voudrions nullement méconnaître ce mérite de l'application, si l'on avait réduit les prétentions à ce seul mérite; car, c'est pour qu'on puisse l'appliquer que nous avons produit la loi (221) dont il s'agit. — Toutefois, comme nous allons le voir, l'application elle-même de la loi (221) est la chose du monde la plus facile; et c'est peut-être pour cela que l'on ne s'est pas contenté du seul mérite de cette application.

En prenant, par les méthodes connues, nommément par la méthode de Jean Bernoulli, l'intégrale qui entre dans la présente expression (222) de notre modérateur téléologique piv , nous aurons, pour ce modérateur, l'expression . . . (227)

$$piv = C + \frac{x}{1} \cdot \gamma r - \frac{x^3}{1^{1/2}} \cdot \frac{d(\gamma r)}{dx} + \frac{x^3}{1^{1/2}} \cdot \frac{d^2(\gamma r)}{dx^2} - \text{etc., etc.}$$

en négligeant la constante de cette intégration, pour en tenir compte dans la

quantité C elle-même, au moyen du demi-paramètre $[p]$, qui devra ainsi correspondre à l'époque $x = 0$. Et, introduisant maintenant cette expression (227) dans la loi (221) ou (224), on obtiendra, pour la différence $(\Phi - \Phi_0)$ des longitudes, correspondant à un temps donné x , la détermination . . . (228)

$$\Phi - \Phi_0 = \frac{x}{1} \cdot \frac{C}{r^3} + \frac{x^3}{2r} \cdot \left\{ \gamma - 2\zeta v \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot \frac{C}{r^3} \right\} + \text{etc.}, \text{ etc.};$$

en arrêtant ainsi ce développement à la seconde puissance du temps x , parce que les intervalles des observations qui donnent les longitudes Φ_0 et Φ , sont assez petits pour que, dans la question dont il s'agit, le présent développement (228) soit suffisant. Rien n'empêche cependant, s'il en était besoin, d'étendre ces expressions (227) et (228) à des puissances ultérieures du temps x . Mais, nous le répétons, cette extension ultérieure est inutile pour la présente pratique des calculs, parce qu'on peut faire les observations consécutives des longitudes Φ_0 et Φ à des intervalles aussi petits que l'on voudra, et parce que les observations consécutives d'Uranus, dont il est ici question, sont faites à des intervalles qui, étant mesurés avec l'unité convenable du temps x , seront toujours plus petits que l'unité. En effet, prenant, pour l'unité linéaire, le demi-grand axe b de l'orbite d'Uranus, pour l'unité des masses, la somme $\mathfrak{D}$ des masses du Soleil et d'Uranus, que nous considérerons d'abord comme égale à la somme des masses du Soleil et de l'astre inconnu, et désignant par j la durée de la révolution sidérale d'Uranus, comptée en jours terrestres, on aura, d'après notre loi téléologique (33) de l'harmonie entre l'espace p , le temps dans w , et la force $\mathfrak{D}$, pour l'unité i de la mesure du temps x , le temps terrestre . . . (229)

$$i = \frac{j}{\pi} = \frac{30687 \text{ jours}}{\pi} = 4884 \text{ jours},$$

environ treize ans et un quart. Et les intervalles des observations consécutives de la longitude d'Uranus sont notoirement beaucoup plus petits.

Ainsi, à l'exception de la force perturbatrice γ , toutes les quantités qui entrent dans l'expression (228) de la différence des longitudes seront connues, puisque cette différence $(\Phi - \Phi_0)$ et le temps x sont donnés par l'observation, et que toutes les autres de ces quantités sont des éléments de l'orbite d'Uranus. Bien plus, dans cette force perturbatrice γ , se trouvent comprises les forces perturbatrices qu'exercent sur Uranus toutes les planètes connues; de sorte qu'en désignant respectivement par $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$, etc., les forces perturbatrices qui sont ainsi exercées par Saturne, Jupiter, Mars, etc., et denotant simplement par γ celle qui est exercée sur Uranus par l'astre inconnu, l'expression (228) sera proprement . . . (230)

$$\Phi - \Phi_0 = \frac{x}{1} \cdot \frac{C}{r^3} + \frac{x^3}{2r} \cdot \left\{ (\gamma + \gamma' + \gamma'' + \gamma''' + \text{etc.}) - 2\zeta v \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot \frac{C}{r^3} \right\} + \text{etc.};$$

et les quantités $\gamma', \gamma'', \gamma'''$, etc., pourront toutes, par le moyen de leur expression générale (225), être calculées immédiatement pour toutes les époques du temps x . — Nous déduirons donc, de cette expression (230), pour la détermination de la force motrice γ , exercée par l'astre inconnu, l'expression générale . . . (231)

$$\gamma = \frac{2\pi}{x^2} \left\{ (\Phi - \Phi_0) - \frac{\pi C}{r^2} \right\} - (\gamma' + \gamma'' + \gamma''' + \text{etc.}) + 2\gamma_0 \sin(\Phi - \alpha) \cdot \frac{C}{r^2},$$

qui est proprement la véritable loi ARITHÉTIQUE elle-même. — Ainsi, pour deux observations consécutives des longitudes Φ_0 et Φ , et pour l'intervalle du temps x entre ces deux observations, on pourra toujours déterminer numériquement la valeur de la force perturbatrice γ qu'à l'époque de la dernière de ces deux observations l'astre inconnu exerçait sur Uranus. Et l'on pourra ainsi obtenir, pour cette force perturbatrice γ , autant de valeurs numériques différentes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, etc., qu'on aura d'observations consécutives différentes, prises deux à deux, et correspondant respectivement à des intervalles connus x_1, x_2, x_3 , etc., du temps x .

Formant donc, avec ces valeurs numériques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, etc., de la force perturbatrice γ , et avec son expression générale (225), modifiée pour chacune des époques x_1, x_2, x_3 , etc., les équations . . . (232)

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (\Omega) \cdot \left\{ \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{(r_1)^2} \right\} \cdot (r_1) \cdot \sin \Delta_1, \\ \gamma_2 &= (\Omega) \cdot \left\{ \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{(r_2)^2} \right\} \cdot (r_2) \cdot \sin \Delta_2, \\ \gamma_3 &= (\Omega) \cdot \left\{ \frac{1}{x_3^2} - \frac{1}{(r_3)^2} \right\} \cdot (r_3) \cdot \sin \Delta_3, \\ &\text{etc., etc.;} \end{aligned}$$

on aura, dans ces équations très-simples, les moyens immédiats pour la détermination des éléments de l'orbite dans laquelle se meut l'astre inconnu, savoir, la masse (Ω) de cet astre, le demi-paramètre (p) et l'excentricité (ζ) de son orbite, la position (α) de son aphélie, et son époque, que nous désignerons par (Ω), et que nous rapporterons à la première des susdites observations, à celle de la première longitude Φ_0 . Ainsi, cinq de ces équations (232) suffiraient proprement pour la détermination de ces cinq éléments inconnus (Ω), (p), (ζ), (α), et (Ω); et si toutes les observations sont faites à des époques peu éloignées, six de ces observations suffiront pour la formation de ces cinq équations exigibles. Mais, pour suppléer à l'imperfection de ces observations astronomiques, on doit former, avec toutes les observations consécutives, autant que l'on pourra de ces systèmes de cinq équations, pour pouvoir tirer, de chacun de ces systèmes d'équations, les cinq inconnues en question, dont les

respectives valeurs moyennes, correspondant à tous ces systèmes, seront les valeurs les plus proches de la vérité que l'on pourra obtenir par ces observations données, telles qu'elles existeront au moment de ces recherches.

Nous n'avons pas proprement à nous occuper ici de la solution des équations (23a), pour en tirer les inconnues en question, parce que cette solution elle-même est ici une question étrangère, c'est-à-dire, une question purement algorithmique, qui appartient à la question générale de la solution des équations conjointes, dont nous avons donné, sous la marque (887), par anticipation sur nos ouvrages ultérieurs, la méthode spéciale, résultant de l'application de notre générale méthode secondaire. — Tout ce que nous avons à faire ici, c'était de montrer que les équations (23a), qui déterminent les éléments de l'astre inconnu, dérivent immédiatement, comme de simples corollaires, du principe aitiologique (221), que nous avons publié en 1843. — Ainsi, nous pouvons établir, d'une manière irréfutable, qu'à cette époque de 1843, existait réellement, dans le monde savant, la méthode, et même la méthode absolue, pour la détermination de la position de l'astre inconnu qui, comme les astronomes le supposaient depuis longtemps, exerçait sur la planète Uranus des perturbations extraordinaires. Nous ajouterons même que cette méthode existait tout entière en 1843; car, la déduction des équations finales (23a), en les déterminant par la loi aitiologique (231), et en les tirant ainsi du principe aitiologique (221), comme de simples et immédiats corollaires, était manifestement, ainsi qu'on vient de le voir, une chose tellement facile que même des élèves en mathématiques pouvaient la faire; et quant à la résolution de ces équations (23a), pour en tirer les éléments en question, elle rentrait dans le domaine général de l'algorithmie, et elle pouvait d'ailleurs se faire par de simples tâtonnements, comme on a avoué l'avoir fait pour arriver à la connaissance de l'astre inconnu.

Toutefois, pour prouver, en outre, que cette question aitiologique, lorsque sa méthode (221) se trouve donnée, est une des questions les plus faciles de la mécanique céleste, nous allons montrer que les équations (23a) admettent des solutions particulières très-faciles, qui sont suffisantes pour la pratique des calculs. — Et à cette occasion, nous devons faire remarquer, sans doute inutilement, que les méthodes absolues que nous avons indiquées dans l'ouvrage présent, et qui sont des méthodes universelles, ne doivent être appliquées qu'à celles des grandes questions dont on ne peut donner autrement la solution, et par conséquent, que l'application de ces méthodes universelles à la solution des questions qui admettent des procédés particuliers pour leur solution, mais qui malheureusement sont en très-petit nombre, ne doit servir qu'à la vérification des calculs, lorsqu'on le juge nécessaire. Il reste ainsi ouvert un champ assez vaste pour la recherche de ces procédés particuliers, surtout à l'avantage de ceux des géomètres qui, ne pouvant embrasser la généralité de la science,

chercheront à rendre utiles leurs travaux par de pareilles solutions particulières, et même par des solutions approximatives qui suffiront à la pratique, à l'instar de la solution approximative, mais suffisante, que nous allons donner des équations (232).

Or, la forme générale de ces équations (232) est . . . (233)

$$\tau = (\Omega) \cdot \left\{ \frac{1}{s^3} - \frac{1}{(r)^3} \right\} \cdot (r) \cdot \sin \Delta;$$

et les rayons vecteurs r et (r) qui entrent dans cette forme peuvent, en vertu de notre centre d'oscillation (56), être ramenés aux paramètres respectifs p et (p) , savoir . . . (234)

$$r = \frac{p}{\xi}, \quad \text{et} \quad (r) = \frac{(p)}{(\xi)};$$

les quantités ξ et (ξ) ayant, en vertu de la loi (8) des orbites, les valeurs . . . (235)

$$\xi = 1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha), \quad \text{et} \quad (\xi) = 1 - (\zeta) \cdot \cos[(\Phi) - (\alpha)].$$

Construisons de plus, avec ces quantités ξ et (ξ) , la quantité auxiliaire . . . (236)

$$\beta = \frac{(\xi)}{\xi} = \frac{1 - (\zeta) \cdot \cos[(\Phi) - (\alpha)]}{1 - \zeta \cdot \cos(\Phi - \alpha)};$$

et observons que cette quantité β , dont la valeur moyenne est $\beta = 1$, sera toujours peu différente de l'unité; de sorte que, pour une première détermination de nos inconnues en question, on pourra faire $\beta = 1$. — Introduisons donc, dans l'équation générale (233), à la place des rayons vecteurs r et (r) , leurs valeurs (234); et cette équation (233) deviendra . . . (237)

$$\tau = (\Omega) \cdot \left\{ 1 - (\zeta) \cdot \cos[(\Phi) - (\alpha)] \right\}^3 \cdot \left\{ \frac{1}{p^3} - \frac{1}{(p)^3} \right\} \cdot (p) \cdot \sin \Delta;$$

en faisant . . . (238)

$$t = \sqrt{\beta^3 \cdot p^3 + (p)^3 - 3\beta p \cdot (p) \cdot \cos \Delta}.$$

Ainsi, l'équation générale (233) se trouvera ramenée aux valeurs constantes des paramètres p et (p) . — Quant à la valeur de l'angle Δ , voici sa détermination, également très-simple.

Partant de l'expression générale (238) des longitudes Φ , et faisant $\tau = 0$, dans cette expression, pour ne tenir compte que du mouvement propre des astres dans leurs orbites, si nous désignons par Ω et (Ω) les longitudes respectives d'Uranus et de l'astre inconnu, pour l'époque $x = 0$, correspondant à la première des observations astronomiques qui servent à former les équations (232), nous aurons, pour les longitudes héliocentriques de ces deux astres, correspondant au temps x , les expressions respectives . . . (239)

$$\Phi = \Omega + \frac{\pi}{1} \cdot \frac{\sqrt{(\Omega p)}}{p^3} - \frac{x^2}{p^3} \cdot \zeta v \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot \sqrt{(\Omega p)},$$

$$(\Phi) = (\Omega) + \frac{\pi}{1} \cdot \frac{\sqrt{(\Omega(p))}}{(r)^3} - \frac{x^2}{(r)^3} \cdot (\zeta) \cdot (w) \cdot \sin[(\Phi) - (\alpha)] \cdot \sqrt{(\Omega(p))};$$

qui, en y introduisant les valeurs (234) des rayons vecteurs r et (r) , donneront, pour l'angle Δ en question, l'expression . . . (240)

$$\Delta = (\Phi) - \Phi = \Psi + \Xi,$$

en formant les quantités . . . (241)

$$\Psi = (\Omega) - \Omega,$$

$$\Xi = \frac{x \cdot \xi^3}{p \cdot \sqrt{p}} \cdot \left\{ \beta^3 \cdot \xi \cdot \sqrt{\xi} - 1 \right\} \cdot \sqrt{\Omega} - \frac{x^2 \cdot \xi^3}{p^3} \cdot \left\{ \beta^3 \cdot \xi^2 \cdot (\zeta) \cdot \sin[(\Phi) - (\alpha)] - \zeta \cdot \sin(\Phi - \alpha) \right\} \cdot \Omega;$$

et en établissant, entre les paramètres p et (p) le rapport inconnu . . . ;
. . . (242)

$$\frac{p}{(p)} = \xi.$$

Il faut observer que, pour l'homogénéité des expressions, nous avons laissé subsister, dans la présente détermination (241) de la quantité Ξ , la somme Ω des masses centrales, quoique, pour la susdite détermination (229) de l'unité du temps x , nous ayons pris cette somme Ω pour l'unité de la mesure des masses.

Or, en introduisant dans l'équation générale (237), la présente valeur (240) de l'angle Δ , et le présent rapport (242) des paramètres p et (p) cette équation deviendra . . . (243)

$$\gamma \cdot p^3 = (\Omega) \cdot \xi^3 \cdot \left\{ 1 - (\zeta) \cdot \cos[(\Phi) - (\alpha)] \right\}^2 \cdot \left\{ \frac{1}{q^3} - 1 \right\} \cdot \sin(\Psi + \Xi);$$

en faisant . . . (244)

$$q = \sqrt{\beta^3 \cdot \xi^3 + 1 - 2\beta\xi \cdot \cos(\Psi + \Xi)}.$$

Et dans cette équation, nous avons immédiatement les cinq inconnues en question, savoir, la masse (Ω) , le rapport ξ des paramètres, l'excentricité (ζ) , l'aphélie (α) , et l'époque (Ω) , qui entre dans la quantité Ψ .

Concevons maintenant, parmi les équations (232) développées sous la forme présente (243), deux équations consécutives, correspondant aux quantités données $\gamma\mu$ et $\gamma\nu$; et divisons ces deux équations l'une par l'autre, nommément leurs premiers membres l'un par l'autre, et leurs seconds membres, de même l'un par l'autre. Il en résultera, pour une première détermination des inconnues, lorsqu'on fait d'abord abstraction de l'excentricité des deux orbites, l'équation . . . (245)

(25).

$$\frac{\gamma_{\mu}}{\gamma_{\nu}} = \frac{\left[\frac{s}{q^{\mu^3}} - 1 \right] \cdot \sin(\Psi + \Xi_{\mu})}{\left[\frac{s}{q^{\nu^3}} - 1 \right] \cdot \sin(\Psi + \Xi_{\nu})};$$

en distinguant par les indices μ et ν toutes les quantités qui appartiennent respectivement aux deux équations dont nous venons de tirer la présente équation résultante. — Et, dans cette équation résultante, où se trouvent principalement éliminées, et non purement négligées, la masse ($\mathfrak{D}$), l'excentricité (ζ), et l'aphélie (α), n'entrent plus que les deux inconnues ξ et Ψ , en ne perdant pas de vue que l'on a sensiblement $\beta = s$, et que, dans l'expression (241) de la quantité Ξ , le terme qui implique l'excentricité (ζ) devient également insensible par l'influence du facteur ξ^3 et de la seconde puissance du temps x . — Il ne reste donc qu'à résoudre cette équation résultante (245), pour en tirer les deux inconnues ξ et Ψ , dont la dernière contient l'époque cherchée (Ω). En effet, connaissant ces deux quantités, trois des équations primitives (243), correspondant à trois quantités calculées $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, donneront, sous la forme . . . (246)

$$(\mathfrak{D}) \cdot \left\{ s - (\zeta) \cdot \cos(\Phi_p) - (\alpha) \right\}^3 = \frac{q^{\rho^3} \cdot \gamma_p \cdot p^3}{\xi^3 \cdot (s - q^{\rho^3}) \cdot \sin(\Psi + \Xi_{\rho})},$$

en y variant l'indice p , trois équations pareilles, dont on pourra déduire facilement les trois inconnues restantes ($\mathfrak{D}$), (ζ), (α), par le moyen de l'expression (240), qui donne, pour la longitude (Φ_p), la valeur . . . (247)

$$(\Phi_p) = \Psi + \Xi_p + \Phi_p.$$

Ainsi, cette prétendue grande question de la découverte de l'astre qui produit les perturbations de la planète Uranus, lorsque sa méthode (221) est connue, se réduit à la résolution pure et simple de deux équations de la forme (245), pour en tirer les deux inconnues ξ et Ψ . — Bien plus, l'une de ces inconnues, le rapport ξ des paramètres des deux orbites, est donnée d'avance, par la loi de Bode, avec une probabilité suffisante pour qu'il ne soit nécessaire que de compléter sa valeur par l'identité des résultats que donneraient ainsi, pour la seule inconnue Ψ , deux équations pareilles (245).

Nous pourrions facilement, par l'application de nos méthodes absolues, indiquer des procédés pour la solution de ces équations finales (245), auxquelles, par l'application de notre méthode (221), se réduit cette question. Mais, nous craignons de la rendre importante par ces procédés mêmes, avec lesquels les géomètres ne sont pas encore familiers. Ainsi, nous pourrions, par exemple, en amenant ces équations finales (245), à la forme . . . (248)

$$0 = \left[\gamma_{\nu} \cdot \left\{ \cos \Xi_{\mu} \cdot \tan \Psi + \sin \Xi_{\mu} \right\} - \gamma_{\mu} \cdot \left\{ \cos \Xi_{\nu} \cdot \tan \Psi + \sin \Xi_{\nu} \right\} \right] \\ - \left[\gamma_{\nu} \cdot \frac{\cos \Xi_{\mu} \cdot \tan \Psi + \sin \Xi_{\mu}}{q^{\mu^3}} - \gamma_{\mu} \cdot \frac{\cos \Xi_{\nu} \cdot \tan \Psi + \sin \Xi_{\nu}}{q^{\nu^3}} \right],$$

nous pourrions, disons-nous, y appliquer immédiatement notre problème-universel (743), en formant les fonctions . . . (249)

$$\begin{aligned} f\Psi &= \Upsilon\nu \left\{ \cos \Xi\mu . \text{tang } \Psi + \sin \Xi\mu \right\} - \Upsilon\mu \left\{ \cos \Xi\nu . \text{tang } \Psi + \sin \Xi\nu \right\}, \\ f_i\Psi &= \Upsilon\mu . \frac{\cos \Xi\nu . \text{tang } \Psi + \sin \Xi\nu}{q^{\nu^2}} - \Upsilon\nu . \frac{\cos \Xi\mu . \text{tang } \Psi + \sin \Xi\mu}{g^{\mu^2}}, \end{aligned}$$

et en établissant, d'après la forme (743) du problème-universel, l'équation . . . (250)

$$0 = f\Psi + x_i f_i\Psi,$$

dans laquelle la quantité x_i , servant à la génération de l'inconnue Ψ , devra finalement recevoir la valeur $x_i = 1$, après lui avoir attribué d'abord, s'il en est besoin, des valeurs plus petites que l'unité, et aussi petites que l'on voudra, pour rendre convergente cette génération de l'inconnue Ψ , d'après la méthode d'exhaustion que nous avons indiquée pour les expressions (760) et (761). On procédera ainsi à la solution de la présente équation (248) par la solution générale du problème-universel, telle qu'elle est donnée dans la *Réfutation de Lagrange*, d'abord, sous les marques (14) et (15), et ensuite, sous les marques (22) et (23). Et l'on aura ici, en effet, pour la condition fondamentale de cette application du problème-universel (13) ou (21), l'équation . . . (251)

$$0 = f\Psi,$$

qui donnera, pour la valeur initiale ou fondamentale de l'inconnue Ψ , la quantité . . . (252)

$$\text{tang } \Psi = \frac{\Upsilon\mu . \sin \Xi\nu - \Upsilon\nu . \sin \Xi\mu}{\Upsilon\nu . \cos \Xi\mu - \Upsilon\mu . \cos \Xi\nu}.$$

Ainsi, en attribuant provisoirement, au rapport ξ des paramètres, la valeur que lui suppose la loi de Bode, on obtiendra, par la présente solution de plusieurs équations pareilles (248), pour l'inconnue Ψ , plusieurs valeurs différentes, dont la valeur moyenne approchera le plus de la vraie valeur de cette quantité Ψ . — Et avec ces valeurs approximatives de ξ et de Ψ , notre élémentaire méthode secondaire (806), appliquée immédiatement aux équations finales (245) ou (248), donnera séparément, par la loi normale (808), la détermination ultérieure de ces quantités ξ et Ψ , aussi exacte que l'on voudra.

Mais, nous le répétons expressément, on doit ici faire abstraction de ces solutions (250) des équations finales (245), auxquelles, par l'application de notre méthode absolue (221), aboutit la présente question aitiologique concernant la découverte de l'astre qui cause les perturbations de la planète Uranus. On doit en faire abstraction, disons-nous, pour ne pas attacher à cette question une importance étrangère, une importance purement algorithmique, et pour réduire ainsi sa propre importance mécanique à sa véritable valeur, c'est-à-dire, à la découverte de deux équations (245) à deux inconnues, comme offrant la solu-

tion finale de ce problème aitiologique. — Il faut, en effet, reconnaître, comme nous venons de le montrer, que ce problème aitiologique de la découverte de l'astre qui cause les perturbations d'Uranus, lorsqu'on connaît notre méthode (221), se réduit entièrement à la solution de deux équations (245) à deux inconnues, et par conséquent, que cette question aitiologique, en faisant abstraction de la découverte de sa méthode absolue (221), est, non-seulement la question la plus facile de toute la mécanique céleste, mais, de plus, la question la moins propre à mériter, par elle-même, l'attention publique.

On concevra alors la surprise que nous avons dû éprouver lorsque tout à coup on annonça, en 1846, trois ans après la publication de notre méthode (221) pour cette question, la découverte de l'astre dont il s'agit, faite par un académicien de Paris, M. Leverrier, et lorsque surtout on fit une si grande parade de cette découverte, qui, dès le moment où la méthode (221) est donnée, comme nous venons de le reconnaître, est la solution d'une des questions astronomiques les plus faciles. En effet, le calcul des circonstances d'une éclipse du Soleil, ou du passage de Vénus ou de Mercure sur le Soleil, exige beaucoup plus de science que n'en exige la solution des deux équations (245) à deux inconnues, auxquelles notre méthode, dont le principe a été publié en 1843, réduit cette question de la découverte de l'astre qui cause les perturbations d'Uranus.

Mais, afin d'éviter les conséquences dangereuses de cette parade, pourquoi M. Leverrier n'a-t-il pas avoué qu'il n'a fait qu'appliquer notre méthode? — Il ne saurait prétendre ne l'avoir pas connue; car, on a envoyé à l'Académie des sciences de Paris, et à tous ses membres séparément, le Prospectus des Prolegomènes du Messianisme, où se trouve la table méthodique de cet ouvrage, dans laquelle, en y indiquant les questions de la mécanique céleste, on lit expressément ces mots :

- a9) « Insuffisance de la science actuelle, qui, dans un système du monde, ne voit et ne calcule encore que de *prétendues perturbations* de ses lois permanentes (pages 271 et 272). »
- b9) « Accomplissement de la science par la détermination rigoureuse des lois de la *variation périodique* que subissent les lois permanentes d'un système du monde (pages 272 à 296). »

Et dans l'ouvrage même, dans ces Prolegomènes, après y avoir donné, sous les marques (65) à (68), notre présent principe aitiologique (221) ou (224), qui forme notre méthode en question, nous disons (page 290) que cette loi « ferait déjà connaître le mouvement moyen de l'astre avec une exactitude bien supérieure à tout ce que la science connaît aujourd'hui, surtout pour la *détermination des forces perturbatrices que cet astre exerce sur d'autres orbites.* »

Dira-t-on néanmoins que M. Leverrier n'a pas connu notre méthode, ou, s'il l'a connue, qu'il en a inventé une meilleure, et qu'il n'avait pas alors besoin

de parler de la nôtre? — Mais, quelle que soit la méthode, en admettant qu'il y en ait une autre, elle aurait nécessairement, si elle est vraie, conduit à notre résultat principal (231); car, il est absolument impossible que, par le mouvement d'Uranus, et par les éléments de son orbite, modifiée même par les perturbations exercées sur Uranus par les planètes connues, on détermine exactement la force γ de l'astre inconnu, par laquelle il exerce sur Uranus ses propres perturbations. C'est là, en effet, dans notre détermination (231) de cette force inconnue γ , un résultat absolu et INVARIABLE, comme tout géomètre est forcé de l'avouer; et ce résultat unique (231), qui ne saurait absolument être différent, tel qu'il dérive immédiatement, comme un simple corollaire, de notre principe (221), publié en 1843, est manifestement, comme on vient de le voir, l'essence même, le nœud de notre méthode. Ainsi, quel que soit le procédé, différent de notre principe (221), par lequel on prétendrait que M. Le-verrier est arrivé au résultat principal de la question, ce résultat est nécessairement le même que notre résultat principal (231), parce qu'il est absolument impossible qu'il en existe un autre. Et, comme nous venons de le dire, c'est précisément ce résultat décisif (231), tel qu'il dérive immédiatement de notre principe aitiologique (221), publié en 1843, qui est l'essence, le nœud de notre méthode. Ainsi, quels que soient les détours par lesquels, en masquant ou en défigurant notre principe aitiologique (221), ce principe absolu du résultat décisif (231), quels que soient, répétons-nous, ces détours par lesquels M. Le-verrier serait arrivé à ce même résultat (231), et il ne pouvait absolument arriver à aucun autre, il aurait nécessairement, sous le masque d'une autre forme, suivi dans le fond notre véritable et unique méthode.

Pour prouver aux géomètres, d'une manière irréfragable, qu'il ne saurait absolument exister, dans cette question, aucun autre résultat principal que celui qui, sous la marque (231), dérive immédiatement de notre PRINCIPES AITIOLOGIQUES (221), publié en 1843, et qui, comme nous l'avons déjà dit, constitue proprement la loi AITIOLOGIQUE elle-même de cette question, cette loi absolue de laquelle seule dépendent toutes les déterminations numériques dans la solution de ce problème, pour le prouver irréfragablement, disons-nous, nous allons, encore une fois, déduire cette loi (231) de notre principe (221), en la saisissant dans toute sa GÉNÉRALITÉ, afin de ne laisser aucun doute sur la possibilité d'une détermination quelconque, différente de la détermination (231), qui, comme on vient de le voir, dérive immédiatement de notre principe absolu (221), publié en 1843. — Pour cela, concevons que l'on ait développé indépendamment, d'abord, le principe aitiologique (221), comme on en a indiqué les premiers termes sous la marque (224), et ensuite, le modérateur téléologique (222), comme on en a également indiqué les premiers termes sous la marque (227), on obtiendrait alors, à la place de l'équation (228), l'équation complète

. . . (253)

$$0 = (\Phi - \Phi_0) - \frac{x \cdot G}{r^2} - \frac{x^3}{2r} \cdot \left\{ \gamma + (\gamma' + \gamma'' + \gamma''' + \text{etc.}) - 2\mu \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot \frac{G}{r} \right\} + \\ + F \left(\gamma, \frac{d\gamma}{dx}, \frac{d^2\gamma}{dx^2}, \text{etc.}; r, \frac{dr}{dx}, \frac{d^2r}{dx^2}, \text{etc.} \right);$$

en désignant par la caractéristique F la fonction complémentaire que formeraient ces développements indéfinis, et qui serait ainsi fonction des dérivées différentielles du rayon vecteur r d'Uraous, qui est connu, et de la force problématique γ , qu'il s'agit de découvrir. Et il est manifeste que cette équation différentielle et rigoureuse (253) n'est rien autre que le développement complet de notre principe aitiologique (221), publié en 1843, et que c'est précisément cette équation qui, comme on le voit, détermine, dans toute sa rigoureuse exactitude, la force perturbatrice γ , cette force problématique qui, lorsqu'elle est ainsi déterminée et connue, peut seule, par le moyen des équations (232), conduire à la découverte de l'astre inconnu.

Il est sans doute inutile de faire remarquer que, d'après ce que nous avons reconnu dans l'ouvrage présent, à l'occasion de l'expression (186) de la différentielle du rayon vecteur r , il n'y a que les différentielles supérieures de ce rayon qui contiendront la force perturbatrice γ ; de sorte qu'en considérant cette influence éloignée, et par conséquent peu sensible de la force γ , on peut, pour une première détermination de la force γ , qui est dominante dans cette question, ne tenir compte, dans la force secondaire γ , que des perturbations pareilles γ' , γ'' , γ''' , etc., exercées sur Uranus par les planètes connues. Et seulement lorsqu'on aura obtenu cette première détermination de la force dominante γ , et par conséquent une première détermination de l'orbite de l'astre inconnu, on pourra tenir compte de la force secondaire γ , encore inconnue, à côté des susdites forces pareilles γ' , γ'' , γ''' , etc., déjà connues, en déterminant alors cette force inconnue γ par la première de nos présentes expressions (113). — Mais, comme nous venons de le voir, et comme nous l'avons déjà reconnu plus haut, par suite de sa très-petite modification de la force centripète ($\gamma - \gamma \cdot r^3$), l'influence de cette force secondaire γ , dans la présente question, est tellement peu sensible que nous n'en parlons ici que pour donner la solution tout à fait rigoureuse de cette question aitiologique.

Il ne reste donc qu'à déduire, du présent développement (253) de notre principe aitiologique (221), la force problématique γ , en intégrant cette équation développée (253). Et cette intégration peut, à son tour, être opérée par une de nos méthodes absolues, notamment, par notre *TABLEAU-UNIVERSEL des mathématiques*, que nous avons publié en 1812, dans la *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* (pages 3n à 36), et qui, par conséquent, appartient au monde savant depuis trente-cinq ans. — En effet, suivant cette *Réfutation* de Lagrange, si l'on construit, avec l'inconnue γ en question,

considérée comme fonction du temps x , les deux premières fonctions qui, sous la marque (13) de cet ouvrage cité, forment notre problème-universel, savoir, les deux fonctions . . . (254)

$$f\gamma = (\Phi - \Phi_0) - \frac{x \cdot C}{r^2} - \frac{x^3}{2r} \cdot \left\{ \gamma + (\gamma' + \gamma'' + \gamma''' + \text{etc.}) - 2\zeta v \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot \frac{C}{r^2} \right\},$$

$$f_1\gamma = F\left(\gamma, \frac{d\gamma}{dx}, \frac{d^2\gamma}{dx^2}, \text{etc.}; r, \frac{dr}{dx}, \frac{d^2r}{dx^2}, \text{etc.}\right);$$

nous aurons, sous cette forme (13) de notre problème-universel, l'équation . . . (255)

$$0 = f\gamma + x \cdot f_1\gamma;$$

dans laquelle la quantité arbitraire x , servant, d'après (15) ou (22), à la génération de l'inconnue γ , doit recevoir finalement la valeur $x = 1$. Et cette génération, suivant l'expression définitive (22) de l'ouvrage cité, sera . . . (256)

$$\gamma = Q_0 + Q_1 \cdot x + Q_2 \cdot x^2 + Q_3 \cdot x^3 + \text{etc.}, \text{ etc.};$$

les coefficients Q_0, Q_1, Q_2 , etc., étant donnés par les expressions (23). — Or, d'après ces expressions, le premier coefficient Q_0 doit avoir la valeur . . . (257)

$$Q_0 = \dot{\gamma},$$

en désignant par le point placé sur la lettre γ , la valeur que reçoit cette quantité par l'équation fondamentale . . . (258)

$$0 = f\gamma,$$

c'est-à-dire, la valeur fondamentale . . . (259)

$$\gamma = \frac{2r}{x^2} \cdot \left\{ \Phi - \Phi_0 \right\} - \frac{x \cdot C}{r^2} - (\gamma' + \gamma'' + \gamma''' + \text{etc.}) + 2\zeta v \cdot \sin(\Phi - \alpha) \cdot \frac{C}{r^2},$$

qui est notre susdite valeur (231), formant le résultat principal de cette question. Et quant aux coefficients suivants Q_1, Q_2, Q_3 , etc., de la génération complète (256) de notre présente quantité problématique γ , les susdites expressions (23) de la Réfutation de Lagrange, en y faisant zéro les fonctions marquées par les caractéristiques ultérieures f_4, f_5 , etc., donneront immédiatement ces coefficients Q_1, Q_2, Q_3 , etc., en y prenant les différentielles, sur l'incon-

due γ et sur ses dérivées différentielles $\frac{d\gamma}{dx}, \frac{d^2\gamma}{dx^2}$, etc., par rapport à cette

quantité elle-même γ , considérée comme étant elle-même sa propre variable indépendante, et en recourant alors aux différentielles réciproques, par le moyen de nos lois (311) et (312), comme nous l'avons enseigné plusieurs fois déjà dans l'ouvrage présent. — Et dans le cas où, pour de grandes valeurs du temps x , la présente génération (256) de l'inconnue γ deviendrait divergente, on la

(26)

déterminerait successivement, d'après ce que nous avons indiqué pour les expressions parrilles (760) et (761), soit par la génération-neutre (781), soit par le procédé d'exhaustion, en donnant, à la quantité arbitraire x_1 , des valeurs progressives, plus petites que l'unité, et aussi petites que l'on voudra, pour pouvoir rendre convergente cette génération théorique (256) de l'inconnue τ en question.

On obtiendra donc, par l'application de cette méthode absolue, que nous avons donnée au monde depuis trente-cinq ans, l'intégration, aussi exacte que l'on voudra, de l'équation (253) qui forme le développement de notre principe aitiologique (221), publié en 1843. Et l'on aura ainsi, dans ce que nous avons publié jusqu'à 1843, les moyens de déterminer, avec telle exactitude que l'on voudra, cette force perturbatrice τ , qui, comme nous l'avons reconnu plus haut, est le résultat principal, le résultat absolu et invariable, dans la présente question aitiologique, où il s'agit de découvrir l'astre qui cause les perturbations d'Uranus.

C'est donc à ce résultat absolu (256) que doit aboutir nécessairement et inévitablement toute recherche qui prétendrait donner la solution de cette question. Bien plus, dans l'état actuel de la science, où il n'existe pas encore de méthode pour l'intégration générale de notre équation aitiologique (253), fixée en 1843, on ne peut arriver qu'au premier terme Q_n de la génération complète (256) de l'inconnue τ , c'est-à-dire, à sa valeur (259) que nous avons signalée plus haut, à la marque (231), comme étant le résultat principal auquel, lorsqu'on n'a pas encore notre méthode absolue (255) et (256), on peut arriver actuellement. Toutefois, à côté de l'imperfection inhérente aux observations astronomiques, ce résultat incomplet (231) est déjà plus que suffisant pour la solution pratique de la question dont il s'agit. Mais, quand même on parviendrait, sans doute par quelque divination, car il n'existe pas de méthode autre que notre méthode (255) et (256), à déterminer l'inconnue principale τ avec une exactitude plus grande que celle de son expression fondamentale (231), cette détermination plus parfaite ne serait toujours, et ne saurait absolument être rien autre qu'une partie de la détermination complète (256) qui résulte immédiatement de notre méthode aitiologique (221) et (253), publiée en 1843.

À la vérité, on pourrait, sans avoir besoin d'intégrer la présente équation complète (253), en éliminer autant qu'on voudra de différentielles progressives de l'inconnue τ , par le moyen de l'expression (225) de cette force perturbatrice. Mais alors, on introduirait dans l'équation (253) les éléments de l'astre inconnu; et par conséquent, la détermination qu'on tirerait de cette équation pour cette force τ , dépendrait déjà, non-seulement du mouvement connu d'Uranus et des éléments connus de son orbite, mais de plus du mouvement inconnu de l'astre en question et des éléments également inconnus de l'orbite de cet astre; de sorte que, dans la formation des équations (232), qui sont

destinées à déterminer ces inconnues, on aurait en outre, dans leur premier membre, toutes ces inconnues; ce qui compliquerait considérablement ces équations (232). Néanmoins, la solution pourrait être donnée de cette manière. Mais, même alors, le résultat principal, c'est-à-dire, la force perturbatrice γ serait donnée par notre équation (253), formant le développement pur et simple de notre principe aitiologique (221), publié en 1843. — Et en général, quelle que soit la détermination que l'on puisse obtenir pour cette force perturbatrice γ , formant le résultat principal de la présente question, cette détermination se trouvera nécessairement donnée d'avance et complètement par nos principes aitiologiques (221) et (253), qui constituent ainsi, non-seulement la véritable méthode, mais de plus l'unique méthode possible pour la découverte de l'astre qui exerce, sur Uranus, une telle force perturbatrice γ .

Ainsi, nous le répétons, quels que soient les détours par lesquels, en masquant ou en défigurant notre principe aitiologique (221) et la méthode (253) que ce principe constitue immédiatement, quels que soient, disons-nous, ces détours par lesquels M. Leverrier serait arrivé à notre résultat principal, c'est-à-dire, à la connaissance de la force perturbatrice γ , soit dans notre première détermination (231) de cette force, soit même dans une détermination quelconque, plus parfaite, faisant partie de notre détermination rigoureusement complète (256), et il ne pouvait absolument arriver à rien autre, il aurait nécessairement, sous le masque d'une autre forme, suivi dans le fond notre unique et véritable méthode (221) et (253). Et, ce qui est pis encore, c'est que, en masquant ainsi la question par une forme étrangère, il a fallu recourir à des calculs inutiles pour la question elle-même, mais utiles pour donner le change sur l'importance de cette question. En effet, on vient de voir que, sur la voie directe que prescrit notre véritable et unique méthode (221) et (253), nous avons trouvé que le résultat final (245) de cette question se réduit à deux équations à deux inconnues, et même, peut-on dire, à une seule équation à une seule inconnue, car l'une des deux inconnues finales est présumée suffisamment par la loi de Bode; et nous en avons conclu, avec raison, qu'une question scientifique qui, en faisant abstraction de sa méthode connue, se réduit à si peu de chose, ne méritait pas l'attention publique. Comment se fait-il alors que, suivant au fond nécessairement notre méthode, car il n'en existe aucune autre, M. Leverrier soit arrivé, loin de notre petit résultat final (245), à un résultat final tellement colossal qu'on a fait accroire, au gouvernement français, que cette découverte, qui, lorsque la méthode existait déjà, méritait à peine l'attention publique, est une des gloires du règne de Louis-Philippe?

C'est à l'histoire des sciences à répondre à cette remarquable question. — Et, pour l'en bien instruire, nous prions M. Arago, le parrain, nous allions dire le compère de M. Leverrier, d'insister, par toutes ses autorités, scientifiques, politiques, etc., etc., pour que l'on conserve à la nouvelle planète le nom de

LEVERRIER, qu'il lui a donné, probablement afin que la postérité apprenne comment, par l'influence, sans doute salutaire, des corporations scientifiques, un homme qui, à l'instar d'Améric-Vesputce, n'a rien fait dans la présente question scientifique, c'est-à-dire, un homme qui n'a pas découvert la méthode pour calculer la position de l'astre inconnu, et qui n'a pas non plus déconvert matériellement cet astre dans les cieux, peut néanmoins lui donner son nom, lorsque cela convient aux vues mystérieuses de ces corporations scientifiques.

Peut-être, par une juste interprétation des paroles que, quelque temps avant, l'Académie de Paris a dictées à son journal politique, pourrait-on déjà anticiper ici sur l'histoire des sciences, pour expliquer ce très-singulier phénomène scientifique, surtout la scandaleuse parade publique que l'on a faite d'une pauvre découverte qui, en faisant abstraction de la méthode existante et connue, se réduit à deux, et même à une seule équation ordinaire. Ces paroles académiques, telles que, probablement pour l'instruction publique, pour éclairer la nation, elles ont été insérées dans ce susdit journal, le *National*, du 5 juin 1844, les voici :

« Il y a longtemps que l'Académie n'avait entendu parler de M. Hoéné Wronski. — M. Wronski ! dites-vous ; qu'est ceci ? — Rien. — Quoi ! rien ? — Peu de chose. — Mais encore ? — C'est un puits de science si profond, si profond, que bien des gens le trouvent trop creux, et que l'œil, perdu dans ses ténèbres, doute s'il recèle des trésors ou le vide absolu. C'est un géomètre, jaloux de la Sibylle, qui a résolu de mettre en énigme toutes les mathématiques. Admirez M. Wronski ; il s'en contentera peut-être ; mais si vous voulez le satisfaire entièrement, consentez à ne pas le comprendre. Ne pas être compris, voilà l'ambition de M. Wronski, et il faudrait être bien peu complaisant pour lui refuser cet hommage ; car Lagrange lui-même, et Poisson, et tous les grands géomètres contemporains, le lui ont accordé sans difficulté.

« La dernière fois que M. Wronski a obtenu de ces mains illustres le brevet qu'il envoyait, il avait affaire aux mathématiques pures. Descartes, Leibnitz, Newton, et les autres, avaient fait ce qu'ils avaient pu en cette matière, M. Wronski vint *changer tout cela* ; il arriva, les mains pleines de formules merveilleuses, avec lesquelles on pourrait, par exemple, résoudre généralement les équations d'un degré quelconque. Bien entendu que ces formules n'étant comprises de personne, restèrent sans emploi : on continua humblement à creuser le sillon ouvert par Descartes, et M. Wronski remonta dans ses nuages, bunteux pour ces pauvres géomètres, qui ne savaient pas même attacher à leurs épaules les ailes qu'il leur avait fabriquées. »

Eh bien, cette imposture académique, car chaque mot est un mensonge, en considérant qu'elle est adressée à un public non-savant, et en la joignant à d'autres faits, assez notoires déjà, que nous reproduirons dans notre *Manifeste historique*, ne suffit-elle pas pour trahir une espèce de complot, assez vaste,

dont le but serait de détruire les vérités que nous apportons au monde, ces vérités dont la simple apparition décèle l'ignorance des hommes qui, au nom de la science, veulent continuer à exploiter leurs nations respectives ? — De ces faits notoires que nous reproduirons dans notre Manifeste, nous nous bornerons ici à rappeler la destruction générale de nos ouvrages en France, opérée de la manière que nous avons signalée dans l'ouvrage présent. Et à ces faits notoires, nous pourrions peut-être ajouter ici ce subit revirement d'opinion des adversaires de la susdite découverte de la planète Leverrier, surtout de ces adversaires anglais qui s'y étaient d'abord opposés avec une scandaleuse véhémence, et qui, probablement après qu'on leur eût fait connaître le secret mot d'ordre, sont venus humblement présenter leurs hommages.

Quoi qu'il en soit, ces injurieuses et surtout perversives paroles académiques que nous venons de reproduire pour les léguer à la postérité, et qui nous donnent le droit, ou plutôt qui nous imposent le devoir de ne rien ménager ici pour faire triompher la science, font naître une question très-grave, savoir, si M. Wronski, qui a donné aux sciences mathématiques leurs principes philosophiques et leurs lois fondamentales, et qui, avec ces lois, a résolu les grands problèmes de ces hautes sciences, comme on vient de le voir dans l'ouvrage présent, est « un homme de rien », comme le dit l'Académie des sciences de Paris, on se demande, en suivant la même échelle pour l'estimation des hommes, quel nom il faut donner à ceux qui, tirant leur existence de l'exploitation des sciences, n'ont jamais, ABSOLUMENT JAMAIS, fait rien de FONDAMENTAL pour les sciences, et qui, en se bornant ainsi à tout apprendre de l'étranger, sont même parvenus à un tel degré d'abrutissement scientifique que, loin d'en rougir, ils croient se faire gloire en avouant publiquement leur ignorance à l'égard de ces décisives et absolues lois mathématiques sur lesquelles sont fondées nos présentes solutions de tous les problèmes, et, ce qui est pis encore, qui ne craignent pas l'opprobre et la malédiction des hommes, comme un inévitable châtiment de Dieu, lorsque, parvenant à comprendre quelques résultats secondaires dans nos ouvrages, ils en font, pour leurs vils intérêts, et surtout POUR DÉTRUIRE LA VÉRITÉ, l'usage sacrilège que nous venons de signaler à l'occasion de la planète Leverrier !

Mais, laissons là ces turpitudes humaines, qui malheureusement sont encore inhérentes à notre misérable race, et achevons notre présent exemple aitiologique, en indiquant le complément de notre méthode pour la détermination de l'inclinaison et du lieu du nœud de la planète Leverrier. — Dans les Prolegomènes du Messianisme, nous n'avons donné que le présent principe aitiologique (221), servant à découvrir les éléments de cette planète dans le plan de son orbite. Aussi, M. Leverrier n'a-t-il pu faire rien de plus que le peu que ce principe lui a donné les moyens de faire. — Nous allons donc, pour lui laisser

compléter son ouvrage, lui indiquer également la méthode pour découvrir l'inclinaison et le lieu du nœud du plan de sa planète.

Il suffira, pour cela, de prendre de nouveau, par la susdite méthode de Jean Bernoulli, l'intégrale des deux premières des trois expressions (70) qui forment notre canon astronomique, en y joignant maintenant au moins le premier terme de la troisième des expressions (113) que nous avons données dans l'ouvrage présent pour les forces perturbatrices $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$. En limitant alors ces intégrales de l'inclinaison π et du lieu du nœud ψ , entre les époques des observations consécutives de la latitude héliocentrique d'Uranus, on pourra en déduire facilement, même en tenant compte de l'action pareille $\mathfrak{L}$ que les planètes connues exercent sur Uranus, les variations de cette inclinaison π et de ce lieu du nœud ψ dans les intervalles des observations, de la même manière que nous l'avons fait plus haut pour les variations des éléments qui dépendent de la longitude. Et l'on pourra conséquemment, en tenant compte du mouvement de la planète dans son orbite, mouvement qui est déjà connu, déterminer immédiatement l'inclinaison π et le lieu du nœud ψ , ces deux éléments que M. Leverrier n'a pu déterminer, parce que nous n'avions pas indiqué, dans les *Prolegomènes*, ce complément de notre méthode sitologique (221) et (253), publiée en 1843.

Procédons maintenant au deuxième grand problème mathématique du monde physique, c'est-à-dire, à la construction mécanique de la terre, et généralement des globes célestes par la matière. Et voyons ce que notre réforme des mathématiques a déjà fait pour la solution de ce problème, et ce qu'il nous reste encore à faire et à produire, dans la suite de nos ouvrages, et déjà même dans l'ouvrage présent, pour l'accomplissement de cette importante et difficile solution.

Or, comme nous allons le dire et le montrer en détail, l'état de cette mécanique terrestre, tel que la science moderne l'avait établi et développé avant nous, était encore plus imparfait que celui de la mécanique céleste. Bien plus, et il faut le dire sur-le-champ, à côté de nombreux matériaux, accumulés par des observations du pendule et par des mesures terrestres, nous n'avons trouvé que de faux résultats scientifiques, au point que l'on peut affirmer que, non-seulement la construction intérieure de notre globe, mais même sa forme ou figure extérieure, sont encore parfaitement inconnues. — Dans cet état de la science, ayant eu malheureusement des relations avec le bureau des longitudes de Londres, comme on le sait déjà suffisamment, nous lui présentâmes trois *Mémoires* manuscrits qui, sous le titre de *Préparation à la Réforme de la Mécanique céleste*, donnaient, dans tout son développement, la vraie théorie de la construction mécanique de la terre, en y embrassant sa structure intérieure, sa forme ou sa figure extérieure, et les modifications périodiques de cette forme par les marées. Et dans ces *Mémoires*, nous nous bornâmes à produire seule-

ment la nouvelle théorie, et nous nous abstîmes à dessein de parler des erreurs existantes, pour ne pas indisposer les membres savants du bureau. Mais, malgré cette précaution, cet illustre bureau, que dirigeaient deux médecins, les docteurs Th. Young et Wollaston, en reconnaissant son insuffisance scientifique à juger de pareils travaux, « déclina » (comme il le disait) de s'en occuper, et renvoya à l'auteur les Mémoires, après y avoir copié ce qu'il a pu comprendre, et ce qui, dénature, fut produit ensuite sous le nom du secrétaire de cet honorable bureau. Et alors seulement, après ce dernier abus de confiance, qui complétait l'indigne tissu des spoliations que l'auteur a éprouvées à Londres, en y apportant la science demandée par un acte du Parlement britannique, il produisit à la Société Royale de Londres, à laquelle n'allait pas le droit de *décliner* ainsi l'examen des ouvrages scientifiques, le quatrième Mémoire qui complétait les trois Mémoires précédents, mais qui avait pour objet de signaler enfin et de démontrer les erreurs capitales dont se composait toute la science moderne concernant la structure de la terre. Son but était, sinon de châtier, du moins d'ébranler cette sécurité des savants par brevet qui les autorise à désavouer impunément la vérité et à exploiter publiquement l'erreur. Et ce but l'eut atteint; car, la Société Royale n'osa plus prononcer seule. Elle envoya à Paris un délégué, le fils du célèbre Herschel, un savant comme M. Arago, pour se concerter avec les académiciens de Paris, afin de savoir ce qu'il y avait à faire dans une si grave circonstance. Et elle ne prononça effectivement qu'appuyée de ces formidables académiciens de Paris, en niant, en leurs noms communs, les erreurs qu'on leur dévoilait dans leur prétendue science. Mais, au cinquième Mémoire, intitulé *Appendice*, et déposé cacheté à l'Observatoire royal de Greenwich, entre les mains de son directeur, l'honorable M. Pond, avec prière de ne le décaçeter, et de ne le produire à la Société Royale qu'après qu'elle aura prononcé sur le premier Mémoire, fit perdre contenance à ces illustres savants; et alors, pour se disculper eux-mêmes, ils rejetèrent la faute sur les conseils qu'on leur avait donnés à Paris. Toutefois, par égard pour leurs conseillers et collègues, pour les académiciens de Paris, afin de ne pas les exposer publiquement, les savants de Londres supprimèrent l'un et l'autre de ces deux derniers Mémoires, et laissèrent ainsi le monde savant dans une parfaite ignorance sur cette positive et si urgente réforme de leur science erronée. — Mais, comme nous l'avons déjà dit ailleurs, il nous répugne vraiment de parler plus longtemps de telles gens; et pour ne plus en faire mention que lorsque, dans la suite de ces ouvrages, nommément dans le quatrième et dans le sixième, nous reproduirons cette nouvelle théorie de la terre, nous nous bornerons ici, en citant ces divers Mémoires, à les désigner respectivement, par *Mémoires du B. L.*, les audits trois Mémoires qui d'abord ont été présentés au bureau des longitudes de Londres, et par *Mémoires de la S. R.* et *Appendice de la S. R.*, les deux Mémoires qui ensuite ont été présentés à la Société Royale de Londres,

Mémoires que, comme nous venons de le dire, nous reproduirons dans la suite de ces ouvrages, avec toutes les circonstances secondaires qui les ont accompagnés. — Abordons la question.

En se fondant sur l'hypothèse de ce que, dans son état primitif, le globe terrestre était liquide, hypothèse que notre nouvelle théorie de la terre constate enfin positivement, Newton, et après lui Huyghens et Clairaut, ont cherché à déterminer la forme ou la figure de ce globe en tenant compte de sa rotation diurne, et en admettant, pour la densité de ses masses intérieures, trois hypothèses successives, savoir, Newton, une densité uniforme ou homogène; Huyghens, un noyau ou une densité centrale; et Clairaut, l'hypothèse de Boscowich, d'une densité croissante, dans des couches concentriques, depuis la surface jusqu'au centre de la terre. — Comme nous supposons que le lecteur a sous les yeux les *Prologomènes du Messianisme*, où nous avons provisoirement exposé cette grande question avec des détails suffisants, nous nous bornerons ici à signaler et à mieux caractériser les résultats que nous y avons produits.

Or, pour déterminer ainsi la forme ou la structure extérieure de la terre, dans cette triple hypothèse de la densité de ses masses intérieures et liquides, il fallait naturellement se fonder sur la théorie statique de l'équilibre des fluides. Et malheureusement, la science ne connaissait encore, pour cet équilibre, que deux lois, l'une statique, et l'autre purement algorithmique; et ce qui est pis, les savants croyaient que ces deux lois suffisaient pour fixer l'équilibre des fluides. Dans les deux Mémoires de la S. R., nous avons prouvé la fausseté, ou du moins cette insuffisance de la théorie de l'équilibre des fluides, en montrant que les principes sur lesquels elle reposait, ne s'appliquaient qu'à une poudre ou poussière indéfiniment déliée, mais nullement à la matière fluide elle-même. Et dans ces mêmes Mémoires de la S. R., surtout dans l'Appendice, en prenant pour principe l'action distinctive et caractéristique de la matière fluide, nous dévoilâmes les sept lois complètes, dont cinq statiques et deux purement algorithmiques, qui toutes président à l'établissement de l'équilibre des fluides, et dont les deux premières étaient seules connues. Ces sept lois, telles qu'elles ont déjà été démontrées suffisamment dans les Mémoires de la S. R., et telles que nous les démontrerons plus rigoureusement encore dans la suite de ces ouvrages, ont été produites dans les *Prologomènes du Messianisme* (pag. 312 à 314), sous les marques (283) et (284), (285) et (286), et (345). Et dans ces mêmes *Prologomènes*, nous avons indiqué le moyen d'une vérification générale de ces nouvelles lois de l'équilibre des fluides, en les appliquant à l'établissement de l'équilibre d'une sphère fluide en repos, du moins sans rotation, qui aurait une masse homogène, c'est-à-dire, une densité partout identique, et dont les particules intérieures, comme dans les globes célestes, s'attirent réciproquement en raison directe des masses et en raison inverse du carré de leurs distances. Cette vérification des nouvelles lois, en les appliquant à une telle sphère

fluide qui, d'après les premières notions de l'hydrostatique, subsistera nécessairement en équilibre, est pleinement suffisante pour constater, et, en quelque sorte, pour démontrer déjà ces sept lois, parce que, comme nous le remarquons dans les *Prolégomènes*, on ne saurait, avec trois quantités variables et distinctes P , Q , R , qui forment les trois actions rectangulaires sur chaque point du fluide, satisfaire à sept, ou du moins à cinq équations essentiellement hétérogènes, si ces équations n'étaient pas VRAIES GÉNÉRALEMENT, surtout lorsqu'elles impliquent des différentielles partielles, des intégrales, et même des différentielles prises sur ces intégrales.

Si l'on applique ensuite ces nouvelles lois de l'équilibre des fluides à des corps célestes en rotation, en considérant ces corps dans leur état primitif de fluidité, et leurs masses intérieures dans les trois hypothèses susdites de Newton, de Huyghens, et de Boscovich ou de Clairaut, les cinq dernières de ces sept lois, celles précisément qui servent surtout à l'établissement de l'équilibre, ne peuvent plus s'y vérifier, et seulement les deux premières de ces sept lois, celles qui forment purement les conditions de l'existence même des fluides, dans un état quelconque d'équilibre ou de mouvement, peuvent s'y réaliser, et donnent ainsi, à ces corps fluides, la forme d'un ellipsoïde, du moins pour les hypothèses de Newton et de Clairaut, et une forme peu différente de l'ellipsoïde pour l'hypothèse de Huyghens. Ainsi, dans aucune de ces trois hypothèses, la terre en rotation n'aurait pu, dans son état primitif de fluidité, conserver en équilibre ses masses intérieures sous cette forme d'un ellipsoïde. Et par conséquent, ces théories successives sur la forme de la terre, de Newton, de Huyghens, de Clairaut, spécialement celle de Clairaut, qui est la science actuelle des savants, sont toutes les trois absolument fausses.

Dans les *Prolégomènes* du *Messianisme*, nous avons établi ces erreurs, surtout celle du célèbre théorème de Clairaut, qui précisément introduit aujourd'hui la confusion dans le monde savant, nous les avons établies, disons-nous, avec une évidence telle qu'il faudrait réellement désespérer de l'établissement de la vérité parmi les savants, du moins parmi les savants par brevet, si cette évidence ne suffisait pas, à côté de leurs intérêts, pour leur faire reconnaître et avouer la vérité. En effet, sous les marques (xix) à (xxv), nous y avons montré, d'une manière irréfutable, que ce théorème de Clairaut, pour lequel on avait fait accroire qu'il fallait une haute science, n'est rien de plus qu'une simple et très-facile induction tirée des théorèmes de Newton et de Huyghens, et par conséquent surtout, qu'en le considérant dans cette généralité, comme le font les académiciens de Paris, ce fameux théorème de Clairaut est aussi faux que le sont les théorèmes de Newton et de Huyghens, dont il n'est ainsi qu'un simple corollaire. Nous y avons montré de plus, sous les marques (xxxix) et (xxxiii), que, dans le seul cas où ce théorème de Clairaut pourrait être vrai, si l'on pouvait admettre son hypothèse des couches concentriques à densité

croissante, hypothèse qui déjà est contraire à l'augmentation sous les pôles de la pesanteur, et par conséquent de la densité dans la couche extérieure, il faudrait absolument pouvoir satisfaire en même temps aux conditions (xxxii); et ces conditions simultanées et inséparables du théorème de Clairaut, hors desquelles ce théorème n'aurait absolument aucun sens, ne se réalisent nullement sur notre globe, comme le prouvent les nombreuses observations par lesquelles on peut maintenant déterminer, avec assez d'exactitude, les éléments de ces conditions. Ainsi, sans même avoir besoin de comparer l'aplatissement de la terre que donne le théorème de Clairaut, par les observations de la longueur du pendule, avec celui que donnent immédiatement les mesures des arcs terrestres, ce fameux théorème prouve lui-même sa fausseté par l'impossibilité où l'on est de satisfaire, avec son résultat, avec l'aplatissement de la terre, à ses propres et inséparables conditions (xxxiii).

Mais, en admettant que, dans les Mémoires de la S. R., on n'ait pu apercevoir cette propre démonstration irréfragable de la fausseté du théorème de Clairaut par ce théorème lui-même, telle que depuis nous l'avons développée dans les *Prolegomènes*, entre les marques (xxxv) et (xxxvi), la discordance que l'on trouvait pour l'aplatissement de la terre, déterminé, d'une part, à l'aide du théorème de Clairaut, par les observations du pendule, savoir, $\frac{1}{287}$, et de

l'autre part, à l'aide de la comparaison des mesures immédiates des arcs terrestres, faites aux Indes, près de l'équateur, et en Europe, près du pôle, savoir, $\frac{1}{310}$, discordance qui était connue universellement dans le monde savant,

et qui, par suite du désespoir qu'elle causait aux académiciens de Paris, décida Laplace à provoquer la mesure d'un arc à peu près parallèle à l'équateur, de Brest à Venise, cette désespérante discordance, disons-nous, était plus que suffisante pour mettre loyalement en doute ce prétendu théorème de Clairaut, surtout lorsque, dans les Mémoires de la S. R., nous venions de démontrer mathématiquement la fausseté de ce théorème, qui, comme nous l'avons déjà dit, introduisait ainsi la confusion dans le monde savant. Et comment qualifier aujourd'hui les paroles de M. Arago, lorsque, après la susdite démonstration propre de la fausseté du théorème de Clairaut, telle que nous l'avons développée dans les *Prolegomènes*, il dit, en parlant de ce théorème, que « *la détermination théorique de la figure de la terre a acquis toute la perfection désirable. Il règne maintenant le plus bel accord entre les résultats du calcul et ceux des mesures directes.* » Nous pensons que si M. Arago connaissait assez profondément les mathématiques pour pouvoir prononcer sur cette question, le mot d'involution ne suffirait pas pour désigner une telle atteinte portée sciemment à la vérité. Aussi, en connaissant d'ailleurs le caractère loyal et véridique de ce savant, serions-nous forcés, dans le cas où il serait réellement un profond ma-

thématicien, d'admettre que, pour décevoir ainsi le public, il devait avoir une très-grande raison, une raison d'État, le salut des savants par brevet, c'est-à-dire, le salut de l'exploitation privilégiée des peuples au nom de la science, surtout en considérant que c'est pour faire valoir, aux yeux du public, cette prétendue théorie académique de la terre, qui est fondée sur le faux théorème de Clairaut, que l'on a inventé le *MÈTRE*, comme mesure impérissable, en disant qu'elle forme la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre; ce qui, d'après la vraie théorie mathématique que nous dévoilons aujourd'hui, est nécessairement une erreur, résultant d'une fausse hypothèse (*). Et cette raison apparaîtrait encore plus grande quand on songerait que l'opuscule dans lequel M. Arago a porté innocemment cette grave atteinte à la vérité, est présenté, par le Bureau des Longitudes, au Roi des Français; de sorte que même le respect qu'il doit avoir, et qu'il a certainement pour cette autorité suprême, de laquelle émane la justice, et par conséquent la garantie de la vérité, n'aurait pu l'arrêter. Heureusement, il est notoire que M. Arago, ce savant secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Paris, ne connaît pas assez les hautes mathématiques pour savoir s'il existe ou s'il n'existe pas un « bel accord » entre l'expérience et la théorie connue de la terre. Ainsi, et nous en sommes charmés, l'honneur de cet illustre savant ne se trouve nullement compromis pour avoir voulu, suivant son idée, faire accroire au public qu'il existe un bel accord entre l'expérience et la science de l'Académie, dont il est, en sa qualité de secrétaire, le défenseur, et même le prôner officiel.

Cependant, ce n'est pas ainsi que parlait un ancien collègue de M. Arago, un adjoint de l'Observatoire et du Bureau des Longitudes de Paris, M. Nicollet, qui, avec les astronomes italiens, avait mesuré le susdit arc terrestre, entre Brest et Venise. — En revenant à Paris de cette expédition scientifique, à peu près vers le temps où l'auteur de l'ouvrage présent y était revenu de Londres, et ayant eu connaissance de la nouvelle théorie de la terre, telle qu'elle avait été produite à Londres, et passée en consultation à Paris, M. Nicollet vint trouver l'auteur; et, après lui avoir fait part des nouvelles et effrayantes discordances que l'on venait de reconnaître à Turin, comme résultant de cette mesure d'un arc du parallèle, il le pria de lui confier, non pas la théorie elle-même, mais au moins les formules qu'elle découvre pour la détermination de la figure de la terre. Il se proposait, disait-il, d'entreprendre et d'accomplir le vaste travail qu'il faut faire, en employant les observations et les mesures qui existent concernant la structure de la terre, pour pouvoir déterminer cette structure ou forme de notre globe, avec toutes ces données existantes, par le moyen des nouvelles formules ou lois qu'il demandait à l'auteur. Malheureusement, il

(*) La seule différence qui existe entre le *mètre* et la *toise*, comme étalons de mesure, c'est que le *mètre* est déposé aux Archives, et que la *toise*, si nous ne nous trompons, était déposée au Châtelet.

y mettrait pour condition que cette affaire demeurât secrète, jusqu'à l'entier accomplissement de ce travail, surtout pour que M. Laplace, à qui il disait devoir sa position et toute son existence, n'en eût aucune connaissance, en se proposant de n'éclater publiquement que lorsque, les chiffres en main, il pourrait produire les résultats qui, comme il l'espérait, satisferaient alors tout le monde savant, et lui donneraient, sinon l'indépendance qu'il n'avait pas, du moins le mérite d'avoir rendu un grand service à la science. — On conçoit que cette condition ne pouvait être acceptée par l'auteur, qui, dans aucun temps, n'a voulu capituler avec l'erreur, et qui, comme le prouve son long silence, préférerait enterrer la vérité dans sa tombe plutôt que de la produire à de pareilles conditions, quelque honorable qu'en fût sans doute l'intention de M. Nicollet.

Eh bien, ce que M. Nicollet n'a pu faire, M. Arago peut et doit le faire aujourd'hui. C'est la seule manière dont il puisse réparer le mal, sans doute involontaire, qu'il a fait à la science par le susdit désaveu de la vérité. Dans sa position de directeur de l'Observatoire de Paris, il doit le faire pour l'honneur de ce grand établissement scientifique, duquel est sortie et s'est propagée, sous l'influence des académiciens de Paris, surtout de Laplace, cette grave erreur du théorème de Clairaut. Et il peut le faire d'autant plus facilement que les formules que demandait M. Nicollet, sont aujourd'hui produites complètement dans les *Prolegomènes du Messianisme*, et qu'en outre l'auteur s'engage à donner à M. Arago toutes les démonstrations et toutes les explications dont il pourra avoir besoin. — Voici, en effet, quelle est cette nouvelle et véritable théorie mathématique de la terre.

§ I. — Structure extérieure ou figure de la terre.

Avant tout, et indépendamment de la présente obligation de M. Arago, nous devons faire remarquer que, par suite de la confusion que le théorème erroné de Clairaut a introduite dans le monde savant, on ne peut réellement pas affirmer, non-seulement qu'il existe un « bel accord » entre les calculs et les observations, comme M. Arago veut innocemment le faire accroire aux lecteurs de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, mais même que les savants connaissent aujourd'hui la figure de la terre, ou du moins son aplatissement elliptique.

C'est en vain qu'on voudrait alléguer l'aplatissement de $\frac{1}{306}$, que Laplace prétend avoir tiré des inégalités lunaires. Déjà Lagrange, en parlant de ces méthodes d'approximation dont Laplace s'est servi dans presque toute sa Mécanique céleste, témoignait vivement son inquiétude, en disant qu'il craignait que ces flexibles méthodes ne devinssent une espèce de mine dont on tirerait à peu près tout ce que l'on voudrait. Et un célèbre astronome, le baron Zach, sans parler ici de presque tous les géomètres étrangers, manifesta publiquement la

même crainte. Aussi, comme on le voit effectivement aujourd'hui, dans notre théorie lunaire, les inégalités de la lune qui dépendent de l'aplatissement de la terre, comme toutes les autres inégalités lunaires, sont-elles soumises à bien d'autres conditions, et présentent-elles conséquemment des résultats bien différents. — Mais, quand même le résultat numérique que Laplace a conçu ainsi, serait vrai, ce qui, comme contraire à la vraie mécanique céleste, n'est même plus admissible aujourd'hui, ce résultat ne nous apprendrait rien sur la théorie de la construction mécanique de la terre; et cette théorie, que nous allons signaler, n'en serait pas moins indispensable.

Or, comme nous l'avons reconnu sous la marque (LXII), dans les Prolégomènes du Messianisme, cinq données, observées sur un grand nombre de points à la surface de notre globe, sont nécessaires et suffisantes pour la détermination, non-seulement de la structure extérieure ou de la figure de la terre, mais même de sa structure intérieure ou de la distribution de ses masses. Et ces données, en distinguant les méridiens géogéniques des méridiens géographiques ou astronomiques, tels qu'ils sont fixés respectivement sous les marques (vi) et (v), sont, d'abord, les deux éléments astronomiques, la longitude x et la latitude λ , et ensuite, les trois éléments géogéniques, savoir, la pesanteur (g), le rayon de courbure s du méridien géogénique, et l'azimut (α) que forme l'angle entre ce méridien géogénique (vi) et le méridien géographique ou astronomique (v). Mais, jusqu'à ce jour, la science ne s'est pas encore aperçue de l'existence de ces méridiens géogéniques sur notre globe, et généralement sur les corps célestes; et par conséquent, les deux dernières données s et (α) ne sont pas encore connues. On ne saurait donc, dans l'état de la science ou du moins des matériaux qu'elle aurait dû recueillir, procéder à la détermination rigoureuse de la structure de notre globe, ni intérieure, ni même extérieure. Toutefois, en confondant les méridiens géogéniques avec les méridiens géographiques, comme on l'a fait jusqu'à présent, et en considérant ainsi l'azimut (α) comme zéro, et le rayon s comme le rayon de courbure des méridiens géographiques, on pourra déjà, avec les données existantes, obtenir une détermination approximative de la structure de la terre, et sortir ainsi de la profonde ignorance dans laquelle, contre la sagesse innocente assertion de M. Arago, la science se trouve encore concernant cette structure de notre globe. — Et, pour arriver à cette détermination approximative, deux pas successifs, que nous avons signalés dans les Prolégomènes, se présentent naturellement, savoir, d'abord, en considérant la terre comme ayant la forme d'un ellipsoïde, ou du moins une forme peu différente d'un ellipsoïde, et ensuite, en n'attribuant d'avance aucune forme déterminée à notre globe, et en se bornant à confondre les méridiens géogéniques avec les méridiens géographiques, ce qui semble ne pouvoir causer un trop grand écart de la vérité. — Eh bien, les procédés pour ces deux progrès dans la détermination actuelle et indispensable de la structure de notre globe, sont

fixés, avec précision et avec tous les détails nécessaires, dans nos *Protégomènes*, comme nous allons les indiquer.

D'abord, lorsque l'on considère la terre comme ayant la forme d'un ellipsoïde, ou du moins une forme analogue à celle d'un ellipsoïde, nous avons fait connaître, sous la marque (xxxv), le véritable théorème qui, dans un tel corps céleste, quelle que soit d'ailleurs la distribution de ses masses intérieures, fixe la relation générale qui y existe entre l'aplatissement θ , la force centrifuge q sous l'équateur, et l'augmentation Γ de la pesanteur sous les pôles. Et partant de ce nouveau et décisif théorème (xxxv), nous montrons, sous les marques (xlx), (x), et suivantes, comment, avec les données que l'on a déjà, c'est-à-dire, avec les observations de la longueur du pendule et avec les mesures des arcs des méridiens terrestres, on peut, dans cette supposition que la terre a une forme ellipsoïdique, déterminer enfin le rayon b de l'équateur et l'aplatissement θ ; quantités qui, comme on le voit par ces procédés mêmes de leur détermination, ne sont pas encore connues. Et ces procédés, qui n'exigent que la résolution d'une équation du quatrième, ou, à la rigueur, du cinquième degré, sont, à tous égards, éminemment simples.

Ensuite, lorsqu'on n'attribue d'avance à la terre aucune forme déterminée, et lorsqu'on se borne à considérer comme identiques, ou du moins comme très-peu différents, les méridiens géogéniques et les méridiens géographiques ou astronomiques, ainsi qu'on est forcé de le faire dans l'état actuel des observations terrestres, nous avons donné immédiatement, pour la vraie théorie de la terre, quelles que soient la structure intérieure et la structure extérieure de ce globe, et par conséquent, quelque différents que puissent y être les méridiens géogéniques et les méridiens géographiques, nous avons donné, disons-nous, sous la marque (lvi) de nos *Protégomènes*, la deuxième loi fondamentale de la construction mécanique des corps célestes, formant le *PROBLÈME-UNIVERSAL* de cette construction mécanique ou de ce système de réalités que présente la structure des corps célestes. Et, pour notre présent cas spécial, où l'on suppose $(\pi) = 0$, c'est-à-dire, où l'on confond encore les méridiens géogéniques avec les méridiens géographiques, nous avons donné, sous la marque (lxm), la détermination des coordonnées géogéniques x et y par les éléments astronomiques, par la longitude α et par la latitude λ ; de ces coordonnées x et y qui sont nécessaires, d'abord, pour la formation générale (lx) des données s et (g) , et ensuite, pour la solution définitive du présent problème-universel (lvi). — Il ne reste donc, pour accomplir la vraie théorie de la terre, qu'à résoudre effectivement ce problème-universel (lvi), c'est-à-dire, il ne reste qu'à intégrer l'équation aux différentielles partielles (lvi) qui forme ici ce problème-universel de la construction mécanique des corps célestes.

Nous avons déjà dit plus haut que l'on peut facilement, surtout dans le cas présent, où nous supposons $(\pi) = 0$, intégrer une telle équation à différentielles

partielles par l'application de la deuxième de nos trois lois fondamentales des mathématiques, nommément par l'application de la solution du problème-universel de l'algorithmie, formant, parmi nos trois méthodes absolues, la troisième *secondaire*. Et nous y avons ajouté que, dans les Mémoires du B. des L. de Londres, sous les marques (392), (393), etc., nous avons déjà intégré ainsi réellement cette équation fondamentale (xvi) de la théorie de la terre. — Or, en légant ici à M. Arago l'exécution pratique ou numérique de cette nouvelle et positive théorie de la terre, par la raison que nous en avons donnée plus haut, nous devons reproduire cette décisaive intégration de l'équation en question (xvi), afin de compléter les lois nécessaires à l'établissement définitif et immédiat de cette véritable théorie de la construction mécanique de notre globe, et afin d'ôter ainsi, à ce savant directeur de l'Observatoire de Paris, de cette ville où paraissent les présentes découvertes, toutes les difficultés qui pourraient lui rendre impossible l'exécution dont il s'agit. — Lorsque, en 1811, l'auteur présenta à l'Académie des sciences de Paris sa *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, où il donna déjà sa deuxième loi fondamentale des mathématiques, celle précisément qu'il s'agit ici d'appliquer, M. Arago, rapporteur de la commission chargée de prononcer sur cette *Réfutation*, dit, avec un remarquable tact mathématique, « qu'à force de généraliser les formules, l'auteur n'est plus en état de les démontrer. » Dans la première section de la *Philosophie de la Technique*, l'auteur fut au désespoir de se voir forcé de donner un démenti à cette assertion de M. Arago, aussi polie que pleine d'une juste prévision, en y donnant la démonstration, non-seulement de ces formules qui paraissaient inconcevables à ce savant académicien, mais de la loi suprême elle-même des mathématiques, de laquelle, comme l'avait déjà dit Lagrange, dérivait toutes ces formules, qui n'en étaient même que des cas très-particuliers. Nous n'avons pas l'habitude de parler aussi poliment que M. Arago, mais nous serions enchantés, pour son honneur scientifique, si, à son tour, il nous donnait ici un démenti pareil en intégrant, à sa façon, cette équation en question (xvi), qui, quoi qu'en fasse toute l'Académie des sciences de Paris, restera éternellement la vraie équation fondamentale de la construction mécanique de la terre. Nous nous en contenterions même, si M. Arago, ou tout autre académicien de Paris, nous donnait au moins la démonstration de l'intégration que nous allons faire connaître; ce qui, sans contredit, est maintenant la chose du monde la plus facile, parce que nous venons d'en indiquer les moyens dans notre deuxième loi fondamentale des mathématiques, dans celle précisément qui avait été produite dans la susdite *Réfutation* de Lagrange, et qui avait donné à M. Arago une si mauvaise opinion de l'auteur, et parce que, de plus, nous allons faire connaître le résultat positif de cette intégration.

En conservant toute la notation que nous avons adoptée pour notre mécanique terrestre, telle que nous l'avons produite dans les *Prolégomènes* du Mes-

sianisme, et en continuant à numéroter les formules suivant l'ordre que nous y avons adopté, formons en outre la quantité auxiliaire . . . (LXXXII)

$$Z = \frac{(1 + \Theta) \cdot (g) \cdot \sqrt{(b^2 - a^2)}}{\sqrt{\{(g) \cdot s^2 + \mu a^2\}^2 - (g')^2 \cdot a^2}};$$

daus laquelle, comme nous l'avons déjà dit dans la théorie générale, après la marque (xv), la quantité ξ est sensiblement égale à l'unité, surtout lorsque $(\alpha) = 0$, comme nous le supposons ici, et dans laquelle, comme il faut bien le remarquer, les quantités s et (g) sont, d'après les expressions (Lx), des fonctions des coordonnées x et y , qui, à leur tour, se trouvent déterminées, par les expressions (LXXI), en fonctions des éléments astronomiques, savoir, de la longitude x et de la latitude λ . — Alors, en intégrant l'équation aux différentielles partielles (Lvi), qui forme le problème-universel de toute la mécanique terrestre, ou généralement de la construction mécanique des corps célestes, nous obtiendrons, pour l'ordonnée inconnue z , l'expression générale et éminemment simple . . . (LXXXIII)

$$z = \frac{\sqrt{(b^2 - a^2)}}{1 + \Theta} \cdot \left\{ 1 + \frac{(Z - 1) \cdot a^2}{2b^2 - a^2} + \frac{(Z - 1)^2 \cdot (b^2 - 2a^2) \cdot a^2}{(2b^2 - a^2)^2} + \text{etc.} \right\},$$

qui constitue, non pas une série, mais, d'après la loi suprême des mathématiques, une génération progressive, toujours convergente, et par conséquent, exacte à volonté, en y employant surtout, à la place de la pesanteur (g) , la gravitation primitive g , celle qui est déterminée par la formule (Lx). — Nous nous bornons ici à ne donner que les trois premiers termes de cette génération progressive, parce qu'ils sont plus que suffisants pour le cas de $(\alpha) = 0$, lorsqu'on ne distingue pas encore les méridiens géogéniques des méridiens géographiques, comme on est obligé de le faire provisoirement, jusqu'à ce qu'il existe des mesures prises sur les méridiens géogéniques. Toutefois, nous nous engageons ici à faire connaître la loi de cette génération progressive de l'ordonnée z , à ceux des géomètres qui nous la demanderont avant que, dans la suite de ces ouvrages, nous l'ayons publiée et démontrée.

Mais, ce qu'il faut remarquer principalement dans cette expression générale (LXXXIII) de l'ordonnée z , ce sont, les variations possibles du rayon b de l'équateur et de l'aplatissement Θ du pôle de l'hémisphère où se trouve cette ordonnée inconnue z . En effet, il faut savoir que, pour une longitude donnée x , ces quantités b et Θ , en vertu des formules (LXII) qui donnent la quantité u , sont déterminées par les expressions . . . (LXXXIV)

$$b = \frac{x' \cdot (g')}{(g')^2 - \mu \cdot x'^2},$$

$$\Theta = \frac{b}{a} - 1 = \frac{b - a}{a};$$

en désignant par a le demi-axe dans cet hémisphère, et en marquant par un accent les quantités x et (g) qui, en vertu de leurs expressions générales (IX), correspondent à cette longitude donnée x et à la latitude $\lambda = 0$. Or, ces quantités x' et $(g)'$ peuvent être différentes pour différentes longitudes x ; et par conséquent, le rayon b de l'équateur et l'aplatissement Θ , peuvent être différents dans les différents méridiens. — C'est précisément cette variation (LXXXIV) des quantités b et Θ qui correspond ici, du moins en partie, à la fonction arbitraire résultant de la présente intégration (LXXXIII) de l'équation (LVI) aux différentielles partielles.

Ainsi, pour avoir le rayon moyen de l'équateur, rayon moyen que nous désignerons par $[\delta]$, il suffira de déterminer, par l'équation . . . (LXXXV)

$$\frac{db}{dx} = 0,$$

le minimum b_1 et le maximum b_2 de ce rayon b ; valeurs extrêmes qui donneront . . . (LXXXVI)

$$[\delta] = \frac{1}{2} \cdot (b_1 + b_2).$$

Et par conséquent, pour l'aplatissement moyen $[\Theta]$, on aura . . . (LXXXVII)

$$[\Theta] = \frac{[\delta]}{a} - 1.$$

Il ne restera donc qu'à connaître le demi-axe a dans chacun des deux hémisphères. Et, pour cela, il suffira notoirement de comparer les mesures des arcs des méridiens, faites près de l'équateur et près des pôles, et de prendre la moyenne des résultats qu'elles donneront séparément pour l'aplatissement en question. Mais, il est évident que l'on ne doit ainsi comparer que les mesures faites sur les mêmes méridiens, ou du moins, autant que possible, sur les méridiens qui répondent aux susdites valeurs extrêmes b_1 et b_2 du rayon b de l'équateur, ou seulement sur les méridiens qui répondent à la susdite valeur moyenne $[\delta]$ de ce rayon b de l'équateur. — En absence de ces mesures homologues, nous sommes forcés provisoirement, pour fixer, d'une manière positive, l'aplatissement moyen de la terre, du moins pour notre hémisphère, de comparer les mesures assez exactes qui ont été faites aux Indes et en Europe, comme nous les avons comparées dans les Prolegomènes. Le résultat de cette comparaison donne notoirement, pour l'aplatissement moyen $[\Theta]$ de la terre, la valeur que nous y avons rappelée sous la marque (XIV), savoir (LXXXVIII)

$$[\Theta] = \frac{1}{310}.$$

Et avec cette valeur, la présente expression (LXXXVII) donnera, pour le demi-axe a , du moins dans notre hémisphère, la valeur provisoire . . . (LXXXIX)

$$a = \frac{310}{311} \cdot [\delta];$$

valeur qui se trouvera définitivement déterminée lorsque, par la théorie présente (LXXXV), c'est-à-dire, par l'équation . . . (xc)

$$0 = \left\{ (g'y - \mu \cdot s') \cdot \frac{d[s' \cdot (g'y)]}{dx} - s' \cdot (g'y) \cdot \left\{ \frac{d(g'y)}{dx} - \mu \cdot \frac{ds'}{dx} \right\} \right\},$$

ou aura, en vertu de l'expression (LXXVI), déterminé le rayon moyen $[\delta]$ de l'équateur.

Pour cette dernière détermination, il ne faut pas perdre de vue que, d'après les expressions (ix), les quantités s et (g) se trouvent construites, par interpolation, en fonctions des coordonnées x et y . Mais, comme ces coordonnées x et y sont données, par les expressions (LXII), en fonctions de la longitude x et de la latitude λ , on aura notoirement . . . (xc)

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dx} \right) &= \left(\frac{ds}{dx} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dx} \right) + \left(\frac{ds}{dy} \right) \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right), \\ \left(\frac{d(g)}{dx} \right) &= \left(\frac{d(g)}{dx} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dx} \right) + \left(\frac{d(g)}{dy} \right) \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right); \end{aligned}$$

et ces différentielles se trouveront déterminées généralement pour toute latitude λ , et par conséquent pour la latitude $\lambda = 0$, dont il s'agit dans l'équation (xc) en question.

Bien plus, en observant qu'en vertu des expressions (LXII), les coordonnées x et y sont fonctions des éléments astronomiques x et λ , on peut toujours et immédiatement considérer les fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$, qui, d'après leur construction par interpolation (ix), doivent former les quantités générales s et (g) , comme étant des fonctions de la longitude x et de la latitude λ ; car, en y introduisant, pour x et y , leurs valeurs (LXII), elles ne contiendront que ces éléments astronomiques x et λ . — Quant à la forme de cette construction par interpolation des fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$, il faut, d'après ce que nous avons fait dans les Mémoires du Bureau des Longitudes de Londres, sous les marques (444) et (446), leur donner la forme suivante. — D'abord, pour ce qui concerne la pesanteur (g) , il est notoire que, par la moyenne prise entre les nombreuses observations de la longueur du pendule, on peut déjà déterminer suffisamment cette pesanteur (g') sous l'équateur, et (g'') sous les pôles, comme nous l'avons dit dans les Prolegomènes. Et alors, en observant que l'expression générale (LXXIX) de la pesanteur (g) , telle qu'elle est déjà connue, dérive réellement de nos véritables lois de la structure mécanique de la terre, nous pouvons, avec beaucoup de facilité, construire par interpolation la quantité générale (g) en lui donnant la forme . . . (xcii)

$$\begin{aligned}
 (g) = & (g') + \left\{ (g')'' - (g')' \right\} \cdot \sin^2 \lambda + \\
 & + G_1 \cdot x + G_2 \cdot x(x - x_1)(x - x_2) + G_3 \cdot x(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + \text{etc.} \\
 & + G_5 \cdot y + G_6 \cdot y(y - y_1)(y - y_2) + G_7 \cdot y(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4) + \text{etc.};
 \end{aligned}$$

en désignant progressivement par x_1, x_2 et y_1, y_2 les valeurs de x et y qui, dans cette méthode d'interpolation, servent à déterminer les coefficients G_1 et G_2 , et par x_3, x_4 et y_3, y_4 les valeurs de x et y , qui servent ainsi à déterminer les coefficients G_3 et G_4 , et ainsi de suite, et en supposant que les coordonnées x et y sont données immédiatement, par les expressions (LXIII), en fonctions de la longitude α et de la latitude λ . En effet, les coefficients indéterminés G_1, G_2, G_3 , etc., qui seront ainsi de très-petites quantités, pourront facilement être déterminés en un nombre égal à celui des lieux où l'on a observé cette pesanteur (g) avec une exactitude suffisante. — Ensuite, pour ce qui concerne le rayon de courbure s des méridiens, en considérant que la valeur moyenne de ce rayon s est déterminée suffisamment par l'équation (LII), nous pouvons de même, avec beaucoup de facilité, construire par interpolation la quantité générale s , en lui donnant la forme . . . (LXIII)

$$\begin{aligned}
 s = & \frac{\delta \cdot (1 + \theta)}{\sqrt{1 + 2\theta \cos \lambda}} + \\
 & + S_1 \cdot x + S_2 \cdot x(x - x_1)(x - x_2) + S_3 \cdot x(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + \text{etc.} \\
 & + S_5 \cdot y + S_6 \cdot y(y - y_1)(y - y_2) + S_7 \cdot y(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4) + \text{etc.};
 \end{aligned}$$

en désignant de nouveau et progressivement, comme sous la marque (XCU), par x_1, x_2 et y_1, y_2 les valeurs de x et y , qui, dans cette interpolation, servent à déterminer les coefficients S_1 et S_2 , et par x_3, x_4 et y_3, y_4 les valeurs de x et y , qui servent ainsi à déterminer les coefficients S_3 et S_4 , et ainsi de suite, et en supposant aussi que les coordonnées x et y sont données immédiatement, par les expressions (LXIII), en fonctions de la longitude α et de la latitude λ . En effet, également ici les coefficients S_1, S_2, S_3 , etc., qui seront de même de très-petites quantités, pourront facilement être déterminés en un nombre égal à celui des lieux où l'on a mesuré ce rayon de courbure s avec une exactitude suffisante, en observant que l'aplatissement θ est le susdit

aplatissement moyen $\{\theta\}$ dont la valeur provisoire est $\frac{1}{310}$, et que le rayon δ de l'équateur doit ici être déterminé provisoirement par la valeur moyenne que donne, pour ce rayon, l'équation (LXII) du quatrième, ou du moins du troisième degré, comme nous l'avons dit dans les Prolegomènes. — Quant aux quantités générales s et (g) qui entrent dans les expressions (LXIII) des coordonnées x et y , leurs valeurs seront d'abord données immédiatement lorsque ces coordonnées serviront à la détermination des coefficients G_1, G_2, G_3 , etc.,

et S_1, S_2, S_3 , etc., dans les expressions (xcii) et (xciii); et lorsque, ensuite, ces deux dernières expressions devront servir à la détermination des quantités (g) et s pour les lieux où elles n'ont pas été observées ou mesurées, on aura, pour la première détermination de ces quantités (g) et s dans les expressions (lxiii) des coordonnées x et y , les valeurs que donneront, pour ces quantités en question (g) et s , leurs expressions générales (xcii) et (xciii), en y considérant provisoirement les coefficients G_1, G_2, G_3 , etc., et S_1, S_2, S_3 , etc., comme zéro, ce qui, à cause que ces coefficients sont de très-petites quantités, n'influera guère sur la détermination finale de ces mêmes quantités (g) et s par leurs complètes expressions générales (xcii) et (xciii).

Nous pouvons ainsi, à l'aide des expressions (lxiii) des coordonnées x et y en fonctions de la longitude λ et de la latitude λ , ramener toutes nos expressions à ces éléments astronomiques. Et par conséquent, nous pouvons surtout ramener ainsi à ces éléments astronomiques l'expression principale (lxxxiii) qui donne la solution du problème-universel (lvi) de cette mécanique terrestre, et cela tout simplement, en désignant par r le rayon de la terre correspondant aux coordonnées x, y, z , qui se trouve ainsi déterminé par l'expression

$$\dots (xciv) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + s^2,$$

et qui, en vertu de l'expression principale (lxxxiii), sera alors . . . (xcv)

$$r^2 = u^2 + \frac{b^2 - u^2}{(1 + \Theta)} \left\{ 1 + \frac{(z-1) \cdot u^2}{2b^2 - u^2} + \frac{(z-1) \cdot (b^2 - u^2) \cdot n^2}{(2b^2 - u^2)^2} + \text{etc.} \right\}^2;$$

la quantité u se trouvant déterminée par les expressions (lxiii), savoir . . . (xcvi)

$$u = \frac{s \cdot (g) \cdot \cos \lambda}{(g) - \mu s \cdot \cos^2 \lambda}.$$

Telle (xcv) sera donc la solution définitive et complète du problème-universel (lvi) de la mécanique terrestre, ou généralement de la construction mécanique des corps célestes, solution qui, pour tout point à la surface de ces globes, déterminé par sa longitude et sa latitude astronomiques; fait connaître le rayon r , et par conséquent la structure extérieure ou la forme de ces globes célestes. — Il faut, en effet, remarquer que la présente expression (xcv) est générale pour tous les corps célestes, et que ce n'est que par les déterminations spéciales (xcii) et (xciii) de la pesanteur (g) et du rayon de courbure s des méridiens à la surface de notre globe, que cette expression générale (xcv) s'applique à ce globe, et fait ainsi connaître la forme ou la figure de la terre.

Ainsi, ce grand problème de la figure de la terre, que les efforts des géomètres n'ont pu vaincre jusqu'à ce jour, sans parler même de la confusion qu'y ont introduite les académiciens de Paris, se trouve enfin résolu rigoureusement et complètement, du moins dans la considération première, à laquelle il faut

s'arrêter d'abord, dans celle de l'identité entre les méridiens géogéniques et les méridiens géographiques. Et c'est de cette décisive solution que, par la raison que nous avons donnée plus haut, nous léguons ici principalement à M. Arago l'exécution pratique ou numérique, pour établir enfin cette base immuable de la connaissance positive de notre globe. — En effet, M. Arago, tout savant qu'il est sans doute, sait très-bien que, jusqu'à ce jour, il ne s'est encore présenté aucune occasion pour transmettre son nom à la postérité par quelque grande découverte scientifique; et il comprendra certainement que, pour le faire, il a deux moyens dans l'occasion présente, l'un de continuer à désavouer ces hautes vérités, comme il l'a fait, d'après ce que nous avons dit plus haut, et l'autre, de les reconnaître et de leur donner l'accomplissement pratique. C'est à M. Arago de choisir; mais, à coup sûr, quel que soit ce choix, son nom ira maintenant à la postérité.

Il s'agit, en effet, d'une question de la plus haute gravité, qui concerne surtout la France. — Par une fausse théorie mathématique de la terre, fondée sur le faux théorème de Clairaut, on a supposé à la terre une forme elliptique telle que, par la mesure exacte d'une portion du méridien de Paris, on a conclu que le quart d'un méridien terrestre, c'est-à-dire, sa partie comprise entre l'équateur et l'un des pôles, contient dix millions de petites mesures que l'on a nommées MÈTRES, et que l'on a fait adopter officiellement par le gouvernement français, pour l'unité de mesures linéaires, en lui faisant déclarer authentiquement, pour faire considérer cette mesure comme impérissable, que cette unité est une telle dix-millionième partie du quart du méridien terrestre. Or, c'est une erreur mathématique qui est maintenant incontestable; et cette erreur devient grave par le compromis national qui résulte de la sanction légale qu'on lui a fait donner par le gouvernement. — Pour soutenir cette erreur, aujourd'hui qu'elle est reconnue universellement, les académiciens de Paris, qui l'ont inventée, nommément M. Arago, qui est leur organe, veulent, vis-à-vis du public non-savant, se retrancher derrière la loi de la pesanteur à la surface de la terre, qui ne dépend que de la force centrifuge à cette surface, et nullement de la construction mécanique de notre globe, et qui se vérifie suffisamment sur un globe quelconque dont la forme est analogue à celle d'un ellipsoïde, comme nous l'avons prouvé rigoureusement dans nos Mémoires de la S. R., pour les trois hypothèses de Newton, de Huyghens et de Clairaut, et, comme nous l'avons répété, avec assez de détail, dans les *Prolegomènes du Messianisme* (pages 343 à 347). Mais, cette loi de la pesanteur, telle que nous l'avons déduite sous la marque (xxxix), savoir . . . (xcvii)

$$(g) = (g') + \left\{ (g'') - (g') \right\} \cdot \sin^2 \lambda,$$

dépend uniquement de la latitude λ ; et elle ne saurait conséquemment apprendre rien sur la forme spéciale de notre globe, pas même sur le plus ou

moins grand aplatissement de ce globe, en supposant, d'après cette loi (cxvii) de la variation de la pesanteur, que sa forme est analogue à celle d'un ellipsoïde. Il fallait donc, pour fixer cet ellipsoïde, pour assigner son aplatissement, et pour pouvoir ainsi évaluer la longueur de ses méridiens, dont on a tiré le mètre, il fallait, disons-nous, recourir à une autre loi, nommément au théorème de Clairaut. Et ce théorème, comme nous l'avons prouvé irrécusablement, d'abord dans les Mémoires de la S. R., et ensuite surtout dans les Prolegomenes, par les conditions simultanées et irréfragables (xxxiii), est faux; de sorte que la détermination de la longueur du quart du méridien terrestre, et par conséquent de sa dix-millionième partie, est également fautive, ou du moins tout à fait arbitraire.

Il doit donc importer aux illustres académiciens de Paris, pour ne pas consacrer plus longtemps une si grave erreur, de déterminer, avec exactitude, la vraie longueur du mètre, de cette base du système métrique qu'ils ont fait adopter au gouvernement français, et qu'ils voulaient, dans le temps, faire adopter universellement. — Et nous pouvons leur en indiquer les moyens, aujourd'hui que la vraie théorie mathématique de la terre se trouve dévoilée par notre réforme de la mécanique terrestre, aujourd'hui surtout que cette réforme se trouve accomplie par notre présente détermination générale et rigoureuse (xcv) du rayon r de la terre, correspondant à la latitude λ et à la longitude α d'un point quelconque de la surface de notre globe.

Il suffit, pour cela, de déterminer, avec exactitude, l'ellipsoïde osculateur de la surface de la France; ellipsoïde dont le rayon de l'équateur et l'aplatissement serviront à déterminer rigoureusement la longueur du méridien, à laquelle longueur on pourra alors comparer la mesure nommée *mètre*, qui, jusqu'à présent, n'est qu'un étalon arbitraire, comme l'était l'ancienne toise, et qui alors recevra une détermination fixe, dépendant du sol de la France, et aussi invariable que peut l'être physiquement ce sol lui-même. Et pour découvrir cet ellipsoïde osculateur de la surface de la France, il suffit de mesurer deux arcs de grands cercles, l'un dans le méridien de Paris, et l'autre dans le susdit cercle, à peu près parallèle à l'équateur, depuis Brest jusqu'à Grenoble; arcs dont on a déjà des mesures suffisamment exactes, du moins pour celui dans le méridien de Paris. En effet, comparant les longueurs de ces arcs avec celle que donne notre présente détermination rigoureuse (xcv) du rayon de la terre, on aura deux équations dont on pourra tirer, pour l'ellipsoïde cherché, le rayon de son équateur et son demi-axe, qui suffiront pour la détermination de la longueur de son méridien, de cette longueur fondamentale qui doit servir, comme terme absolu de comparaison, à la détermination péremptoire et invariable de la longueur du mètre actuel, tel qu'il est adopté pour base du système métrique de la France. — Voici les moyens pour arriver à ce résultat positif et absolu.

Soient λ_1 et λ_2 les latitudes, et α_1 et α_2 les longitudes géographiques des

extrémités d'un grand cercle à la surface de la France, et soient (A) l'étendue angulaire (en degrés) de cet arc, et ϖ son obliquité, c'est-à-dire, l'angle qu'il fait avec le méridien qui passe par la première de ses extrémités, par celle qui est déterminée par les quantités λ_1 et κ_1 , et que nous considérerons comme origine des mesures. Nous aurons notamment, pour la détermination des quantités (A) et ϖ , les formules . . . (xcviii)

$$\cos(A) = \sin \lambda_1 \cdot \sin \lambda_2 + \cos \lambda_1 \cdot \cos \lambda_2 \cdot \cos(\kappa_2 - \kappa_1),$$

$$\cos \varpi = \frac{1}{\sin(A)} \cdot \left\{ \cos \lambda_1 \cdot \sin \lambda_2 - \sin \lambda_1 \cdot \cos \lambda_2 \cdot \cos(\kappa_2 - \kappa_1) \right\}.$$

Concevons maintenant, sur cet arc (A), un point dont la distance angulaire à la susdite extrémité λ_1 et κ_1 , soit A, et dont la latitude et la longitude géographiques soient respectivement λ et κ . On aura notamment, pour la détermination des quantités A et λ , qui seront fonctions de la longitude κ , les formules . . . (xcix)

$$\tan A = \frac{\cos \lambda_1 \cdot \tan(\kappa - \kappa_1)}{\sin \varpi + \cos \varpi \cdot \sin \lambda_1 \cdot \tan(\kappa - \kappa_1)},$$

$$\tan \lambda = \frac{\cot \varpi}{\cos \lambda_1} \cdot \sin(\kappa - \kappa_1) + \tan \lambda_1 \cdot \cos(\kappa - \kappa_1);$$

et par conséquent, on aura, pour les différentielles de ces quantités A et λ , les expressions générales . . . (c)

$$dA = \frac{\sin \varpi}{\cos \lambda_1} \cdot \frac{\sin^2 A \cdot d\kappa}{\sin^2(\kappa - \kappa_1)},$$

$$d\lambda = \cos^2 \lambda_1 \cdot \left\{ \frac{\cot \varpi}{\cos \lambda_1} \cdot \cos(\kappa - \kappa_1) - \tan \lambda_1 \cdot \sin(\kappa - \kappa_1) \right\} \cdot d\kappa.$$

Dans le cas particulier où le présent arc A fait partie du méridien, dont la longitude est κ_1 , les expressions générales (xcix) et (c) deviennent indéterminées. Mais alors, suivant les expressions (xcviii), en y faisant $\lambda_2 = \lambda$, et $\kappa_2 = \kappa$, on aurait d'abord généralement . . . (ci)

$$\cos A = \sin \lambda_1 \cdot \sin \lambda + \cos \lambda_1 \cdot \cos \lambda \cdot \cos(\kappa - \kappa_1),$$

$$\cos \varpi = \frac{1}{\sin A} \cdot \left\{ \cos \lambda_1 \cdot \sin \lambda - \sin \lambda_1 \cdot \cos \lambda \cdot \cos(\kappa - \kappa_1) \right\}.$$

Et par conséquent, pour le cas particulier où l'arc A ferait partie du méridien, en faisant $\kappa = \kappa_1$, on aurait . . . (cii)

$$\cos A = \cos(\lambda_1 - \lambda); \quad \text{et par conséquent}$$

$$A = (\lambda_1 - \lambda), \quad \text{et} \quad \cos \varpi = \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda)}{\sin(\lambda - \lambda_1)} = -1;$$

en prenant toujours, pour la formation de l'angle ϖ , le côté positif de l'arc A. On aurait donc, pour ce cas particulier, la différentielle . . . (ciii)

$$dA = -d\lambda,$$

comme cela doit être.

Or, en considérant maintenant l'intersection du plan de l'arc A avec la surface de la terre, si nous désignons par Z l'arc terrestre qui, dans cette intersection, sera formé à la surface de la France, nous aurons évidemment, pour la différentielle générale de cet arc terrestre Z, l'expression . . . (civ)

$$dZ = \sqrt{(r.dA)^2 + (dr)^2} ;$$

le rayon r de la terre étant donné par notre présente détermination générale et rigoureuse (xcv), du moins lorsqu'on suppose encore comme identiques les méridiens géogéniques et les méridiens astronomiques. Ainsi, en désignant par Z' l'arc terrestre du méridien de Paris, et par Z'' l'arc terrestre du susdit cercle parallèle de Brest à Grenoble, et en substituant, dans l'expression générale (civ), à la place de la différentielle dA , ses valeurs respectives (ciii) et (c), on obtiendra, pour la détermination rigoureuse de la longueur de ces arcs terrestres Z' et Z'', les expressions . . . (cv)

$$Z' = \langle Z' \rangle + \int \sqrt{(r.dA)^2 + (dr)^2} ,$$

$$Z'' = \langle Z'' \rangle + \int \sqrt{r^2 \frac{\sin^2 \Theta}{\cos^2 \lambda} \cdot \frac{\sin^4 A \cdot (dx)^2}{\sin^4 (\alpha - \alpha_1)} + (dr)^2} ;$$

les quantités $\langle Z' \rangle$ et $\langle Z'' \rangle$ étant les constantes de ces intégrales. Et il ne faut pas perdre de vue que, dans la première de ces intégrales, la quantité variable est la seule latitude λ , la longitude α demeurant constamment égale à α_1 , et que, dans la seconde de ces intégrales, la variable indépendante est la longitude α , la latitude λ étant ici, d'après (xcix), une fonction de α , dont la différentielle est déterminée par la seconde des expressions (c).

Il suffira donc d'opérer ces intégrations (cv), pour obtenir, entre telles limites que l'on voudra, la détermination à priori de la longueur de ces arcs terrestres Z' et Z''. Et ces intégrations peuvent maintenant être opérées par un travail, en quelque sorte purement mécanique, en employant nos méthodes absolues, et spécialement ici la méthode primordiale (729), combinée, s'il le faut, avec nos facultés intégrales (919), telles que nous en avons montré l'application sous les marques (212) à (215), dans notre précédente théorie lumineuse.

Or, en comparant ces déterminations à priori (cv) avec les mesures réelles des longueurs L' et L'' de ces arcs, on aura les deux équations . . . (cvi)

$$Z' = L' , \quad \text{et} \quad Z'' = L'' ;$$

dans lesquelles, en vertu de notre expression fondamentale (xcv) du rayon r de la terre, entreront le rayon b de l'équateur et l'aplatissement Θ de l'ellipsoïde qui deviendra ainsi l'ellipsoïde osculateur de la surface de la France. Et avec ces éléments invariables b et Θ , on pourra calculer la longueur des méridiens de ce même ellipsoïde que forme la surface de la France; longueur qui deviendra ainsi une base réelle et impérissable pour l'évaluation exacte et invariable

de l'étalon que, sous le nom de *mètre*, on a adopté pour principe du système métrique de la France.

Sans doute, des opérations géodésiques pareilles, exécutées dans d'autres pays, amèneraient inévitablement de pareils ellipsoïdes osculateurs qui, par suite de l'extrême irrégularité de la forme de la terre, et eu égard du sudit « bel accord » de M. Arago, seraient tous différents. Mais, ces ellipsoïdes différents seraient précisément les caractères distinctifs du sol de ces pays différents; et comme tels, ils devraient servir de base aux différents systèmes métriques invariables des nations qui habitent ces pays différents, afin de constituer et de préciser ainsi mieux leurs distinctes individualités nationales, et de consolider par-là, non-seulement l'indépendance politique de ces nations, mais surtout les vues de la Providence dans leurs destinations respectives à l'accomplissement du but final et suprême de l'humanité. — Lorsque, d'après les présents principes (LXXXVI) et (LXXXVII) de notre réforme de la mécanique terrestre, on sera parvenu à déterminer, pour notre globe entier, le rayon $[b]$ de l'équateur et l'aplatissement $[w]$ ou le demi-axe a de notre hémisphère, ces quantités $[b]$ et a serviront alors de termes de comparaison pour tous les différents ellipsoïdes osculateurs que nous venons de signaler. — Mais, nous devons prévenir, dès aujourd'hui, qu'il existe, indépendamment de toutes données empiriques ou de toutes mesures terrestres, dans la mécanique considérée en général, une condition téléologique de l'harmonie entre le temps et l'espace qui, à l'instar de la condition pareille (33) dans la mécanique céleste, offre à priori une unité impérissable pour les mesures linéaires, unité qui, sans aucun étalon matériel, peut facilement, et à chaque instant, être fixée et retrouvée dans tous les pays, sans aucune communication réciproque. La détermination de cette unité absolue fait un objet de notre *PHYSIQUE MATHÉMATIQUE*, et elle fait ainsi partie de la solution du dernier de nos trois grands problèmes du monde physique, comme on le verra dans la suite de nos ouvrages, où, d'après le Programme qui est à la tête de l'ouvrage présent, et conformément aux principes que, pour ce dernier grand problème, nous avons établis dans les *Prolegomènes du Messianisme* (pages 379 à 441), nous fonderons mieux et développerons suffisamment cette nouvelle physique mathématique.

Quoi qu'il en soit, puisque la France a pris la noble initiative dans cette détermination d'un système métrique national, il lui importe de le purger de l'erreur grave dont il est entaché. Et nous pensons que les illustres académiciens de Paris, qui ont conçu cette belle idée d'un pareil système national, et qui malheureusement l'ont entaché de l'erreur que nous avons signalée plus haut, nous sauront gré de leur avoir ici indiqué les moyens de rectifier cette grave erreur. Aussi, comptons-nous tellement sur leur reconnaissance que nous attendons, de leur part, une démarche auprès du gouvernement français, afin qu'il nous soit accordé une récompense nationale pour ce service signalé que

nous rendons ainsi à la France, sans compter tous les autres travaux scientifiques que nous avons apportés à ce noble pays, devenu notre seconde patrie. Et nous sommes si fortement convaincus de cette reconnaissance des illustres académiciens de Paris que l'idée même ne nous vient pas qu'il puisse, dans cette circonstance, nous arriver le sort qui frappa Socrate lorsque, comme nous, il avait demandé au prytanée d'Athènes, pour ses travaux, la récompense nationale. — Au reste, l'histoire des sciences découvrira sans doute pourquoi, après qu'on avait mis tant d'intérêt à la théorie de la terre, lorsqu'il s'agissait de faire valoir le théorème de Clairaut, on a tout à coup perdu cet intérêt, au point de laisser subsister de graves et compromettantes erreurs.

Nous avons déjà dit que la présente solution générale (xcv) du problème-universel (lvi) de la mécanique terrestre, et par conséquent son application (cv) à la détermination des ellipsoïdes osculateurs, n'embrassent encore que le cas où les méridiens géogéniques sont confondus avec les méridiens géographiques; cas qui est le seul connu, et qui très-probablement ne s'écarte pas beaucoup de la vérité. Mais, les lois que nous avons produites dans les *Prologomènes*, embrassent le cas général où les méridiens géogéniques peuvent différer des méridiens géographiques, et où, par conséquent, l'azimut (α) peut avoir une valeur différente de zéro. C'est surtout la loi que nous y avons produite sous la marque (Lxi), et que nous avons déclarée être la *LOI SUPRÊME* de la construction mécanique des corps célestes, c'est surtout, disons-nous, cette loi suprême qui s'étend généralement à toute la structure des corps célestes, quelque régulière ou irrégulière qu'elle puisse être. En effet, c'est de cette loi (Lxi) que dépend exclusivement la solution du problème préalable de déterminer, dans tous les cas, les coordonnées x et y en fonctions des éléments astronomiques, de la longitude x et de la latitude λ ; solution décisive et indispensable pour l'intégration de l'équation (Lvi), qui, comme nous l'avons déjà dit, forme, à son tour, le *PROBLÈME-UNIVERSEL* de toute cette mécanique terrestre. Aussi, pour étendre au cas général nos solutions précédentes, nous suffira-t-il de faire connaître, à la place des expressions (Lxiii), qui n'en sont que le cas particulier où $(\alpha) = 0$, cette détermination générale des coordonnées x et y en fonctions des éléments x et λ , quel que soit l'angle (α) que font entre eux les méridiens géogéniques et les méridiens géographiques.

Quoiqu'il soit encore inutile de faire connaître aujourd'hui cette détermination générale, néanmoins, pour accomplir, dès aujourd'hui, la présente réforme de la mécanique terrestre, comme nous avons plus haut accompli déjà notre réforme de la mécanique céleste, nous allons, du moins pour la postérité, donner ici ces expressions générales et rigoureuses des coordonnées x et y , quel que soit l'angle (α) que font entre eux, à chaque point de la surface de la terre, les méridiens géogéniques et les méridiens géographiques. — Les voici . . .

(cvii)

$$x = + \frac{s.(g).\left\{\sqrt{\cos^2 \lambda} - \sin \lambda . \sin \lambda . \operatorname{tang}(\alpha)\right\} . \cos \lambda}{(g) . \left[1 + \sin^2 \lambda . \operatorname{tang}^2(\alpha)\right] - \mu s . \cos^2 \lambda},$$

$$y = + \frac{s.(g).\left\{\sqrt{\sin^2 \lambda} + \cos \lambda . \sin \lambda . \operatorname{tang}(\alpha)\right\} . \cos \lambda}{(g) . \left[1 + \sin^2 \lambda . \operatorname{tang}^2(\alpha)\right] - \mu s . \cos^2 \lambda};$$

le rayon de courbure s étant alors celui des méridiens géogéniques, et toutes les autres quantités étant celles qui sont dénotées ainsi dans les *Protégomènes*. — On voit maintenant comment, lorsque l'azimut $(\alpha) = 0$, ces expressions générales se réduisent aux expressions particulières que, sous la marque (LXIII), nous avons produites dans les *Protégomènes* pour ce cas où, dans l'état actuel de la science, on ne distingue pas encore les méridiens géogéniques, dont les géomètres n'ont même encore aucune idée.

Or, d'après ce que nous venons de dire, pour avoir la solution absolument générale du problème-universel (LVI) de la mécanique terrestre, il suffira maintenant d'employer les présentes expressions générales (CVII) des coordonnées x et y , pour la construction, par interpolation, des expressions générales (XCII) et (XCIII) de la pesanteur (g) et du rayon de courbure s des méridiens géogéniques, parce qu'alors, avec une facile modification correspondante, la présente solution (XCV) du problème-universel (LVI) deviendra déjà elle-même la solution générale de ce problème-universel de la mécanique terrestre. En effet, à la place de l'expression (XCVI) de la quantité u , on aura alors, en vertu des formules présentes (CVII), l'expression générale de cette quantité, savoir . . . (CIII)

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{s.(g) . \cos \lambda . \sqrt{1 + \sin^2 \lambda . \operatorname{tang}^2(\alpha)}}{(g) . \left[1 + \sin^2 \lambda . \operatorname{tang}^2(\alpha)\right] - \mu s . \cos^2 \lambda}.$$

Et par conséquent, en y faisant $\lambda = 0$, la susdite détermination (XC) du rayon b de l'équateur subsistera déjà généralement. La seule modification complémentaire qu'il faudra ajouter pour ce cas général, c'est le facteur ξ , par lequel il faudra multiplier la quantité auxiliaire Ξ qui est donnée par l'expression (LXXXII); et ce facteur, dont la valeur est presque insensible, sera . . . (CIX)

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \lambda . \sin^2(\alpha)}}.$$

Nous avons donc, dès aujourd'hui, la solution générale du problème-universel (LVI) de la mécanique terrestre, cette solution dont la postérité fera usage, lorsque les géomètres parviendront à reconnaître les méridiens géogéniques que nous leur avons dévoilés déjà dans les *Protégomènes* du Messianisme.

Toutefois, comme nous l'avons déjà dit dans le Programme scientifique qui est à la tête de l'ouvrage présent, ce problème-universel (LVI) de la mécanique terrestre se trouve résolu en outre, et avec son absolue généralité, dans les

Mémoires du B. des L. de Londres, aux marques susdites (412), (413), etc., par l'application de la méthode suprême elle-même, solution que nous reproduirons nécessairement lorsque, dans la suite de ces ouvrages, nommément dans le sixième, nous publierons ces Mémoires de Londres. Aujourd'hui, et tant que l'on ne distinguera pas encore les méridiens géogéniques et leur obliquité par rapport aux méridiens géographiques, cette solution absolue du problème-universel (xv) serait, en quelque sorte superflue, en n'offrant que l'accomplissement théorique ou spéculatif de cette science de la terre. Mais, lorsque ces méridiens géogéniques seront enfin reconnus sur notre globe, la solution absolue dont il est question conduira à l'accomplissement pratique de la mécanique terrestre; et alors, parmi d'autres avantages, elle fera ainsi reconnaître la forme spéciale de la partie solide de la surface de notre globe, son axe distinct, s'il en existe, et par conséquent la durée du jour du monde antédiluvien, avec toutes leurs conséquences géologiques.

§ II. — *Structure intérieure ou disposition des masses de la terre.*

Jusqu'ici, nous n'avons parlé que de la structure extérieure ou de la figure de la terre. Et, comme nous l'avons montré dans les *Prolégomènes* du Messianisme, la nouvelle mécanique terrestre, ou généralement la nouvelle science de la construction mécanique des corps célestes pénètre dans l'intérieur de ces corps, et, contre toute attente, parvient à déterminer, non par des hypothèses, comme on l'a fait jusqu'à ce jour, mais par des calculs positifs et rigoureux, la disposition des masses dont ils sont composés, dans tous leurs points intérieurs, depuis la surface jusqu'au centre de ces corps, du moins pour la terre ou, à la surface de ce globe, nous pourrions observer les données suffisantes pour cette détermination en quelque sorte inconcevable.

Dans les *Prolégomènes*, nous avons indiqué les deux points de vue progressifs sous lesquels on peut envisager et découvrir, de plus en plus exactement, cette distribution mécanique des masses intérieures de notre globe. — Sous le premier de ces points de vue, lorsque l'on confond encore les méridiens géogéniques avec les méridiens géographiques, en supposant $(\alpha) = 0$, et lorsque, de plus, on considère encore comme égale à l'unité la quantité auxiliaire ξ , donnée par l'expression (xv), comme on peut le faire sensiblement lorsque $(\alpha) = 0$, on peut déjà parvenir à fixer les *MASSSES GÉNÉRALES*, c'est-à-dire, les *MASSSES MOTENNES* dans l'intérieur de notre globe, telles qu'elles sont en quelque sorte fondues ensemble avec les masses voisines. Et sous le second de ces deux points de vue progressifs, lorsqu'on distingue déjà les méridiens géogéniques, en déterminant leur azimut (α) , et lorsque, de plus, on prend la quantité auxiliaire ξ dans toute sa valeur générale (xv), on parvient à fixer rigoureusement les *MASSSES SPÉCIALES* qui, dans l'intérieur de notre globe, se trouvent formées indépendamment des masses voisines. — Et dans ces mêmes *Prolégomènes*, nous

avons montré comment, sous ces deux points de vue progressifs, on peut réellement parvenir ainsi à la solution inattendue de ce mystérieux problème, surtout en se servant de la susdite loi suprême (LXI) de cette mécanique terrestre, de cette loi qui, à côté de tous les bouleversements en apparence si désordonnés, régit la distribution des masses dans l'intérieur de notre globe, pour conserver leur équilibre, sans lequel ce globe ne saurait subsister.

Lorsque, dans la suite des ouvrages présents, nous reproduirons les Mémoires du B. des L. de Londres, nous ferons connaître les procédés et toutes les circonstances de cette double détermination progressive de la structure intérieure de la terre, détermination qui, comme nous l'avons dit dans les *Prolegomènes*, a été donnée dans ces *Mémoires* de Londres. Déjà même, dans ces *Prolegomènes*, nous avons fait connaître les procédés du premier des deux points de vue progressifs que nous venons de signaler; et ce qui est décisif, nous y avons produit, sous la marque (LXXII), comme résultat de ces procédés scientifiques et positifs, la loi que suit réellement la structure intérieure de notre globe, c'est-à-dire, la loi des densités des masses, dans tous les points de l'intérieur de ce globe, depuis la surface jusqu'au centre de la terre. Et c'est ainsi que, pour la première fois, loin de toutes ces hypothèses que l'imagination a enfantées sur l'intérieur de notre globe, étant guidés par la philosophie absolue qui préside à toutes nos recherches mathématiques, nous sommes parvenus à pénétrer dans les entrailles de la terre, et à y déterminer positivement la disposition réelle des masses dont elle est formée.

Cette loi générale de la structure intérieure de notre globe, telle qu'elle est produite dans les *Prolegomènes*, est déjà entièrement accomplie; et l'exactitude de son expression (LXXII) ne dépend manifestement que du nombre des points à la surface de la terre, par lesquels on y détermine son élément fondamental que nous y désignons par Ω . Ainsi, il est maintenant au pouvoir des savants de donner à cette loi générale sa détermination numérique, de plus en plus exacte, et d'en conclure, avec la même exactitude, la connaissance de toutes les masses moyennes dans l'intérieur de notre globe. — Nous-mêmes, en ne nous servant provisoirement que des deux données qu'offrent, à la surface de la terre, les points de l'équateur et des pôles, nous avons, du moins en forme d'exemple, déterminé numériquement, sous la marque (LXXVIII), cette loi générale; et nous avons pu ainsi en déduire, sous les marques (LXXIX) et (LXXXI), la densité réelle de la masse au centre de la terre, et la densité moyenne de la surface solide de ce globe.

§ III. — *Flux et reflux de la Mer.*

Une dernière attribution essentielle de la structure mécanique de notre globe, c'est la variation périodique de la forme de sa surface fluide, c'est-à-dire, le phénomène des marées. — Nous avons exposé rapidement, dans les *Prolegomènes*

nes du Messianisme, les essais que l'on a faits pour résoudre ce grand et si difficile problème des marées. Et nous y avons caractérisé l'état actuel des connaissances sur cette question si importante pour la marine, tel que cet état se trouve aujourd'hui arrêté par les résultats obtenus dans la Mécanique céleste de Laplace. Nous y avons ainsi fait remarquer, d'une part, l'imperfection des procédés scientifiques de Laplace, surtout l'actuelle insuffisance, pour ne pas dire fausseté, de la théorie des fluides sur laquelle il a basé ses calculs, et de l'autre part, l'inexactitude des résultats pratiques qu'il a obtenus par ces moyens defectueux; de ces résultats que le Bureau des Longitudes de France, déterminé sans doute par de nobles motifs, fait calculer annuellement, dans ses Ephémérides, en exposant ainsi, sans le savoir, à des dangers certains, toute la marine française. En effet, comme nous le disons dans les *Protégomènes*, l'heure de la pleine mer, que l'on calcule ainsi dans ces Ephémérides, et que l'on reproduit dans l'*Annuaire* du Bureau des Longitudes, est tout à fait erronée pour les pays situés hors de l'équateur, ou du moins elle n'y répond à l'heure véritable que pour les époques très-rares des équinoxes, lorsque de plus la déclinaison de la lune est zéro. Et nous ajouterons ici que les hauteurs des marées que ce Bureau savant indique également dans ses Ephémérides pour les époques des syzygies, sont tout aussi erronées pour tous les pays situés hors de l'équateur, et n'y répondent même aux hauteurs véritables dans aucune époque de l'année. — Nous allons le prouver.

D'abord, une des erreurs capitales que Laplace commet dès l'entrée de sa théorie, en traitant de la stabilité de l'équilibre des mers (L. IV, Ch. II), consiste à considérer, d'après sa fausse théorie des fluides, la densité de la mer comme un des éléments du phénomène des marées, et à conclure ainsi que si la densité moyenne de la terre était moindre que celle de l'eau, l'équilibre des mers ne saurait être stable. — Or, en considérant que les forces qui agissent à la surface des mers sont uniquement les masses distinctes de la terre, de la lune et du soleil, combinées avec leurs distances respectives, on conçoit facilement, et sans aucune science préalable, que la densité de la mer, plus ou moins grande, ne saurait influer en rien sur la stabilité des mers dans le phénomène des marées. Et cette considération est ici tellement évidente que l'introduction de la densité de la mer, comme élément du phénomène des marées, pourrait former, en stricte logique, une espèce de faute d'orthographe mathématique, et, comme telle, aurait dû suffire pour éclairer sur la fausseté de la théorie des fluides sur laquelle Laplace fondait sa théorie des marées. Cependant, parmi les susdites facettes avec lesquelles M. Arago amuse les lecteurs de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, il leur dit brèvement : « A la mer actuelle, substituons un océan de mercure, et la stabilité aura disparu, et le liquide sortira fréquemment de ses limites, pour aller ravager les continents jusque dans les régions neigeuses qui se perdent au milieu des nuages. » —

Mais laissons là ces fautes d'orthographe dans les moyens employés par Laplace, et voyons les résultats qu'il a obtenus pour le phénomène des marées, résultats dont on peut constater la fausseté par l'expérience.

Au moment où nous livrons ces lignes à l'imprimerie, nous apprenons qu'il faut de nouveau nous arrêter ici. Nous nous proposons, comme nous venons de le dire, de signaler les graves erreurs mathématiques que Laplace a produites dans sa théorie des marées, adoptée par le Bureau des Longitudes de Paris. Et nous voulons ainsi, dès aujourd'hui, dans le présent Complément de la Réforme des Mathématiques, démontrer toutes ou du moins les principales erreurs mathématiques de l'Académie des sciences de Paris, que nous avons annoncées dans la troisième partie de l'ouvrage présent (pages 391 et 392), et que nous devons signaler séparément dans des *Bulletins mensuels*. Nous nous proposons, en effet, de compléter ici immédiatement la présente réforme des mathématiques, en produisant sur-le-champ sa susdite troisième partie. Et à cette fin, nous avons ajouté, au premier tome de cet ouvrage, le présent *Complément* pour tout ce qui concerne l'accomplissement de cette réforme des mathématiques, auquel accomplissement appartiennent les graves erreurs mathématiques de l'Académie des sciences de Paris, qui arrêtent les progrès de la science; et nous ajouterons au second tome de l'ouvrage présent, qui aura pour objet la réforme de la philosophie, un *Supplément* où nous donnerons notre Manifeste historique, servant de transition à la réforme des mathématiques à la réforme de la philosophie. — C'est ainsi que, dans le présent Complément, nous avons effectivement accompli tout ce qui concerne notre réforme des mathématiques, pures et appliquées, et que nous y avons commencé à signaler les susdites graves erreurs mathématiques, d'abord, dans la mécanique céleste, en y dévoilant le système de désordre, algorithmique et surtout dynamique, que Laplace a introduit dans cette science, et ensuite, dans la présente mécanique terrestre, en dévoilant la fausse théorie mathématique de la terre que, pour faire valoir le faux théorème de Clairaut, les académiciens de Paris ont voulu accréditer dans le monde savant, en la revêtant surtout d'une sanction légale, par le système métrique qu'ils ont fait adopter au gouvernement français et qui est fondé sur cette fausse théorie de la terre. Et nous allons, dans cette même mécanique terrestre, signaler de plus les susdites erreurs que Laplace a produites dans sa théorie des marées, ces erreurs plus graves et beaucoup plus dangereuses, puisque, dans tout ce qui concerne le flux et le reflux de la mer, le salut de la marine française en dépend notablement (*). — Comme nous venons de le dire, nous sommes forcés de nous

(*) Nous ignorons si, sur la frégate à vapeur, le *Groënland*, qui, dans la dernière guerre contre le

arrêter ici, pour pouvoir, dans le peu d'espace et de temps qui nous reste encore, dire au moins quelques mots concernant le troisième grand problème du monde physique.

Passons donc à ce troisième et dernier problème des mathématiques appliquées, et bornons-nous, par suite de la raison que nous venons d'alléguer, sinon à ce qu'il y a d'essentiel dans cette grande question de la construction de la matière par ses forces créatrices, du moins à ce qu'il y a ici de plus urgent à signaler pour l'accomplissement de cette réforme des mathématiques. — Ainsi nous sommes forcés de renoncer provisoirement à tout ce qui concerne les FORCES FORMATRICES de la matière, ces forces invisibles qui, d'après notre Programme scientifique, tel qu'il est produit à la tête de l'ouvrage présent, font l'objet principal de la science de la nature, c'est-à-dire, de notre physique générale que, sous le titre de *Philosophie de la Physique*, nous devons traiter dans le dixième et dans le douzième de nos ouvrages ultérieurs. Heureusement, les principes absolus et les lois fondamentales de cette nouvelle physique générale sont déjà, dans les *Prolegomènes du Messianisme*, établis et développés suffisamment pour que cette mystérieuse construction de la matière par ses forces créatrices soit enfin complètement dévoilée, et pour que, dans le cas où nous ne pourrions plus produire les ouvrages ultérieurs que nous venons de nommer, les savants des temps à venir puissent, en suivant ces principes et ces lois, accomplir la solution de ce troisième et dernier grand problème du monde physique. — Nous regrettons de n'avoir plus ici, ni assez d'espace, ni surtout assez de temps, pour pouvoir produire au moins une réalisation positive de nos nouvelles lois de la chaleur, dans une nouvelle et absolue détermination de la thermométrie, dont nous avons déjà parlé dans les *Prolegomènes* (page 383). Nous le regrettons surtout parce que nous perdons par là l'occasion de nommer ici l'homme honorable à qui la postérité, si elle les agréé, devra principalement la production de nos derniers travaux, et qui probablement, en considérant la nature de l'ouvrage présent, ne nous permettrait pas de le nommer à aucune autre occasion, où il n'aurait pas également contribué par ses propres calculs scientifiques (*). — Nous nous

Marée, s'est perdue sur les côtes d'Afrique, en échouant par suite d'une fausse estimation de la marée, on a calculé cette marée d'après les fausses Tables du Bureau des Longitudes de Paris, ou si on l'a estimée simplement d'après les indications des pilotes de ces parages. Mais il est manifeste que, dans l'un ou dans l'autre cas, le danger aurait pu être prévenu, si ce savant Bureau des Longitudes connaissait la vraie théorie des marées, et si, d'après cette théorie, il donnait à la marine française les moyens sûrs de connaître, dans tous les parages, et à chaque époque de l'année, l'état exact des marées.

(*) Nous produirons incessamment, dans le Supplément du second tome de l'ouvrage présent, cette nouvelle et vraie théorie de la thermométrie.

bornerons donc, comme nous venons de le dire, à ce qu'il y a d'urgent à signaler pour accomplir ici, autant que possible, notre réforme des mathématiques, en ajoutant quelques mots concernant les forces motrices de la nature, ces forces en quelque sorte palpables qui, dans la science générale de la nature, font l'objet spécial de la mécanique, de cette branche des mathématiques appliquées que nous devons également traiter dans nos ouvrages ultérieurs, notamment, d'après le susdit Programme scientifique, dans le quatrième, le septième, et le neuvième de ces ouvrages. Et nous sommes même forcés de nous borner ici à quelques mots pour compléter ce que, dans les *Prologomènes*, nous avons dit concernant l'hydrodynamique et le mouvement spontané des corps.

Or, pour compléter ainsi, d'abord, notre nouvelle théorie mathématique des fluides, bien entendu des fluides proprement dits, et non d'une poussière déliée que les géomètres ont traitée à la place des fluides véritables, nous observerons qu'il ne nous reste qu'à donner les lois de l'hydrodynamique, telles que nous les avons caractérisées déjà dans les *Prologomènes* (pages 435 et 436). Et pour cela, suivant ce que nous y avons dit, distinguons, dans chacune des trois forces rectangulaires (P), (Q), (R), qui agissent à chaque point x, y, z du liquide, deux parties P et P', Q et Q', R et R', dont les premières P, Q, R soient aptes à satisfaire aux deux premières (*Prologomènes*, page 312) de nos sept lois hydrostatiques, à ces deux lois qui forment les conditions de l'existence elle-même des fluides, dans un état quelconque, d'équilibre ou de mouvement, et dont les dernières P', Q', R', qui opèrent le mouvement de ce point fluide, soient telles que, d'après la loi de la moindre action (*lex parimoniae*), leur résultante se trouve dans la couche spéciale de ce même point fluide, déterminée par la première des deux lois hydrostatiques que nous venons de rappeler. Nous aurons ainsi les équations élémentaires . . . (LXXXVIII) (*)

$$(P) = P + P', \quad (Q) = Q + Q', \quad (R) = R + R';$$

et la résultante dynamique des trois forces motrices P', Q', R', sera déterminée par les équations . . . (LXXXIX)

$$\begin{aligned} 0 &= Q'.dx - P'.dy, \\ 0 &= R'.dx - P'.dz; \end{aligned}$$

résultante qui devra se trouver dans la couche statique, déterminée par l'équation . . . (XC)

$$0 = P'.dx + Q'.dy + R'.dz.$$

Nous aurons donc, pour la condition de cette coïncidence, l'équation . . .

(*) Nous continuons ici à énoncer les formules d'après l'ordre que nous avons suivi dans les *Prologomènes* pour ce troisième grand problème de monde physique

. . . (xcv)

$$0 = P.P' + Q.Q' + R.R'.$$

Considérons maintenant les points fluides indéfiniment proches de celui qui est ici fixé par les coordonnées x, y, z , et observons que, pour la simultanéité du mouvement de ces points voisins, les forces motrices P, Q, R , doivent demeurer constantes. Nous aurons alors, d'abord, pour les équations élémentaires (LXXXVIII), les variations . . . (xcvi)

$$\delta(P) = \delta P, \quad \delta(Q) = \delta Q, \quad \delta(R) = \delta R;$$

et ensuite, pour l'équation de condition (xcv), la variation . . . (xcvii)

$$\begin{aligned} 0 = & \left\{ P' \cdot \left(\frac{\delta P}{\delta x} \right) + Q' \cdot \left(\frac{\delta Q}{\delta x} \right) + R' \cdot \left(\frac{\delta R}{\delta x} \right) \right\} \cdot \delta x \\ & + \left\{ P' \cdot \left(\frac{\delta P}{\delta y} \right) + Q' \cdot \left(\frac{\delta Q}{\delta y} \right) + R' \cdot \left(\frac{\delta R}{\delta y} \right) \right\} \cdot \delta y \\ & + \left\{ P' \cdot \left(\frac{\delta P}{\delta z} \right) + Q' \cdot \left(\frac{\delta Q}{\delta z} \right) + R' \cdot \left(\frac{\delta R}{\delta z} \right) \right\} \cdot \delta z; \end{aligned}$$

en observant que, par suite de l'équation (xc) de la couche fluide, on a, entre les variations $\delta x, \delta y, \delta z$, la relation . . . (xcviii)

$$0 = P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z,$$

qui, en vertu des équations élémentaires (LXXXVIII), devient . . . (xcv)

$$0 = [(P) - P'] \cdot \delta x + [(Q) - Q'] \cdot \delta y + [(R) - R'] \cdot \delta z.$$

Éliminant alors alternativement, par le moyen de cette dernière équation, l'une des trois variations $\delta x, \delta y, \delta z$, dans l'équation (xcvii), et considérant que les deux autres de ces variations $\delta x, \delta y, \delta z$, sont, à chaque fois, arbitraires et par conséquent indépendantes, on verra que cette équation (xcvii) ne saurait subsister qu'autant que les coefficients de ces variations indépendantes soient zéro. Nous obtiendrons donc ainsi, en y introduisant les valeurs connues (xcvi), pour la détermination des trois quantités inconnues P', Q', R' , les trois équations complètement déterminées . . . (xcvi)

$$0 = [(Q) - Q'] \cdot X - [(P) - P'] \cdot Y,$$

$$0 = [(R) - R'] \cdot X - [(P) - P'] \cdot Z,$$

$$0 = [(R) - R'] \cdot Y - [(Q) - Q'] \cdot Z;$$

en faisant auxiliairement . . . (xcvii)

$$X = P' \cdot \left(\frac{\delta(P)}{\delta x} \right) + Q' \cdot \left(\frac{\delta(Q)}{\delta x} \right) + R' \cdot \left(\frac{\delta(R)}{\delta x} \right),$$

$$Y = P' \cdot \left(\frac{\delta(P)}{\delta y} \right) + Q' \cdot \left(\frac{\delta(Q)}{\delta y} \right) + R' \cdot \left(\frac{\delta(R)}{\delta y} \right),$$

$$Z = P' \cdot \left(\frac{\delta(P)}{\delta z} \right) + Q' \cdot \left(\frac{\delta(Q)}{\delta z} \right) + R' \cdot \left(\frac{\delta(R)}{\delta z} \right).$$

Et éliminant de plus, de l'équation de condition (xcv), les quantités P , Q , R , par le moyen des équations élémentaires (LXXXVIII), nous obtiendrons en outre l'équation . . . (xcviii)

$$0 = P'[(P) - P'] + Q'[(Q) - Q'] + R'[(R) - R'];$$

qui, en faisant . . . (xcix)

$$F = \sqrt{(P')^2 + (Q')^2 + (R')^2},$$

donnera pour la détermination de cette force motrice F' , qui produit ici le mouvement du fluide, l'expression . . . (c)

$$F' = \sqrt{(P).P' + (Q).Q' + (R).R'}.$$

Telles (xcvi) et (c) sont donc les lois fondamentales de la vraie hydrodynamique, lois qui déterminent, pour chaque point x , y , z du fluide, les trois forces motrices partielles P' , Q' , R' de ce point du fluide, et la force résultante F' qui cause son mouvement dans la direction (LXXXIX), lorsque les trois forces motrices totales (P) , (Q) , (R) , qui agissent dans ce point, sont données. — Et l'on aura enfin, en y joignant nos susdites sept lois hydrodynamiques, les dix lois fondamentales de la vraie mécanique des fluides, telles que nous les développerons dans le quatrième des ouvrages annoncés par notre Programme scientifique.

Par anticipation sur cet ouvrage ultérieur, nous allons ici montrer comment, des trois équations dynamiques (xcvi), on peut tirer les trois quantités inconnues P' , Q' , R' , lorsqu'elles ne sont pas zéro, et lorsqu'au moins une de ces quantités est réelle. — Pour cela, en supposant que P' est celle de ces trois quantités qui est réelle, comme on peut la choisir arbitrairement, puisque la disposition des coordonnées x , y , z , est arbitraire, divisons chacune des équations (xcvi) en question par cette quantité P' ; et ces équations se réduiront à celles-ci . . . (ci)

$$(Q).S - (P).T = Q'.S - P'.T,$$

$$(R).S - (P).U = R'.S - P'.U,$$

$$(R).T - (Q).U = R'.T - Q'.U;$$

en faisant auxiliairement . . . (cii)

$$S = \frac{\partial(P)}{\partial x} + q \cdot \frac{\partial(Q)}{\partial x} + r \cdot \frac{\partial(R)}{\partial x},$$

$$T = \frac{\partial(P)}{\partial y} + q \cdot \frac{\partial(Q)}{\partial y} + r \cdot \frac{\partial(R)}{\partial y},$$

$$U = \frac{\partial(P)}{\partial z} + q \cdot \frac{\partial(Q)}{\partial z} + r \cdot \frac{\partial(R)}{\partial z};$$

et en formant les quantités . . . (ciii)

RÉFORME DES

$$q = \frac{Q'}{P'}, \text{ et } r = \frac{R'}{P'}.$$

Divisant de plus successivement les deux membres des trois équations réduites (ci) l'un par l'autre, on obtiendra les deux équations . . . (civ)

$$\frac{(Q).S - (P).T}{(R).S - (P).U} = \frac{q.S - T}{r.S - U},$$

$$\frac{(R).S - (P).U}{(R).T - (Q).U} = \frac{r.S - U}{r.T - q.U},$$

qui ne contiendront plus que les deux inconnues q et r , et qui serviront conséquemment à les déterminer. On connaîtra donc alors les trois quantités S , T , U , qui, dans leurs constructions (cu), ne contiennent que ces deux quantités inconnues q et r . Et par conséquent, les trois équations réduites (ci), qui ne contiendront plus que les trois inconnues P' , Q' , R' , sous la forme d'équations linéaires, serviront alors à déterminer immédiatement ces trois forces motrices P' , Q' , R' , qu'il s'agissait de découvrir, et qui feront connaître, par l'expression (c), la force motrice F de ce point du fluide, et par les équations élémentaires (LXXXVIII), les trois forces P , Q , R , qui, dans ce fluide en mouvement, fixent les couches statiques (xc). — De plus, par la connaissance des deux inconnues q et r , que donnent d'abord les équations (civ), la direction de la résultante (LXXXIX), c'est-à-dire, la direction du mouvement du point fluide x , y , z , sera déterminée au moyen des deux rapports différentiels . . . (cv)

$$\frac{dy}{dx} = q, \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dx} = r.$$

Il faut ici remarquer qu'après avoir ainsi déterminé, dans toute leur généralité, les trois forces motrices P' , Q' , R' , en fonctions des forces motrices totales (P) , (Q) , (R) , et de leurs dérivées différentielles, prises par rapport aux variables x , y , z , si l'on forme, avec ces fonctions, les trois équations . . . (cvi)

$$P' = 0, \quad Q' = 0, \quad R' = 0,$$

ces équations seront manifestement les conditions de l'équilibre des fluides, et elles reproduiront nos trois principales lois hydrostatiques (285) et (286) qui forment les conditions positives de l'équilibre des fluides (Prolégomènes, page 313), et auxquelles s'attachent, comme à leur base, les deux dernières (345) de nos sept lois hydrostatiques (Prolég., page 314), comme on le voit dans notre susdit Appendice de la S. R. que nous reproduirons dans notre quatrième ouvrage. Ainsi, en considérant que nos présentes lois hydrodynamiques (xcvi) sont déduites rigoureusement de la seule première loi hydrostatique (xc), qui forme proprement l'une des conditions de l'existence même des fluides, dans un état quelconque, d'équilibre ou de mouvement, et qui est déjà reconnue universellement, les géomètres, surtout les membres de la Société

Royale de Londres, auront maintenant, dans les présentes trois équations (cvi), un moyen facile et infaillible pour constater la vérité de nos trois principales lois hydrostatiques (285) et (286), puisqu'ils n'ont pu comprendre l'existence de ces lois par la démonstration que nous leur en avons donnée dans le Mémoire et surtout dans l'Appendice de la S. R. Nous espérons ainsi que, même avant la publication de notre quatrième ouvrage, où nous reproduirons et confirmerons cette démonstration de nos sept lois statiques des fluides, et où nous les constaterons directement par nos présentes trois lois (cvi), qui sont irréfragables, les géomètres renonceront à leurs idées erronées, « pour ne pas dire absurdes », concernant la théorie des fluides, en cessant d'assimiler les liquides aux solides, c'est-à-dire, en cessant de considérer, comme un élément solide dans les fluides, le petit parallélépipède formé des accroissements différentiels dx , dy , dz . C'est ainsi, en effet, que, dans les Prolegomènes (page 436), nous nous contentions de nommer *erronées* ces fausses idées des géomètres, sans vouloir encore les nommer *absurdes*; mais, depuis que M. Chales, un membre peut-être de l'Académie, a introduit le mot *absurde* dans sa prétendue réfutation de l'astronome de Cambridge, nous osons dire, à notre tour, que s'il y a réellement quelque chose de bien absurde dans les sciences mathématiques, c'est assurément cette idée d'un petit parallélépipède ($dx \cdot dy \cdot dz$) solide dans les fluides, idée sur laquelle ce M. Chales fonde sa réfutation. Il devient en effet impossible de soutenir plus longtemps un pareil non-sens, aujourd'hui que les trois présentes lois (cvi) assigent, à l'équilibre des fluides, trois conditions nouvelles et irréfragables, qui sont hors des principes de l'actuelle théorie mathématique des fluides, de cette fausse théorie que les géomètres fondent sur l'idée, pour le moins ridicule, de ces petits parallélépipèdes solides dans les fluides. Quelles que soient les trois conditions nouvelles (cvi), conformes ou non conformes à nos susdites trois lois principales (285) et (286) que nous assignons à l'équilibre des fluides, elles sont, comme nous venons de le dire, absolument irréfragables, puisqu'elles dérivent immédiatement de nos présentes trois lois hydrodynamiques (xcvi), qui, à leur tour, dérivent immédiatement de la loi fondamentale et universellement reconnue (xc) des fluides, par le simple concours du principe de la moindre action (*lex parcimonie*), qui est ici, plus que partout ailleurs, non-seulement nécessaire, mais même absolument indispensable, parce que, sans ce principe, il n'existerait aucune, absolument aucune autre détermination concevable du mouvement systématique des fluides. — Eh bien, il sera curieux de voir si, sans se méprendre entre eux, les géomètres pourront maintenant soutenir plus longtemps leur absurde théorie mathématique des fluides, et par là même, les graves conséquences erronées de l'application pratique de cette théorie à la construction de la terre, aux marées, etc., etc.!

Procédons enfin à ce qu'il nous reste à dire concernant le mouvement spon-

tané des corps. — Dans les *Prolegomènes* du Messianisme, en terminant la solution du troisième et dernier grand problème du monde physique, nous avons signalé (pages 439 à 441) ce mouvement spontané des corps, dont les lois et même le problème sont demeurés inconnus jusqu'à ce jour. Et nous y avons annoncé la découverte de ces lois, et déjà même leur application pratique à la locomotion terrestre, en faisant remarquer, par la comparaison avec ces lois, la fausse locomotion spontanée que l'on pratique actuellement sur les chemins de fer, et en prédisant le grand désordre dans les intérêts économiques des peuples civilisés qui se livrent à cette fausse et barbare locomotion spontanée, désordre qui malheureusement se trouve réalisé aujourd'hui en France. De plus, dans le Programme scientifique qui est à la tête de l'ouvrage présent, nous faisons savoir, conformément à ce que nous avons annoncé dans les *Prolegomènes*, que, depuis 1843, la théorie et même la technique de ce mouvement spontané des corps, dans son application pratique à la locomotion terrestre, formant trois grands *Mémoires in-folio*, avec leurs atlas respectifs, se trouvent sous les yeux du Conseil général des Ponts et Chaussées de France, nommément sous les yeux d'une Commission, formée dans ce Conseil éclairé, et nommée par le Ministre des travaux publics.

Malheureusement, les obstacles que les savants par brevet opposent partout à l'établissement de la vérité, se sont également opposés ici, non-seulement au bienfait que la nation française aurait retiré de cette réforme de la locomotion terrestre, mais même à la cessation du désordre industriel que la fausse exploitation actuelle des chemins de fer introduisait, de plus en plus, dans les intérêts économiques de cette grande nation. — Nous avons prévu cette opposition privilégiée des savants par brevet, en disant, dans les *Prolegomènes* (page 441), « Puissent les savants auxquels se trouvera ainsi confié l'examen de cette grande question, ne pas frustrer de nouveau leurs nations respectives du bienfait de cette locomotion spontanée, comme nous avons vu plus haut que les savants anglais ont frustré la nation britannique du bienfait des tables des marées et des autres procédés nautiques qui, dans ce temps-là, étaient également confiés à leur examen ! »

Toutefois, nous ne devons pas encore désespérer d'un résultat utile auprès du Conseil général des Ponts et Chaussées de France, qui, dans la crise actuelle, sentira mieux, sans doute, le besoin d'une réforme scientifique dans la barbare exploitation présente de la locomotion spontanée sur les chemins de fer existants. Et c'est à cette fin qu'après avoir suspendu, pendant trois ans, la décision de l'honorable Commission des Ponts et Chaussées que nous venons de mentionner, dans la triste espérance d'un avenir plus favorable, résultant des graves embarras financiers auxquels on devait aboutir inévitablement, nous adressons aujourd'hui à cette Commission éclairée, sous le titre de *Document sur l'urgente réforme des chemins de fer en France*, une nuan-

velle et dernière sollicitation pour obtenir, du Conseil général des Ponts et Chaussées de France, une décision définitive sur cette grande question.

Et vu l'importance européenne de cette grave question de la réforme scientifique des chemins de fer et de toute la locomotion terrestre, nous reproduirons, à la fin du présent Complément, ce Document authentique qui, à l'heure qu'il est, se trouve soumis au Conseil général des Ponts et Chaussées de France. — En joignant à ce Document l'opuscule que, sous le titre d'*Urgente réforme des chemins de fer*, etc., nous avons publié en 1844, pour faire connaître le contenu des susdits trois Mémoires qui, depuis 1843, sont sous les yeux du même Conseil général des Ponts et Chaussées, on aura, non-seulement l'exposé de toutes nos relations avec ce Conseil éclairé, mais de plus un aperçu suffisant de cette décisive réforme scientifique de la locomotion, dont il s'agit. — Nous aurons d'ailleurs, dans la présente publication du Document que nous venons de nommer, une occasion, d'une part, pour exprimer ici publiquement, aux trois membres honorables de la Commission des Ponts et Chaussées de France, à Messieurs de Villiers, Fèvre et Hurel, notre reconnaissance du bienveillant accueil qu'ils ont fait à toutes nos propositions, et de l'autre part, pour faire savoir que c'est encore de l'illustre Académie des sciences de Paris que sont venus les susdits obstacles que l'on a opposés à la réalisation de cet immense bienfait national (*).

Nous terminerons cet accomplissement des conditions mécaniques de la matière, par un aperçu des conditions générales des forces motrices, qui en forment un des éléments. — Et d'abord, nous rappellerons, d'après ce que nous avons établi dans les *Prolégomènes* concernant les forces créatrices de la matière, que ses conditions fondamentales sont fondées sur ses deux éléments primordiaux et distincts, savoir, d'une part, sur l'*élément planétaire*, qui est le principe des conditions mécaniques et par conséquent des forces motrices de la matière, et de l'autre part, sur l'*élément hyléique*, qui est le principe de ses conditions physiques et par conséquent de ses forces formatrices. Nous saurons ainsi, pour établir enfin une distinction didactique dans la science de la matière, que la mécanique a pour objet les forces motrices, et que la physique a pour objet les forces formatrices de la matière, telles que ces forces distinctes dérivent respectivement de ses éléments primordiaux et distincts, planétaire et hyléique. — Or, pour ce qui concerne les forces formatrices de la matière, faisant l'objet général de la physique, nous avons déjà, dans les *Prolégomènes du Mécanisme*, établi et développé suffisamment leurs conditions et même leurs lois fondamentales pour que, dans l'ouvrage présent, nous n'ayons

(*) Nous nous réservons expressément le droit de demander, par la voie des tribunaux, aux journaux qui ont publié ces malveillances académiques, la réparation des dommages que ces publications ont causés à nos intérêts industriels, garantis par nos brevets d'invention.

plus besoin d'en dire davantage, par anticipation sur nos ouvrages ultérieurs, le dixième et le douzième, où nous devons traiter et accomplir, autant que cela est possible actuellement, cette grande partie de la science de la matière. Quant à ce qui concernera les forces motrices de la matière, faisant l'objet général de la mécanique, nous devons ici ajouter quelques mots pour coordonner leurs conditions essentielles et pour compléter les lois fondamentales que nous leurs avons assignées dans les *Prologomènes*.

Ainsi, nous dirons d'abord, pour ce qui concerne les conditions essentielles des forces motrices, ces conditions qui viennent de l'état physique (hyléique) de la matière, c'est-à-dire, de son état de solidité ou de fluidité, que les mouvements des corps solides sont *élémentaires*, en tant qu'ils subsistent les uns indépendamment des autres, et que les mouvements des corps fluides sont *systematiques*, en tant qu'ils sont mutuellement dépendants les uns des autres. De là vient que les conditions du mouvement des fluides sont essentiellement distinctes, comme nous l'avons vu dans nos susdites sept lois statiques et trois lois dynamiques des fluides.

Pour ce qui concernera ensuite les lois fondamentales des forces motrices, nous dirons ici que, de même que dans tous les autres systèmes de réalités, les forces motrices, d'après la loi de création, qui préside à la genèse de toutes les réalités, sont également soumises à trois lois fondamentales, nommément, à une *LOI SUPRÊME*, à une loi ou du moins à un *FAIT TÊLÉOLOGIQUE*, et à un *PROBLÈME-UNIVERSAL*. — Or, cette loi suprême des forces motrices est précisément la loi que, dans les *Prologomènes* du Messianisme (page 255), nous avons produite sous le nom simple de loi suprême de la mécanique céleste, et que nous déclarons aujourd'hui être la loi suprême de toute la mécanique, comme on pouvait le prévoir par la loi fondamentale de la dynamique, que nous en avons déduite à la marque (LXXVII) des *Prologomènes* (page 438), et comme on le verra mieux dans le neuvième de nos ouvrages ultérieurs, qui aura pour objet la philosophie générale de la mécanique. C'est aussi par anticipation sur cet ouvrage que nous déclarons ici que la seconde loi fondamentale de la mécanique, son universel fait téléologique, est ce que l'on nomme principe de la moindre action (*lex parcimonie*). Enfin, la troisième loi fondamentale de la mécanique, celle qui constitue son problème-universel, est, comme on le verra également dans cet ouvrage ultérieur, la loi générale de la production du mouvement par les forces motrices. Et à l'égard de cette production générale du mouvement, il s'établit, par les susdites conditions essentielles de la matière, une triple distinction, savoir : 1°. suivant que le mouvement est *élémentaire* ou *systematique*, ce qui distingue la mécanique des solides de la mécanique des fluides; 2°. suivant que le mouvement est *virtuel* ou *réel*, ce qui distingue, dans ces deux branches de la mécanique, leur statique et leur dynamique; enfin, 3°. suivant que le mouvement

est *inerte* ou *spontané*, en tant que le corps en mouvement reçoit son impulsion, soit d'une force motrice extérieure, inhérente à un autre corps, soit d'une force motrice intérieure, inhérente au corps lui-même.

En joignant à nos *Prolegomènes* l'ouvrage présent et les trois *Mémoires* sur la locomotion spontanée, qui sont actuellement sous les yeux du Conseil général des Ponts et Chaussées, ou aura, dès aujourd'hui, dans la triple distinction que nous venons de signaler, la détermination mathématique de ce problème-universel de la mécanique, qui forme sa troisième loi fondamentale. En effet, pour ce qui concerne le mouvement *élémentaire*, on a, dans les *Prolegomènes* (pages 436 à 438), sous les marques (LXXXI) à (LXXXIV), la loi statique (*), et sous la marque (LXXXVII), la loi dynamique de la mécanique des solides; et pour ce qui concerne le mouvement *systématique*, on a, dans les *Prolegomènes* (pages 312 à 314), sous les marques (283), (285) et (345), les sept lois statiques, et dans l'ouvrage présent, sous les marques (xcvi) à (cv), les trois lois dynamiques de la mécanique des fluides; enfin, pour ce qui concerne le mouvement *spontané*, on a, dans les trois *Mémoires* que nous venons de citer, toutes les lois, statiques et dynamiques, de cette mécanique de locomotion propre qui est demeurée inconnue jusqu'à ce jour. — Nous regrettons de ne pouvoir reproduire ici au moins les principales de ces lois nouvelles qui président au mouvement spontané des corps, surtout des chars qui servent à la locomotion terrestre. Peut-être, si cela est possible, le ferons-nous à la suite du susdit Document sur la réforme de la locomotion, qui sera joint au présent Complément de la Réforme des Mathématiques.

En terminant ici, autant que l'espace et le temps nous l'ont permis, l'accomplissement ultérieur de la solution du troisième et dernier grand problème du monde physique, nous devons rappeler les paroles que, pour l'urgente réforme générale des sciences, dont nous venons d'établir positivement le *parcours* dans l'ouvrage présent, nous avons dites, en posant les bases à cette grande réforme, dans les *Prolegomènes* du Messianisme (pages 427 à 435). — Eh bien, ces paroles décisives, qui se trouvent maintenant, par la présente réforme générale des mathématiques, légitimées de manière à ce qu'il soit glorieux pour l'homme de les écouter; les voici :

« Ainsi, la présente philosophie messianique de la création de la matière, non-seulement repose sur des principes absolus, mais de plus, procède, dans ses conséquences, par des éléments qui sont tous déterminés numériquement. Et de cette manière positive, la science de la nature se trouve accomplie par notre présente doctrine du Messianisme, constituant la philosophie absolue. »

• Ajoutons seulement que, considérant les éléments absolus que nous venons

(*) En faisant attention à l'Erreur des *Prolegomènes*, où il est dit qu'à la page 436, ligne 21, il faut lire *parallèles* à la place de *parallèles*.

de dévoiler dans cette constitution ou création de la matière, éléments qui sont demeurés entièrement inconnus jusqu'à ce jour, toutes les prétendues théories, physiques, et même mathématiques, sur les différentes conditions ou actions de la matière, et nommément sur la chaleur, sur l'électricité, etc., telles que les théories de Fourier, de Poisson, etc., et même toutes les prétendues lois empiriques que l'on a assignées à la matière, en les induisant de quelques expériences, et en les étendant, par pure présomption, au delà des bornes étroites de ces expériences, ne sauraient être vraies généralement, ou plutôt sont nécessairement erronées lorsqu'on les prend dans leur extension indéfinie, comme vérités absolues. Et nous découvrons ainsi, d'une manière irrécusable, puisque l'expérience ne pourra jamais atteindre à ces éléments absolus de la matière, nous découvrons, disons-nous, toute l'insuffisance, ou plutôt le renversement philosophique (où l'on prend l'être pour le savoir) des soi-disant sciences expérimentales dont le monde savant, surtout en Angleterre, se fait aujourd'hui une si grande et si fausse gloire (*); et par conséquent, nous découvrons en même temps la nécessité urgente et indispensable de la réforme des sciences, pour pouvoir fonder leurs vérités respectives sur des principes absolus, ou du moins sur des principes établis à priori, et pour pouvoir ainsi les développer par une rigoureuse déduction rationnelle, et non par une présomptive induction empirique. Bien plus, la doctrine du Messianisme apporte ici réellement cette réforme des sciences, comme une décisive garantie scientifique de sa toute-puissante vérité. En effet, tous les principes desquels nous venons de déduire la solution des trois grands problèmes du monde physique, en découvrant en outre les lois fondamentales de leurs objets respectifs, et nommément la solution du problème de la formation du système du monde par les corps célestes, la solution du problème de la construction de ces corps célestes par la matière, et enfin la solution du problème mystérieux de la constitution de la matière par les forces créatrices, tous ces principes, disons-nous, tels que nous les avons présentés ici d'une manière positive, dans leur rigoureuse détermination mathématique, sont des principes absolus, établis entièrement à priori. Aussi, en comparant les résultats accomplis que, pour la solution définitive de ces trois grands problèmes du monde physique, nous venons d'obtenir sur cette voie messianique ou rationnelle, avec les résultats insignifiants et même erronés que, pour la solution de ces mêmes problèmes, les savants ont obtenus sur leur voie empirique ou expérimentale, on peut, dès aujourd'hui, se former une idée de la différence infinie de la valeur scientifique de ces procédés respectifs. Encore n'avons-nous pas signalé ici toutes les monstruosité auxquelles les savants ont

(*) Nous pourrions ici ajouter : *non si facile gloire*; car, il ne faut que l'usage des sens pour la culture des sciences expérimentales. Et c'est précisément pour cela qu'un si grand nombre d'hommes se font savants de nos jours.

souvent abouti dans leurs inductions empiriques. Par exemple, le célèbre physicien Delong a ainsi établi empiriquement des formules mathématiques pour la propagation et pour d'autres manifestations de la chaleur, qui, si on les étend au delà des limites très-étroites des expériences dont il les a induites, sont de véritables absurdités. De même le célèbre mathématicien Poisson a ainsi conclu empiriquement, du refroidissement continu de l'atmosphère à des hauteurs croissantes, que, par l'extrême abaissement de la température de la couche extrême de l'atmosphère, cette couche doit être de l'air liquide; monstruosité dont on découvre la fausseté par la première de nos deux lois présentes (LXXV), où l'on voit qu'à mesure que la densité décroît dans les couches supérieures de l'atmosphère, la température propre ψ de ces couches diminue également, de sorte que le nombre N qui est formé par cette température ψ , diminue de plus en plus, et influe alors, dans la valeur de la température extérieure $\mathcal{S}$ de ces couches supérieures, assez fortement pour empêcher un trop rapide abaissement, et peut-être même pour causer une élévation dans cette température extrême $\mathcal{S}$. De même encore, le célèbre savant Laplace a conclu ainsi empiriquement, de l'augmentation progressive de la chaleur de la terre à des profondeurs croissantes, que la température au centre de la terre est immense; exagération dont on découvre également la fausseté par la seconde de nos présentes lois (LXXV), où l'on voit qu'à mesure que, d'après ce que nous avons appris plus haut, la densité augmente dans les couches inférieures de la terre, la température propre (ψ) de ces couches augmente également, de sorte que le nombre (N), qui est formé par cette température (ψ), augmente de plus en plus, et influe alors, dans la valeur de la température thermométrique ($\mathcal{S}$) de ces couches inférieures, tout aussi fortement pour empêcher une trop rapide élévation, et peut-être même pour causer un abaissement dans cette température centrale ($\mathcal{S}$). — Nous pourrions alléguer mille autres exemples de ces écarts sur la voie empirique ou expérimentale que suivent encore les savants. Mais, la susdite comparaison des résultats accomplis que produit ici la philosophie messianique des sciences, avec les résultats insignifiants et même erronés que l'on a obtenus sur la voie empirique pour la solution des trois grands problèmes du monde physique, suffit complètement, ce nous semble, pour reconnaître, tout à la fois, et l'insuffisance de ces soi-disant sciences expérimentales, et la nécessité de la présente RÉFORME DES SCIENCES.

« Il ne nous reste ici qu'à légitimer, aux yeux des philosophes, cette faculté de l'homme par laquelle il peut ainsi fixer à priori les principes de la nature, et assister, en quelque sorte, à la création de la matière. — Pour cela, il suffit de leur rappeler ce que, dans notre tableau génétique de l'AUTONOMIE DU SAVOIR HUMAIN (Prolegomènes, p. 103), et spécialement dans l'explicitio qui suit ce tableau, nous avons reconnu concernant la présence dans l'homme d'une véritable faculté spéculative de création ou l'ÉTRANGER, dans les intuitions pures du temps et

de l'espace, formant ainsi de véritables *intuitions intellectuelles* de l'homme. En effet, comme toute création divine de l'Éternel, ou généralement toute création de l'Éternel, étrangère à l'homme, ne peut, dans son individualité du FAIT, se produire autrement que sous les conditions du temps et de l'espace, conditions qui sont ainsi les lois de ce fait individuel, l'homme, comme co-créditeur de ces conditions du temps et de l'espace, peut, par lui-même ou entièrement à priori, fixer, par ce concours à la création des êtres, tous leurs modes possibles de production, c'est-à-dire, toutes les lois qui président à l'existence de ces êtres. — Ainsi, l'homme, dans l'autonomie de son savoir, a la faculté de créer par lui-même, c'est-à-dire, entièrement à priori, toutes les lois du monde physique, comme nous l'avons fait dans les *Prolégomènes*; et il n'a besoin de l'expérience que pour reconnaître le FAIT individuel des êtres physiques qui sont créés indépendamment de lui, c'est-à-dire, pour reconnaître, sur cette voie passive, comment ces faits se rangent sous telles ou sous telles autres lois à la création desquelles il participe par l'autonomie de son savoir. — Or, c'est cet immense bienfait de Dieu, par lequel l'homme se trouve ainsi associé à la création du monde, qui est précisément la base autonome dans l'homme sur laquelle, comme faculté spéculative de création de l'être, s'établit la *SAVOIR-DES SCIENCES* que la doctrine du Messianisme vient, non-seulement de dévoiler, mais d'accomplir même, déjà dans les *Prolégomènes*, et conséquemment mieux dans l'ouvrage présent.

FIN DU COMPLÉMENT (*).

(*) *Post-scriptum.* — Considérant l'importance de la présente théorie de la terre, surtout à cause des graves erreurs de l'Académie des sciences de Paris, nous devons, pour une décisive vérification de nos formules, en les appliquant à la forme d'un ellipsoïde régulier, donner ici les expressions de la gravitation primitive g et de la pesanteur (g), telles que, pour cet ellipsoïde régulier, elles dérivent, d'après les *Prolégomènes* (p. 326 à 327), de notre loi systématique (xvii), combinée avec l'équation (xiii), et telles que, pour l'équilibre d'un péricellipsoïde fluide, elles devraient s'établir à sa surface, par suite de la disposition de ses masses intérieures. — Les voici . . . (cx)

$$g = \frac{\mu}{\beta} \cdot b \sqrt{(1 + \beta)} \cdot \sqrt{1 + \beta \cdot \cos^2 \lambda} \quad ; \quad \text{et} \quad (g) = \frac{\mu}{\beta} \cdot \frac{b \cdot \sqrt{(1 + \beta)}}{\sqrt{1 + \beta \cdot \cos^2 \lambda}} \quad ;$$

en ne perdant pas de vue que, d'après (xviii), on a $(1 + \beta) = (1 + \Theta)^2$.

DOCUMENT

sur

L'URGENTE RÉFORME DES CHEMINS DE FER ET DE TOUTE LA LOCOMOTION TERRESTRE.

Annexé au Complément de la présente Réforme des Mathématiques, et adressé à M. Villiers du Terrage, rapporteur de la Commission des Ponts et Chaussées, nommée par le Ministre des travaux publics en France, pour prendre connaissance de cette réforme scientifique.

Paris, 15 août 1817.

MONSIEUR,

Enfin, le moment est arrivé où l'on pourra décider la grave question concernant la réforme de la locomotion; cette question qui, depuis trois ans et demi, est soumise à l'examen de la Commission des Ponts et Chaussées, dont vous êtes l'honorable rapporteur.

Pour préparer les voies à cette actuelle solution définitive, permettez-moi, Monsieur, de rappeler ici les conditions et les circonstances principales concernant la réforme sur laquelle il s'agit de statuer.

Déjà, en 1838, immédiatement après la prise des brevets d'invention et l'exposition publique des modèles d'étude, désirant éclairer la France sur le dangereux entraînement universel vers la dispendieuse construction des chemins de fer, j'ai pris la liberté d'adresser aux Chambres législatives une pétition : *Sur la barbarie des chemins de fer et sur la Réforme scientifique de la locomotion*. — Cette pétition, arrivée peut-être trop tard (en juin 1838), n'eut aucun résultat officiel. Quant au public, M. Considérant, aujourd'hui membre du Conseil municipal de Paris, produisit alors quelques écrits dans lesquels il chercha à répandre cette idée de la barbarie des chemins de fer.

En effet, comme vous le savez, Monsieur, le problème mécanique de la locomotion spontanée, c'est-à-dire, du mouvement des corps qui portent eux-mêmes leur force motrice, loin d'avoir été résolu, ne s'était même pas, jusqu'à ce jour, révélé encore aux savants. Dans aucun de leurs ouvrages, nommément, dans aucun traité de Mécanique rationnelle, même dans les plus récents, il n'est pas

encore question de ce MOUVEMENT SPONTANÉ, dont les lois spéciales sont essentiellement différentes des lois générales que suit le MOUVEMENT INERTE, c'est-à-dire, le mouvement des corps qui reçoivent leur impulsion par une force extérieure. Ainsi, par exemple, quelle que soit, par rapport à l'horizon, la direction d'un mouvement inerte, ce mouvement peut toujours avoir lieu, avec une vitesse quelconque, même infinie, pourvu que la force motrice qui imprime un tel mouvement au corps, et qui est placée hors de ce corps, soit suffisante pour produire cette vitesse. Et il n'en est pas de même pour le mouvement spontané, c'est-à-dire, pour le mouvement d'un char qui porte lui-même sa force motrice. En effet, quelque grande que puisse être cette force motrice, même infinie, elle ne saurait faire mouvoir le char sur une pente inclinée de plus de 19 degrés sur l'horizon. Or, cette loi spéciale du mouvement spontané, et généralement toutes les lois spéciales que suit ce mouvement, sont demeurées inconnues, et sont encore aujourd'hui inconnues à la science. On conçoit alors comment, dans cette ignorance absolue où l'on est encore généralement sur les lois mécaniques que suit le mouvement spontané, l'exploitation actuelle de ce mouvement sur les chemins de fer ne pouvait être qu'un PROCÉDÉ NA ROUTINE; et l'on conçoit de plus qu'en absence des moyens scientifiques que les lois en question pouvaient seules indiquer, cette exploitation actuelle du mouvement spontané sur les chemins de fer devait, en toute réalité, former un PROCÉDÉ BARBARRE, quelque choquante que puisse paraître cette expression à côté de l'idée vulgaire que se forme le peuple sur la prétendue HAUTE CIVILISATION que présentent aujourd'hui les chemins de fer. Et c'est effectivement ce qui a lieu dans l'exploitation actuelle de ces voies métalliques: d'une part, après avoir vu qu'en tournant la roue d'un char arrêté, on parvient à lui donner un mouvement, on a, PAR UNE VÉRITABLE ROUTINE, imité ce procédé sur les chemins de fer; et de l'autre part, n'ayant pu vaincre, par cette simple rotation des roues, ni le tirage que les chars exercent sur les routes ordinaires, ni le poids qu'ils opposent dans l'ascension sur des pentes, on a, PAR UNE VÉRITABLE BARBARIE, en déboursant inutilement des sommes énormes, dénaturé la surface de la terre pour y établir de droites lignes métalliques. — Nous pensons que le simple bon-sens suffit aujourd'hui, d'abord, pour reconnaître ces deux graves imperfections, la routine et la barbarie, des chemins de fer, et ensuite, pour concevoir enfin le problème mécanique du mouvement spontané, dont la solution scientifique, en découvrant les lois spéciales qui président à ce mouvement, puisse nous donner les moyens, tout à la fois, et pour éviter ces grossières et dangereuses imperfections des actuels chemins de fer, et pour opérer, avec des frais raisonnables, proportionnés à l'état présent de l'économie sociale, et même avec une grande supériorité et sans aucun danger, la RAPIDE LOCOMOTION qui, dans ce moment, est l'intérêt dominant du monde civilisé.

Eh bien, en 1843, après avoir posé et résolu ce difficile et important pro-

blème mécanique du mouvement spontané des corps, et après avoir appliqué cette nouvelle théorie mathématique au mouvement des chars, en opérant ainsi une réforme scientifique dans cette rapide locomotion que demande aujourd'hui le monde civilisé, j'ai présenté, à la date du 15 août, une pétition au Ministre des travaux publics, destinée à le prier « de nommer une commission d'hommes éclairés pour prendre une connaissance plus positive de cette affaire et des conditions auxquelles je pourrais en céder la propriété au gouvernement. » — A cette pétition étaient joints : 1°. le *Prospectus historique* de cette réforme de la locomotion, publié à Paris en octobre 1840 ; 2°. l'*Introduction à un Mémoire sur la solution scientifique et sur l'exécution technique de la Réforme de la locomotion*, publiée à Paris en avril 1841 ; enfin, 3°. ce *Mémoire manuscrit* lui-même. Et dans ce *Mémoire manuscrit*, en signalant les éléments de la réforme scientifique dont il s'agit, et les combinaisons systématiques de ces éléments, pour indiquer par là tous les procédés possibles de cette locomotion spontanée, je fais connaître au Ministre que les procédés que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer, impliquent les deux ausdites imperfections graves, la routine et la barbarie. Mais, pour ne pas choquer le Ministre par ces véritables expressions, je me suis borné à qualifier du nom de *FAUSSE LOCOMOTION* ces procédés actuels des chemins de fer ; et j'indique à Son Excellence les nouveaux procédés de locomotion générale sur les chemins de fer et sur les routes ordinaires, procédés scientifiques que, par opposition aux premiers, je qualifie simplement du nom de *VAIE LOCOMOTION*. Bien plus, dans ce *Mémoire manuscrit*, que je nommerai dorénavant *Mémoire préliminaire*, je présente, dans trois tables, les résultats numériques que ma nouvelle théorie mécanique détermine à priori pour tous les cas possibles de la locomotion spontanée, soit pour la vraie locomotion scientifique, soit pour la fausse locomotion de routine, et cela même séparément pour les chemins de fer et pour les routes ordinaires, en évaluant ainsi ces résultats numériques pour toutes les pentes, depuis le plan horizontal jusqu'à la pente de 18° 10' où cesse la fausse locomotion sur les chemins de fer, et jusqu'à la pente de 17° 1' où elle cesse sur les routes ordinaires. — Ainsi, par cette exposition préliminaire, mais détaillée, de la réforme scientifique dont il s'agit, je faisais connaître positivement, au moyen de sa détermination numérique, l'objet précis dont je proposais, dans ma susdite pétition au Ministre, l'acquisition par le gouvernement, c'est-à-dire, l'acquisition de la propriété que, pour cette réforme de la locomotion, me conférerait mes brevets d'invention. Et c'est pour cela uniquement que je priais le Ministre de nommer une Commission à laquelle je puisse donner la démonstration rigoureuse de tous ces différents résultats annoncés et fixés numériquement.

Or, c'est en réponse à cette pétition qu'à la date du 27 septembre 1843, le Ministre me fit connaître la nomination de la Commission, formée par vous, Monsieur, et par MM. Férre et Hurel, tous membres du Conseil gé-

néral des Ponts et Chaussées. — C'est donc depuis ce moment que commenceront mes relations avec cette honorable Commission. Et je ne pourrais mieux répondre, tout à la fois, et à cette confiance du Ministre, et à ce choix d'hommes si éclairés, qu'en transmettant à cette honorable Commission les trois grands Mémoires qui, d'après leur description dans l'opuscule intitulé : *Urgente réforme des Chemins de fer et de toute la locomotion terrestre*, contiennent le développement complet, théorique et technique, de cette réforme scientifique, et par conséquent les démonstrations mathématiques et rigoureuses de toutes les nouvelles lois mécaniques qui président à cette générale locomotion spontanée. Aussi, par suite de cet accomplissement absolu, théorique et technique, de la réforme dont il s'agit, nommerai-je *Mémoires définitifs* ces trois grands Mémoires, formant quatre volumes *in-folio*, que j'ai eu l'honneur de présenter à la Commission, et dans lesquels se trouve cet accomplissement mathématique de la grave question que j'ai ainsi soumise au Ministère des travaux publics de France. — Et de cette manière, ces trois Mémoires définitifs, qui contiennent la *solution finale* de la question, se trouveront naturellement opposés au susdit Mémoire préliminaire qui avait été présenté d'abord au Ministre, et qui ne contenait encore que les *problèmes* et les *annonces numériques* des résultats.

Il importe ici essentiellement d'établir que, dans les trois Mémoires définitifs qui sont entre les mains de la Commission, se trouve, en toute réalité, comme je viens de le dire, l'accomplissement mathématique et final de la grande question dont il s'agit. Et je ne puis le faire mieux qu'en citant l'obligation morale que, déjà le 30 février 1844, en présentant le deuxième de ces Mémoires, je croyais devoir en résulter pour Messieurs les Commissaires. Cette obligation morale, telle qu'elle se trouve reproduite dans le susdit opuscule sur l'*Urgente réforme de la locomotion* (pages 26 et 27), est littéralement celle-ci :

« Je sais qu'après avoir approfondi le deuxième Mémoire que je présente
 « actuellement à la Commission, elle aura reconnu que toute entreprise nouvelle de chemins de fer, dans l'état de la fausse locomotion que l'on y pratique aujourd'hui, serait ruineuse pour les actionnaires, onéreuse pour ceux qui s'en serviraient, nuisible à l'État par l'absorption d'inutiles capitaux, et, par conséquent, inadmissible en politique et même en moralité par le gouvernement. Je ne prétends donc nullement, par le petit retard que je demande encore pour la communication du dernier Mémoire, arrêter l'accomplissement du devoir que la Commission ressentira sans doute d'empêcher, autant qu'il dépendra de son influence légale, toute entreprise nouvelle des anciens chemins de fer. »

« C'est en me fondant sur les lumières scientifiques de la Commission que, par regard à la haute influence de son autorité, je dois lui attribuer cette nouvelle obligation morale. En effet, le Mémoire que je lui présente aujourd'hui

« d'hui, est proprement, dans sa partie théorique, qui découvre les lois générales de la locomotion spontanée, une branche de la mécanique rationnelle, dont la vérité subsiste indépendamment et avant toute expérience. Aussi, croirais-je manquer d'égards à la Commission, si je lui proposais de constater, par des expériences, ces vérités purement rationnelles. Que dirais-elle, en effet, si je lui proposais de démontrer le théorème de Pythagore par l'expérience, en découpant le carré de l'hypoténuse et ceux des cathètes en de petits carrés pour en comparer la somme? Or, tout l'ensemble du Mémoire qui est sous les yeux de la Commission, surtout dans sa partie théorique, n'est rien autre qu'un système complet de pareils théorèmes mathématiques, en tout analogues au théorème de Pythagore. La Commission n'en doutera nullement; et, par conséquent, la vérité de tous ces théorèmes lui sera acquise par leurs respectives démonstrations mathématiques, en tout analogues à la démonstration mathématique du théorème de Pythagore. Et alors, à côté de ces vérités infaillibles, ce serait, de ma part, porter une grave atteinte à la Commission que de ne pas lui supposer la sagesse obligation morale de prévenir et même d'empêcher, autant qu'il est en elle, le mal dont il s'agit, et qui est d'autant plus dangereux que des agitateurs cherchent à le propager au détriment des particuliers et de l'État.

« Sans doute, lorsqu'il s'agira de prouver ces vérités nouvelles aux Chambres législatives, afin d'obtenir une loi pour l'introduction et l'établissement universel de la vraie locomotion en France, il faudra en faire des expériences en grand. Mais, c'est encore une suite de la susdite obligation morale de la Commission; et je me garderais bien de la rendre attentive sur ce devoir qu'elle sentira, par elle-même, mieux que je ne saurais le lui indiquer. »

Vous concevez facilement, Monsieur, que je n'aurais pas osé signaler à la Commission une telle obligation morale, si les Mémoires sur lesquels je la foudrais, n'offraient pas, par leurs rigoureuses démonstrations, des raisons suffisantes pour le faire. — Mais, arrivons aux résultats définitifs que les trois Mémoires accomplis présentaient le 30 avril 1844, c'est-à-dire, le jour où le dernier de ces Mémoires vous fut remis.

En distinguant toujours la locomotion *inerte*, qui s'opère lorsque le char reçoit son impulsion par une force motrice extérieure, et la locomotion *spontanée*, qui s'opère lorsque le char porte sa force motrice et se donne ainsi lui-même son impulsion, nos Mémoires définitifs présentaient, pour ces deux modes de locomotion, les résultats irréfutables que voici. — D'abord, pour ce qui concerne la locomotion *inerte*, en employant, à la place des roues ordinaires, une nouvelle machine locomotive, que je nomme *roue-accomplie*, et que je caractériserai mieux ci-après, le troisième Mémoire présente, sous les marques (96), (113), et définitivement (180), la détermination rigoureuse de

RÉFORME DES

la réduction du tirage qu'il est possible d'obtenir dans le mouvement des chars. En outre, les tables (139) et (145) présentent, pour les chemins de fer et pour les routes ordinaires, dans leurs conditions extrêmes, l'évaluation numérique de cette réduction du tirage; tables dont la dernière, fixant les résultats les moins favorables, parce qu'on y tient compte de l'imperfection possible dans la construction de la machine, a été reproduite à la page 35 de l'opuscule sur l'Urgente réforme des chemins de fer, etc., savoir :

TABLE N^o. 1. (*)

*Limites extrêmes de la réduction du tirage des chars, opérée par la
roue-accomplie.*

		VOIES DE LOCOMOTION.		REDUCTIONS POUR LES DIFFERENTES VITESSES.	
Specification.		Tangente de la pente.	Pour les plus petites.	Pour les plus grandes.	
Routes ordinaires, de fer.	Voie horizontale.	0,000.	0,167.	0,173.	
	La plus grande pente des routes royales.	0,050.	0,283.	0,346.	
	Voie horizontale.	0,000.	0,167.	0,208.	
	La plus grande pente des routes royales.	0,050.	0,263.	0,631.	

De plus, sur les pages 35 à 37 de ce même opuscule, se trouve un aperçu des avantages immenses que présente déjà cette simple réduction du tirage des chars; avantages qui, dans l'état actuel de l'industrie sociale, rendent pour ainsi dire inutiles les barbares chemins de fer existants, et méritent ainsi déjà, ce me semble, une sérieuse attention du Ministère des travaux publics. — Ensuite, pour ce qui concerne la locomotion spontanée, en employant à la place du procédé de routine dont on se sert sur ces actuels chemins de fer, une nouvelle machine locomotive, que j'appelle *roue-phlogénique*, et que je caractériserai également ci-après, le troisième Mémoire présente, sous la marque (197), la détermination rigoureuse de la force motrice qui, dans toutes les différentes circonstances, de la vitesse, de la pente et de la charge, suffit pour opérer ce mouvement spontané d'un char. En outre, la table (198) présente, pour les conditions extrêmes des chemins de fer et des routes ordinaires, l'évaluation numérique de ces suffisantes forces motrices; table qui a été reproduite à la page 38 de l'opuscule sur l'*Urgente réforme des chemins de fer*, etc., savoir :

(*) Les trois tables présentes indiquent le terme final, et trois tables provisoires indiquent ci-après l'application actuelle de cette réforme de la locomotion.

TABLE N°. 2.

Forces motrices, évaluées en nombre de chevaux, à l'aide desquelles la roue phorogénique peut opérer, avec une vitesse de près de neuf lieues à l'heure, le mouvement d'une masse de 50,000 kilog. sur les chemins de fer, et de 10,000 kilog. sur les routes ordinaires.

VOIES DE LOCOMOTION.		FORCES MOTRICES.	
Spécification.	Tangente de la pente.	Sur les chemins de fer.	Sur les routes ordinaires.
Voie horizontale.	0,000.	3,54.	3,92
La plus grande pente des routes royales.	0,050.	60,42.	28,91.

Or, la simple inspection du nombre de ces forces motrices qui suffisent pour opérer, dans de pareilles circonstances, la locomotion spontanée des chars, fait découvrir l'énorme différence entre ce qu'il est ainsi possible de faire et ce que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer. Mais, pour fixer rigoureusement cette différence, en suivant la loi qui, dans le deuxième Mémoire, sous la marque (146), préside à la fausse locomotion que l'on pratique actuellement sur les chemins de fer, et en réunissant les évaluations numériques de cette loi, qui s'y trouvent sous les marques (150) et (151), il a été produit, dans le troisième Mémoire, sous la marque (199), la table qui présente, pour les mêmes conditions de la locomotion spontanée, les valeurs des forces motrices qui sont nécessaires pour opérer le même effet par ces faux procédés; table qui a été reproduite à la page 39 de l'opuscule sur l'Urgente réforme des chemins de fer, etc., savoir :

TABLE N°. 3.

Forces motrices, évaluées en nombre de chevaux, à l'aide desquelles on pourrait, par les procédés de la fausse locomotion actuelle sur les chemins de fer, opérer, avec la vitesse de près de neuf lieues à l'heure, le mouvement d'une masse de 50,000 kilog. sur les chemins de fer, et de 10,000 kilog. sur les routes ordinaires.

VOIES DE LOCOMOTION.		FORCES MOTRICES.	
Spécification.	Tangente de la pente.	Sur les chemins de fer.	Sur les routes ordinaires.
Voie horizontale.	0,000.	40,37.	40,37
La plus grande pente des routes royales.	0,050.	475,50.	134,85.

Comparant alors les deux tables, N°. 2 et N°. 3, on reconnaît positivement cette énorme différence qui se trouve entre ce qu'il est possible pour l'homme de produire en locomotion spontanée, et ce que l'on produit actuellement sur les chemins de fer. Et l'on découvre ainsi, d'une manière infaillible, cette absolue imperfection qui est impliquée dans les procédés actuels de la locomotion spontanée sur les chemins de fer, et qui, dans le résumé de cette décisive comparaison, nous fait découvrir la vérité **IRRÉFRAGABLE** de ce qu'il ne saurait y avoir qu'une *profonde ignorance* ou une *profonde immoralité* à persister dans la fausse locomotion spontanée que l'on pratique actuellement sur les chemins de fer existants (page 41 de l'*Urgente réforme de la locomotion*, etc.).

Telle fut donc la vérité, et je dois le répéter, la vérité **IRRÉFRAGABLE**, que, dans les trois Mémoires définitifs, j'apportais à la Commission des Ponts et Chaussées, et par conséquent au Ministère des Travaux publics de France. Je dis, avec instance, que cette vérité est **IRRÉFRAGABLE**, parce que, comme je l'ai déjà avancé plus haut, tous les résultats qui sont produits dans ces trois Mémoires, et spécialement les trois tables présentes N°. 1, 2 et 3, sur lesquelles se fonde cette grave vérité, y sont démontrés rigoureusement, par des procédés mathématiques infaillibles. Et je ne doute pas que, si les nombreuses occupations administratives de Messieurs les Commissaires leur avaient laissé le temps nécessaire pour approfondir ces trois Mémoires, ils n'eussent eux-mêmes proclamé hautement cette vérité irréfragable que, par l'organe de la Commission, j'apportais au Conseil général des Ponts et Chaussées.

Bien plus, ne recevant de la Commission aucune réponse à toutes les pièces que je lui avais adressées successivement, depuis le 1^{er} octobre 1843 jusqu'au 30 avril 1844, comme on le voit aux pages 7 et 8 de l'opuscule sur l'*Urgente réforme de la locomotion*, j'étais déjà fondé à présumer que Messieurs les Commissaires étaient préoccupés d'autres affaires. Et alors, craignant de voir s'aggraver le mal et le danger que présentaient de plus en plus les chemins de fer, je crus devoir en avvertir directement le Ministre, en lui adressant, à la date du 3 mai 1844, la lettre qui se trouve produite à la fin de l'opuscule que je viens de citer; lettre dans laquelle je reproduis la conclusion générale qui termine le troisième et dernier de mes Mémoires. Je me bornerai ici à reproduire, de cette conclusion communiquée au Ministre, le décisif passage suivant :

- Mais, il ne faut pas perdre de vue que ces résultats, quelque incroyables
- qu'ils puissent paraître, ne sont pas de simples présomptions, plus ou moins
- probables, mais bien d'irréfragables corollaires mathématiques, déduits des sus-
- dits nouveaux théorèmes de la mécanique rationnelle, de ces théorèmes qu'il
- n'est plus au pouvoir de l'homme de méconnaître; aussi, en nous fondant sur
- cette certitude absolue, avons-nous pensé qu'il y aurait l'un ou l'autre, ou une
- *profonde ignorance*, ou une *profonde immoralité*, si l'on voulait dorénavant

« persister dans la barbare construction actuelle des chemins de fer et dans la fausse locomotion que l'on y pratique jusqu'à ce jour.

« Eh bien, le lecteur croira peut-être qu'avec cette certitude absolue de la vérité, nous ne pouvons douter de son succès. Il se tromperait, parce que nous avons malheureusement appris par l'expérience ce que Hobbes avait si bien pressenti dans sa funeste assertion, savoir : « qu'il est douteux que les vérités mathématiques elles-mêmes eussent pu s'établir, si des sectes, ou des corps en crédit, ou des individus puissants s'étaient crus intéressés à les repousser. »

Ce ne fut qu'après cette lettre, adressée au Ministre le 3 mai, que le 7 mai suivant vous me fîtes l'honneur, Monsieur, de me prévenir que vous alliez faire un voyage, et qu'après votre retour, vous provoqueriez un entretien pour m'exposer vos doutes au sujet de la mission que je semblais attribuer à la Commission. — Cette mission était probablement la susdite obligation morale que j'avais pris la liberté de signaler à la Commission déjà le 20 février précédent. Et je compris ainsi plus positivement que mes Mémoires n'étaient pas encore approfondis, peut-être même pas lus encore, car cette obligation morale en résultait comme un acte spontané de Messieurs les Commissaires, et nullement comme une mission que j'aurais osé leur attribuer.

Dans cette indétermination générale, qui rendait comme non-avenus tous ces travaux mathématiques et la susdite vérité grave qui en résultait, j'apprenais en outre, dans ce même mois de mai de 1844, que le Ministre proposait à la Chambre des Députés des lois pour la construction de plusieurs chemins de fer dans leur actuel état de barbarie. Mais, plein de respect pour les motifs politiques qui ont pu déterminer le Ministre, et obligé de défendre, surtout pour mes associés, les droits que me conféraient en France mes brevets d'invention, je pris la liberté d'adresser au Ministre, à la date du 26 mai, une nouvelle lettre que vous connaissez, Monsieur, et qui d'ailleurs se trouve ci-jointe. En même temps, pour mieux garantir mes droits, à la date du 27 mai, je présentai une pétition à la Chambre des Députés, et j'adressai une lettre à M. Arago, comme membre de cette haute Chambre, pour le prier d'appuyer ma pétition ; pièces qui se trouvent également ci-jointes. Et c'est à cette occasion que M. Arago me fit demander, par un de ses collègues au Conseil municipal de Paris, qu'il n'a pas voulu nommer à l'Académie, et dont je dois conséquemment aussi taire le nom, de préparer pour l'Académie un exposé rapide de cette affaire de la locomotion, eu disant que c'était là le moyen sûr de mettre un temps d'arrêt dans la décision de la Chambre des Députés.

Mais, sur ces entrefaites, vous me fîtes l'honneur de m'écrire le 30 mai pour me demander le susdit entretien concernant vos doutes, probablement sur l'obligation morale dont il a été question plus haut. Comme vous vous le rappelez peut-être, par suite de l'expédition pressée que m'avait demandée M. Arago.

ret entretien, où il ne fut plus question de vos doutes, n'eut lieu que le dimanche 9 juin; et la lettre que j'ai eu l'honneur de vous écrire ce même jour, en vous y priant de réunir la Commission entière, pour vous dégager de toute responsabilité personnelle, laisse voir ce qui s'est passé dans ce rapide cotretien. Je prends la liberté de joindre ici la copie de ma lettre, pour le cas où vous l'auriez égarée. — Quoi qu'il en soit, c'est à la suite de ma lettre du 9 juin que, dans la même semaine, vous eûtes l'obligeance de réunir la Commission. Et c'est ici que je dois exprimer ma reconnaissance à cette honorable Commission, pour la manière bienveillante dont tous ses membres étaient disposés à accueillir mes propositions. En effet, vous, Monsieur, pour me dédommager probablement de la perte dont j'avais manifesté la crainte dans ma lettre au Ministre du 26 mai, vous me fîtes comprendre que mes procédés de locomotion trouveraient encore une ample application dans tout le reste de la France; de même, M. Hurel me fit concevoir l'espérance que, pour la construction de mes modèles en grand, le Ministère pourrait concourir par une somme; enfin, M. Fèvre me parla de la concession d'une ligne pour l'établissement de ces nouveaux procédés de locomotion.

Quelque bienveillantes que fussent certainement ces dispositions de tous les membres de la Commission, elles ne pouvaient nullement me satisfaire, et elles ne pouvaient produire en moi que le sentiment de reconnaissance que je viens de leur exprimer, et que je leur conserverai toujours. Elles prouvaient en effet que le véritable objet de mon recours auprès du Ministère des travaux publics, c'est-à-dire, les trois grands résultats, tels qu'ils sont fixés dans les trois tables précédentes, et surtout la grave et irréfragable vérité qui en dérivait pour la condamnation des chemins de fer actuels, étaient entièrement restés hors de question chez Messieurs les Commissaires. Et d'ailleurs, tout l'entretien qui eut lieu dans cette première réunion de la Commission, où l'on me demandait une simple exposition populaire des nouveaux procédés de locomotion, prouvait que les occupations administratives de Messieurs les Commissaires ne leur avaient encore permis de prendre, non-seulement une connaissance approfondie, mais même aucune connaissance quelconque de mes Mémoires. Et cette preuve me fut confirmée lorsque, probablement pour mieux comprendre mon exposition populaire, et nécessairement insuffisante, ces Messieurs me demandèrent l'inspection de mes modèles d'études; de ces modèles rouillés et cassés, tandis que, dans les Mémoires, ils avaient des dessins très-détaillés de toutes mes machines locomotives, amenées à leur dernière perfection. Par obligeance réciproque, ne pouvant refuser rien à Messieurs les Commissaires, j'ai promis de faire nettoyer et réparer les petits modèles qu'ils désiraient voir, en espérant que la vue de ces machines extraordinaires exciterait en eux l'intérêt et le désir d'étudier les Mémoires. D'ailleurs, dans cette inspection, je me réservais encore un autre but plus essentiel, que je devais faire valoir, lorsque le temps serait venu, pour éclaircir définitive-

ment la Commission sur la grande question de la réforme dont il s'agit. Et ce temps, que je croyais alors très-prochain, n'est arrivé qu'aujourd'hui, par les raisons que voici.

Pour satisfaire à la susdite demande que M. Arago m'avait faite, par un tiers, de lui faire avoir un rapide aperçu de ma réforme de la locomotion, pour pouvoir, par son exposition à l'Académie, obtenir un temps d'arrêt à la Chambre des Députés, j'ai rédigé à la hâte cet aperçu, et je le lui fis parvenir, le dimanche 3 juin, la veille de la séance de l'Académie, où il en a parlé effectivement. Mais, par les raisons qu'il ne convient pas ici de déduire, il en a parlé de manière à ce que les journalistes qui ont rendu compte de cette séance, sans m'arrêter aux injures qu'ils m'adressaient à ce sujet, ont fait accroire au public, d'après l'exemple que leur avait donné innocemment M. Arago, que ma réforme scientifique n'était qu'une rêverie, au lieu de lui apprendre, comme M. Arago aurait dû le faire, qu'elle était une doctrine mathématique accomplie, déposée au Ministère des travaux publics, dans trois grands Mémoires, formant quatre volumes *in-folio*. En outre de ce rapport inexact, et sans doute calculé, pour mieux établir la prétendue rêverie, l'un de ces journaux, le *National*, affirmait que les savants français (il voulait dire les académiciens de Paris) ne pouvaient comprendre mes ouvrages mathématiques. Et remarquez, je vous prie, Monsieur, que cette affirmation, qui était un nouveau mensonge, puisque Lagrange a fait reconnaître à l'Académie des sciences de Paris ma *loi suprême des mathématiques* comme embrassant toutes les découvertes des mathématiques modernes, découvertes qu'il déclarait même n'être que des *cas très-particuliers* de ma loi universelle, remarquez, dis-je, que cette mensongère affirmation émanait directement de l'Académie des sciences elle-même. En effet, dans le rapport verbal que M. Arago fit publiquement à l'Académie du Mémoire succinct qu'il m'avait demandé, il n'avait pas lu ce Mémoire, comme me l'ont dit des personnes qui ont assisté à cette séance; et cependant, dans le susdit récit du *National*, se trouve la phrase suivante :

« La nouvelle locomotion, dit M. Wronski, prend son point d'appui, sa réaction, non dans le précaire frottement, réel ou virtuel, des roues contre le sol, comme on le prend actuellement dans la fausse locomotion sur les chemins de fer, mais dans la gravitation même du char, comme le prennent tous les êtres animés qui exercent une locomotion spontanée. »

Cette phrase, qui est littéralement extraite de mon Mémoire, ne pouvait conséquemment être connue du journaliste que par une communication immédiate que lui en avait faite l'Académie. — Ce qu'il y a ici de plaisant, c'est que, dans cette phrase précisément par laquelle on voulait appuyer le mensonge, se trouve, en toute réalité, le principe sur lequel se fonde toute ma réforme scientifique de la locomotion; de sorte qu'on serait tenté de croire qu'il y avait réellement quelque chose de vrai dans la susdite affirmation du journaliste, dans celle que

les académiciens de Paris ne peuvent comprendre mes ouvrages mathématiques. — Mais, revenons à notre honorable Commission.

Cette pernicieuse, pour ne pas dire perfide, influence publique de l'Académie des sciences de Paris, dut nécessairement s'exercer et s'étendre jusque sur cette Commission des Ponts et Chaussées, dont les honorables membres, comme je viens de le supposer, n'avaient pas encore eu le temps d'étudier les Mémoires qui étaient soumis à leur examen. Et, en effet, si je ne me trompe, cette influence paraît avoir altéré un peu les bienveillantes dispositions de Messieurs les Commissaires, à en juger par ce qui est arrivé depuis.

Je crus de mon devoir de vous faire part, Monsieur, comme rapporteur de la Commission, de ce qui venait de se passer à l'Académie des sciences et dans les journaux. Et à cette fin, j'ai eu l'honneur de vous communiquer, à la date du 15 juin, 1°. l'*Aperçu de la Réforme de la locomotion*, que j'avais rédigé à la hâte sur la demande de M. Arago; 2°. le rapport que l'Académie, sous le nom d'un homme de paille, a fait au public, dans le susdit journal, le *National*; et 3°. la lettre que j'avais adressée, à la date du 6 juin, à M. Arago, pour provoquer sa dénegation formelle de cette manifeste perfidie, et par conséquent, dans le cas où il ne le ferait pas, pour le dégager poliment de la promesse qu'il avait faite d'obtenir, par ce moyen, « un temps d'arrêt » à la Chambre des Députés. Ces pièces étaient jointes à une longue lettre que j'ai pris la liberté de vous écrire ce même jour du 15 juin, pour vous faire part de l'extrême simplicité à laquelle, par suite de ce rapport académique dans le *National*, et du silence confirmatif de M. Arago, secrétaire perpétuel de cette Académie, se trouvait alors réduite la proposition primitive que, dans ma pétition du 15 août 1843, j'avais faite à S. Exc. le Ministre, et pour laquelle a été nommée la Commission. — En réponse à ces pièces, dans votre lettre du 18 juin, tout en accusant leur réception, vous ne faites, Monsieur, aucune mention de cet état beaucoup plus simple auquel se trouvait ainsi réduite ma proposition primitive, et vous vous bornez à me dire que la Commission désire « prendre connaissance des expériences et des modèles dont je lui avais parlé. » Je me permettrai ci-après d'interpréter votre silence sur ma nouvelle proposition, beaucoup plus simple; et quant à la demande que vous me faisiez de prendre connaissance des modèles, vous saviez qu'on les réparait pour vous les faire voir, tous jours dans la susdite et unique espérance que cette vue exciterait chez Messieurs les Commissaires l'intérêt et le désir d'étudier mes Mémoires pour en venir au véritable objet de nos relations. Aussi, le 20 juin, jour où j'avais compté que ces réparations seraient terminées, la Commission s'est-elle réunie effectivement.

Dans son attente, je lui ai présenté d'abord une expérience décisive du principe qui sert de base à mes machines pneumatiques de locomotion, pour lesquelles je n'avais pas encore de modèles d'étude. Ce principe consiste dans mes nouvelles lois concernant l'intime construction mécanique des corps, dans leur

triple état, de gascité, de liquidité, et de solidité, telles que ces lois sont déterminées, sous les marques (67) à (70), dans mon opuscule sur les *Nouveaux systèmes de Machines à vapeur* (en 1835), par anticipation sur ma philosophie mécanique de la construction de la matière, que j'ai produite récemment dans les *Prolegomènes du Messianisme*. Et l'expérience que j'ai soumise à la Commission, consistait dans deux thermomètres philosophiques, construits d'après ces lois, l'un en mercure et l'autre en alcool, et indiquant toujours, l'un et l'autre, pour toute température, le même degré dynamique, dont l'échelle n'est pas la même que celle des degrés artificiels des thermomètres ordinaires, qui, lorsqu'ils sont en matières différentes, indiquent notoirement, pour la même température, des degrés différents, à l'exception seulement des deux termes fixes de comparaison. — Ainsi se trouvaient constatées, par cette expérience; aussi délicate qu'elle est décisive, ces nouvelles lois mathématiques de l'intime construction de la matière, sur lesquelles, comme on le voit dans les *Mémoires* déposés à la Commission, se fonde la construction de mes machines pneumatiques de locomotion. — Quant aux machines stéréophoriques, par un véritable bonheur, l'ouvrier mécanicien, chargé de la réparation de leurs modèles, n'a pu, malgré tous les efforts, terminer cette réparation pour le 30 juin, pour ce jour de la réunion de la Commission, comme il le lui a déclaré lui-même.

Je dis que ce retard est arrivé *par un véritable bonheur*; car, dans l'opinion que la Commission se faisait de la réforme de la locomotion dont il s'agit, l'exhibition des modèles, quelque favorable qu'elle eût pu être, loin de produire chez Messieurs les Commissaires le désir d'approfondir les *Mémoires*, selon que je le pensais, aurait probablement compromis toute cette affaire, comme je l'ai reconnu bientôt après. En effet, quelques jours après, dans une visite que j'ai eu l'honneur de vous faire, Monsieur, pour vous prévenir que les modèles seraient incessamment transportés dans un autre local, vous me dîtes, entre autres choses concernant le rapport que vous auriez à faire au Ministre sur cette affaire, que vous, Monsieur, et vos honorables collègues de la Commission, vous étiez des *hommes pratiques* qui ne pouvaient se charger de l'examen des théories contenues dans mes *Mémoires*. Je compris alors, et seulement alors, qu'il existait entre nous, probablement par ma faute, un immense malentendu. Au lieu de voir, dans mes productions, une absolue *ANATOMIE SCIENTIFIQUE DE LA LOCOMOTION TERRESTRE*, par laquelle se trouvait condamnée la barbare locomotion actuelle sur les chemins de fer, la Commission me paraissait voir, dans ces productions, rien autre qu'une invention de *NOUVELLES MACHINES LOCOMOTIVES*, propres, tout au plus, si l'expérience confirmait cette invention, à perfectionner cette actuelle et barbare locomotion sur les chemins de fer.

Nos relations durent alors changer tout à coup. Et heureusement, d'abord,

le susdit transport des modèles dans un nouveau local, et fatalement ensuite, une maladie assez grave qui me survint alors, devinrent les motifs de la suspension provisoire de nos relations, de cette suspension qui a continué jusqu'à ce jour, par les raisons que je vais avoir l'honneur de vous déduire.

Ces raisons, en ne comptant que les principales, sont au nombre de trois. Et ce sont les seules que je me bornerai ici à indiquer, étant convaincu d'ailleurs que vous reconnaîtrez, Monsieur, que chacune de ces trois raisons est suffisante pour légitimer la suspension dont il s'agit.

La première de ces raisons est l'absence continue, parmi les savants, et par conséquent parmi les ingénieurs, du problème même de la locomotion spontanée, malgré tout ce que j'en ai dit, d'abord dans mes écrits publics, ensuite à l'Académie, dans le susdit Aperçu, enfin aux Ponts et Chaussées, dans mes Mémoires, préliminaire et définitifs. Or, vous concevez bien, Monsieur, que l'on ne s'intéresse guère à la solution d'un problème que l'on n'a pas conçu encore. — Et pour prouver cette absence universelle du problème en question, il me suffira d'alléguer ici ce qui s'est passé dans la séance du 3 juillet 1844 de la Chambre des Députés, dans cette séance où M. Arago attaquait l'administration des Ponts et Chaussées sur la mauvaise et insuffisante exécution des chemins de fer en France. — En effet, à cette mémorable séance, M. Arago fit d'abord une espèce de cours sur les chemins de fer, que le *Journal des Débats* disait plus propre à être défilé à une leçon du Conservatoire des Arts et Métiers, et que je crois, moi, moins propre à servir ainsi de leçon, parce que, n'étant pas notoirement un grand mathématicien, M. Arago n'a certainement pas la prétention de savoir apprécier rigoureusement, ni par conséquent exactement, la nature des chemins de fer. Aussi, comme vous pouvez, Monsieur, en juger maintenant par les formules (145), (146), (153), etc., qui, dans mon deuxième Mémoire, fixent les lois du mouvement sur les chemins de fer actuels, tous les reproches que M. Arago faisait à l'administration des Ponts et Chaussées, entre autres ceux concernant les pentes, étaient mal fondés, et au contraire les réponses du Ministre étaient pleines de vérité, parce que, dans cette locomotion si imparfaite encore, tous les excès, en pentes, en vitesses, en courbures, etc., devaient raisonnablement être évités. Mais, ce qui fournit proprement la preuve que je me propose ici de donner, c'est que, après cette pompeuse exposition de la perfection actuelle des chemins de fer hors de la France, M. Arago reproche à l'administration de ne pas introduire les chemins de fer atmosphériques; et le Ministre, après avoir probablement consulté le Conseil général des Ponts et Chaussées, vint, dans une séance prochaine, annoncer qu'il consentait à cette introduction. Or, les chemins de fer atmosphériques ne présentent pas un MOUVEMENT SPONTANÉ : leur locomotive ne porte pas elle-même sa propre force motrice; elle reçoit son impulsion par une force motrice extérieure, et elle pré-

sente ainsi un véritable MOUVEMENT-ERRÊTE. Ainsi, les chemins de fer atmosphériques, au lieu de former un progrès dans le mouvement spontané des chemins de fer actuels, forment au contraire un abandon de ce mouvement spontané et un retour à l'ancien mouvement inerte des chars; et ils constituent conséquemment, par la nécessité où l'on se croit être de les introduire, une véritable condamnation expérimentale du mouvement spontané sur les chemins de fer actuels. D'où il s'ensuit, d'une manière irrécusable, d'abord, que le secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, et par conséquent cette Académie elle-même, et ensuite que le Conseil général des Ponts et Chaussées, et par conséquent les ingénieurs qui-en dépendent, n'ont pas encore conçu le PROBLÈME MÉCANIQUE du mouvement spontané. Et alors, vous conviendrez, Monsieur, que, pour donner la solution de cet important problème, je devais attendre l'époque où, par de nouvelles et dispendieuses expériences, on serait parvenu à reconnaître généralement l'imperfection, tant à la fois, et des chemins de fer actuels, et des chemins de fer atmosphériques, et à concevoir alors le problème de la vraie locomotion spontanée. Et cette époque, je crois qu'elle est arrivée aujourd'hui.

La deuxième des trois raisons principales qui légitiment la suspension de mes relations avec la Commission, c'est l'enthousiasme ou plutôt l'engouement général pour les chemins de fer, joint aux raisons politiques qui, malgré mes graves observations, déterminaient le Ministre à faire adopter de nombreuses lois pour l'établissement et l'exécution de ces voies métalliques en France. Vous conviendrez de nouveau, Monsieur, qu'au milieu de cet engouement général, et à côté de ces dispositions législatives, je n'avais guère de chance pour faire prévaloir, auprès de la Commission, la réforme de cette fausse locomotion spontanée. Je devais également attendre l'époque où cet enthousiasme public pour les chemins de fer se serait refroidi, et où les concessions législatives de ces voies métalliques seraient à peu près terminées. Et cette époque, je crois qu'elle est aussi arrivée aujourd'hui.

Enfin, la dernière des trois raisons principales dont il s'agit, est le peu de confiance que la Commission avait dans ma science, concernant les découvertes mathématiques par lesquelles je suis parvenu à reconnaître cette urgente réforme de la locomotion que je lui proposais. En effet, sans vouloir nullement me comparer à ces grands géomètres, si Lagrange, ou même Laplace, avait présenté au Ministère des travaux publics une telle réforme de la locomotion, la Commission se serait empressée d'engager le Ministre à faire les frais pour la construction des modèles en grand qui auraient pu constater, par l'expérience, cette importante réforme. Cependant, je suis parvenu, sans doute par hasard, à donner aux mathématiques leur loi suprême, qui, de l'aveu de Lagrange, comme je l'ai dit plus haut, embrassait toutes les découvertes modernes, et par conséquent la principale découverte de Lagrange, son célèbre

celui

RÉFORME DES

théorème pour le retour des suites, et la principale découverte de Laplace, sa théorie des fonctions génératrices, lesquelles, l'une et l'autre, d'après la déclaration formelle de Lagrange, n'étaient que des cas *TAIS-PARTICULIERS* de ma loi universelle. Et j'avais la présomption de croire que cette petite découverte, reconnue authentiquement par l'Académie des sciences, sur le rapport officiel de Lagrange, me mériterait quelque confiance auprès de la Commission. J'avais de plus produit en France, depuis 1811 jusqu'en 1843, de nombreux ouvrages mathématiques dans lesquels, en me fondant uniquement sur cette loi suprême que je viens de citer, j'ai préparé une réforme des sciences mathématiques, pures et appliquées, une réforme qui, d'une part, était garantie par ce principe suprême, reconnu par Lagrange et par l'Académie, et de l'autre, était amenée au point où il devenait facile d'opérer la réforme elle-même de cette grande science, comme je vais le prouver incessamment. Néanmoins, lorsque, dans ma susdite lettre du 15 juin 1844, je proposais à la Commission l'alternative de faire construire les modèles en grand, pour constater par l'expérience la réforme de la locomotion que j'avais proposée au Ministère, ou bien de faire avec moi un contrat conditionnel, à l'instar de celui de la compagnie Laffitte et Caillard, la Commission, dans sa réponse du 18 juin, ne daigna même pas en faire mention. Il est vrai que ces dispositions peu favorables furent sans doute provoquées alors par le susdit rapport perfide que l'Académie avait fait insérer dans son journal politique, le *National*. Mais, c'était pour moi une raison de plus pour n'attendre de la Commission rien de favorable, parce qu'elle n'aurait pas voulu se mettre en opposition contre l'Académie. Et alors, comme vous voyez, Monsieur, je ne pouvais guère, sous de tels auspices, attendre quelque succès de mes pauvres relations avec la Commission. Il fallait donc encore, par ce troisième motif, suspendre provisoirement ces relations jusqu'à l'époque où je serais parvenu, d'abord, à mériter un peu plus de confiance scientifique de la part de cette honorable Commission, et de plus, à paralyser ou du moins à atténuer un peu les mauvaises dispositions de l'Académie des sciences. — Le moyen pour y parvenir était, sinon impossible, du moins difficile et pénible. En effet, il fallait pour cela rien moins qu'accomplir la réforme des mathématiques que j'avais préparée dans mes ouvrages, et la rendre populaire en y produisant les méthodes pour la solution de tous les problèmes de cette grande science, de ces problèmes qui presque tous sont demeurés non résolus jusqu'à ce jour, comme l'est, par exemple, le célèbre problème de la résolution générale des équations de tous les degrés. Et la production publique de cet immense travail exigeait, pour le moins, trois années. Je m'y suis décidé, d'abord, pour le bien de la science, et ensuite surtout, pour arriver à un résultat utile en faveur des personnes qui, confiantes dans mes travaux scientifiques, ont déboursé des sommes assez considérables pour la présente affaire de la locomo-

tion. En conséquence, l'ouvrage portant le titre de *Reforma des Mathématiques*, qui s'imprimait depuis deux ans, paraît aujourd'hui. Et l'époque où je puis reprendre mes relations avec l'honorable Commission des Ponts et Chaussées, est également, sous ce troisième point de vue, arrivée aujourd'hui.

Permettez-moi donc, Monsieur, de vous présenter enfin aujourd'hui, pour votre honorable Commission, les moyens de conviction; ces moyens que, d'après votre lettre du 20 janvier de l'année dernière, elle attend toujours, et dont l'obtention, comme vous venez de le voir, m'a forcé de suspendre si longtemps nos relations.

Avant tout, je dois faire cesser le susdit malentendu qui, sans doute par ma faute, s'est établi chez la Commission, lorsqu'elle suppose que j'apporte au Ministère des travaux publics l'invention de nouvelles machines locomotives.

— Et pour cela, il suffira, ce me semble, que je déclare formellement que je n'apporte, du moins aujourd'hui, dans les Mémoires qui sont entre les mains de la Commission, aucune invention proprement dite de nouvelles machines locomotives dont j'offrirais l'acquisition par le Gouvernement. Ce que j'apporte au Ministère et dont je lui offre l'acquisition, c'est uniquement la *solution du grave problème de la locomotion spontanée*, consistant dans la détermination des lois spéciales qui président à cette nouvelle locomotion, et qui fixent ainsi ses grands résultats, tels qu'ils sont évalués numériquement dans les susdites trois tables N^{os}. 1, 2 et 3. J'apporte donc au Gouvernement, d'abord, d'après la table N^o. 1, la réforme immense de toute la *locomotion inerte*, telle qu'on la pratique à l'aide de chevaux et d'autres animaux de trait, dont le nombre pourra ainsi être réduit à moins de la moitié; ensuite, j'apporte, d'après la table N^o. 2, la *véritable locomotion spontanée*, sur les chemins de fer et même sur les routes ordinaires, dont les avantages également immenses, dans la facile construction des voies, dans la diminution considérable de la force de la vapeur, dans la vitesse arbitraire du mouvement, et dans l'absence de tout danger permanent, sont manifestes; enfin, j'apporte, d'après la table N^o. 3, la condamnation absolue de la *fausse locomotion spontanée* que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer. — Et par conséquent, ce sont là très-positivement les seuls trois objets distincts sur lesquels la Commission doit prononcer.

Sans doute, pour la réalisation matérielle de ces nouveaux procédés de locomotion, je devrais indiquer des moyens matériels. D'ailleurs, la détermination des lois spéciales qui régissent ces procédés nouveaux, ne pouvait se faire que par une préalable détermination de modes distincts de mouvement réel et matériel. Et par conséquent, ces modes distincts de mouvement matériel, qui, sous les susdits noms de *roue-accomplie* et de *roue-phorogénique*, forment ainsi les règles techniques de mes nouveaux procédés de locomotion, sont une partie constitutive et inséparable des lois théoriques que je viens de signaler comme servant à déterminer la présente réforme de la locomotion. Il faut

donc, pour pouvoir apprécier cette réforme, l'examiner d'abord dans ses résultats théoriques, tels qu'ils sont fondés sur leurs correspondantes règles techniques du mouvement réel; en ne considérant encore ce mouvement et les forces qui le produisent que dans leurs simples directions géométriques, droites ou courbes, dont le tracé forme ainsi la base pour la construction de la roue-accomplie et de la roue-phorogénique, par lesquelles doit être réalisée matériellement cette réforme de la locomotion.

Ce n'est qu'après avoir ainsi constaté la vérité de cette réforme scientifique, soit à priori, par un examen théorique, soit à posteriori, par des expériences positives, que j'indiquerai ci-après, ce n'est qu'alors, dis-je, qu'il pourra être question de la fabrication ou de la construction matérielle de la roue-accomplie et de la roue-phorogénique, qui, comme je viens de le dire, doivent définitivement réaliser ces nouveaux procédés de locomotion. En effet, à quoi servirait-il de fabriquer ces nouvelles machines locomotives, si l'on ne sait pas d'avance quels résultats positifs elles doivent produire? — Aussi, est-ce par l'instance que la Commission mettait à voir mes modèles d'étude, et à faire avec eux des expériences, que je compris qu'il y avait un malentendu, nommément celui que j'ai signalé plus haut; car, avant de savoir de quoi il s'agit, c'est-à-dire, à quoi ces modèles doivent servir, il devenait inutile de les voir et de faire avec eux des expériences. Seulement dans le cas où, par un malentendu, on considérerait ces modèles comme de nouvelles machines locomotives, destinées à perfectionner la fausse locomotion actuelle sur les chemins de fer, il pourrait être utile de les voir, et de faire avec elles des expériences, parce qu'on aurait, dans cet état actuel de locomotion sur les chemins de fer, un terme de comparaison. Et, comme vous venez de le voir, Monsieur, ce n'est là nullement la destination de mes modèles.

Ce n'est donc, je le répète, qu'après qu'on aura constaté, soit par la théorie, soit par l'expérience, la vérité de cette réforme de la locomotion, telle qu'elle est fixée dans les susdites trois tables N^{os} 1, 2 et 3, qu'il pourra être question de la fabrication des machines qui, conformément aux susdites règles techniques de leur fabrication, constituant un simple tracé géométrique, devront définitivement réaliser cette réforme scientifique, c'est-à-dire, que ce n'est qu'alors qu'il pourra être question de la fabrication de la roue-accomplie et de la roue-phorogénique. Et alors, c'est une seconde et toute nouvelle question qui se présentera dans cette réforme de la locomotion, nommément, la question technique de la fabrication des machines propres à réaliser cette réforme scientifique. Aussi, ne sera-ce qu'alors que le Gouvernement ou la Compagnie qui aura acquis la propriété de ces nouveaux procédés de locomotion, pourra et devra ouvrir un concours auprès des ingénieurs-mécaniciens pour cette fabrication de la roue-accomplie et de la roue-phorogénique, d'après les règles techniques que nous venons de rappeler, c'est-à-dire, d'après le simple tracé géométrique de ces machines, en fixant, pour terme de la perfection dans leur

fabrication, les résultats numériques qui sont établis dans les deux premières de nos trois tables normales N^o. 1, 2 et 3.

Or, c'est par une simple anticipation sur cet état ultérieur et définitif de la réforme dont il s'agit, que j'ai présenté, dans la partie technique des Mémoires soumis à la Commission, un premier essai de cette fabrication ou construction matérielle de la roue-accomplie et de la roue-phorogénique, dans deux modes différents, l'un stéréophorique, et l'autre pneumatique. Et l'on comprendra maintenant quel est le sens qu'il faut attacher à ces machines locomotives, construites ainsi matériellement. Ce n'est, comme je viens de le dire, qu'un simple essai de cette fabrication, par lequel j'ouvre le susdit concours pour les ingénieurs-mécaniciens, lesquels sauront certainement produire ces machines avec plus de perfection ; car, dans la partie technique de la mécanique, c'est-à-dire, dans la construction matérielle des machines destinées à un but déterminé, la perfection est notoirement indéfinie, comme je l'ai déjà dit dans la lettre que j'ai eu l'honneur de vous adresser, Monsieur, à la date du 20 février 1844, et qui est reproduite dans l'opuscule sur l'*Urgente réforme de la locomotion* (pag. 29 et 30), où l'on aurait pu, dès alors, se former une idée exacte du vrai sens qu'il faut attacher à ces machines locomotives, c'est-à-dire, l'idée d'un premier essai de la fabrication de ces machines. Et je ne puis, même aujourd'hui, fixer mieux cette idée qu'en reproduisant ici ce que, dans la lettre que je viens de citer, je dis sur la différence essentielle qui, dans notre présente réforme de la locomotion, existe entre sa partie théorique, telle qu'elle est fixée dans les susdites trois tables normales N^o. 1, 2 et 3, et sa partie technique, telle que, dans mes Mémoires, j'ai essayé de l'établir par la double construction matérielle, stéréophorique et pneumatique, des machines qui doivent réaliser cette réforme scientifique. Voici mes paroles : « Nous devons d'abord faire observer que ces respectives théorie et technique sont en quelque sorte indépendantes l'une de l'autre, en tant que la première est l'ouvrage de la création, et la seconde l'ouvrage de l'homme. Aussi, quand même nous n'aurions pas encore inventé les procédés matériels les plus convenables, pour réaliser nos susdites théories, la vérité de ces théories n'en subsisterait pas moins, et elle formerait constamment un problème pour l'activité humaine, afin de devenir ainsi réalisée matériellement avec une perfection de plus en plus grande. — Il faut bien concevoir ces idées sur la différence de la théorie et de la technique, pour pouvoir distinguer, dans notre présente réforme scientifique de la locomotion, ce qu'il y a de réellement théorique, et par conséquent de vrai infailliblement, de ce qu'il y a de purement technique, et par conséquent de susceptible d'une perfection indéfinie. — Heureusement, la finalité dans la création a pour ainsi dire préparé à l'homme les moyens de réaliser matériellement les vérités qui lui sont utiles ; et c'est ainsi qu'en suivant ce guide en quelque sorte providentiel, nous avons pu, dès à présent, réaliser nos nouvelles théories locomotives avec assez de

perfection, ce nous semble, pour que, dès aujourd'hui, on puisse s'en servir avec d'immenses avantages économiques. Précisément par suite de ce que nous venons de dire sur la production, par l'homme, des procédés techniques, nous ne pouvons affirmer que nos machines locomotives, destinées à réaliser nos nouveaux procédés théoriques de locomotion, soient déjà arrivées à leur dernière perfection; mais, nous pouvons néanmoins estimer exactement leur valeur économique, et reconnaître ainsi positivement leur actuelle importance pratique. Et c'est après une telle estimation exacte, établie, durant plusieurs années, sur de nombreuses épreuves et des constructions très-variées, que nous sommes fondés à affirmer que les machines locomotives que nous présentons aujourd'hui pour la réalisation matérielle de nos nouvelles théories locomotives, ont déjà une perfection pratique peut-être plus grande que n'en comporte l'état actuel de la civilisation, et cela en considérant surtout les principes mathématiques auxquels ces constructions techniques se trouvent chez nous subordonnées constamment, principes généraux qui admettent, dans ces constructions, des modifications particulières et indéfinies.

La Commission doit donc, ce me semble, suspendre provisoirement l'examen de cette partie technique et purement accessoire de la présente réforme, concernant la fabrication des nouvelles machines, et elle doit avant tout, comme je l'ai déjà prouvé plus haut, examiner la partie théorique et principale de cette réforme scientifique, pour pouvoir constater, par la science ou par l'expérience, la vérité des grands résultats de cette réforme, de ces résultats décisifs qui sont fixés dans les trois tables normales N^o. 1, 2, 3, et desquels dépend évidemment toute cette grave question. — Or, parmi les deux voies par lesquelles on peut ici parvenir à constater la vérité, la Commission, d'après votre formelle déclaration, Monsieur, choisit l'expérience pour l'examen dont elle est chargée dans cette affaire; en effet, comme je l'ai déjà dit plus haut, lorsque, dans les premiers jours de juillet 1844, j'ai eu l'honneur de vous entretenir pour la dernière fois, vous m'avez dit expressément que les membres de la Commission sont des hommes pratiques qui ne peuvent se charger d'examen théoriques. Eh bien soit; nous adopterons l'expérience pour constater la vérité des grands résultats en question, tels qu'ils sont fixés dans les trois tables normales. Et ce sont conséquemment les expériences les plus simples et les plus propres à cette fin que je vais avoir l'honneur de vous indiquer, en les choisissant d'ailleurs de manière à ce qu'elles puissent en même temps offrir une grande utilité publique. — Ce sera là, Monsieur, le moyen de conviction que j'ai promis de donner à la Commission.

Pour cela, résumons la question afin de ne nous attacher qu'à ce qu'il y a de principal, dont dérive tout le reste. — Or, comme vous en conviendrez facilement, l'objet principal en question, c'est manifestement la vérité des nouvelles lois mécaniques dont l'évaluation numérique, dans mes Mémoires, a conduit aux grands résultats qui sont fixés dans les trois tables normales N^o. 1,

2 et 3. — C'est donc cette vérité des nouvelles lois mécaniques concernant la locomotion spontanée qu'il faut constater par des expériences, surtout par des expériences simples et décisives.

Eh bien, il se présente d'abord un système d'expériences éminemment simple, et qui ne demandera aucuns déboursés. Ce sont les expériences de toutes les différentes lois qui président à la fausse locomotion que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer, de ces lois spéciales qui, dans mes Mémoires, sont déduites des lois générales de la locomotion spontanée. En effet, comme vous le voyez dans mon deuxième Mémoire, ces lois spéciales impliquent tous les éléments du mouvement actuel sur les chemins de fer, notamment, le poids de la locomotive et celui des waggon, la force motrice, la pression sur le piston de la machine à vapeur, la pente de la voie, la vitesse du mouvement, le frottement des roues de la locomotive, le tirage ordinaire des chars, tous les genres de frottement, etc., etc. La Commission pourra donc, par des expériences répétées, faites avec des mouvements variés sur les chemins de fer, constater la vérité des formules qui, dans mon Mémoire, fixent les lois spéciales de cette fausse locomotion sur les chemins de fer; et elle pourra ainsi constater cette vérité pour toutes les variations des éléments que je viens de nommer. — Or, comme vous le savez, Monsieur, la science ne connaît pas encore ces lois qui régissent le mouvement actuel sur les chemins de fer. On a bien tenté de construire pour cela quelques formules empiriques; mais, on n'a pu encore établir à priori les lois générales pour ce distinctif mouvement spontané. — Je me bornerai, pour votre souvenir, à reproduire ici les trois principales de ces lois, notamment celles qui, dans le deuxième Mémoire, se trouvent sous les marques (143), (153), et (167). Pour cela, désignons toujours, comme dans ce Mémoire, par M le poids de la locomotive, par μM celui des waggon; par α l'angle de l'inclinaison de la voie; par p le tirage, c'est-à-dire, le facteur de traction des chars sur des plans exacts, tels que les chemins de fer, dont la valeur moyenne est à peu près $p = \frac{1}{200}$; par q le tirage ou le facteur général de traction sur des routes quelconques, dont la valeur moyenne sur les routes ordinaires est à peu près $q = \frac{1}{40}$; par ψ le facteur de la résistance de la voie contre la rotation des jantes des roues, dont la valeur est à peu près entre $\psi = \frac{1}{2}$ et $\psi = \frac{1}{4}$; par v la vitesse du mouvement de translation de la locomotive; par u la vitesse du mouvement de rotation qu'ont réellement les jantes des roues de la locomotive; par r le rayon de ces roues; par Δ un dyname ou la force d'un cheval, en l'estimant à 75 kilogrammes élevés à la hauteur d'un mètre dans une seconde de temps; par n le nombre de

ces dynames qui mesure la force motrice de la locomotive; par γ le facteur de la diminution de cette force par la transmission du mouvement de va-et-vient du piston et de sa bielle à la manivelle qui opère la rotation des roues et dont le rayon est n , facteur qui est à peu près $\gamma = \frac{9}{10}$; enfin, par Θ la pression, estimée en poids, que la vapeur exerce sur le piston de la machine à vapeur. Et formons aussi, comme dans le Mémoire, les quantités auxiliaires . . . (i)

$$\xi = 1 + \varphi\mu, \quad \text{et} \quad 1 - \zeta = \frac{\psi \cdot \cos \alpha - \xi \cdot (\varphi + \sin \alpha)}{(\psi - \varphi\xi) \cdot \cos \alpha};$$

dont la première est sensiblement $\xi = 1$, et dont la seconde se réduit à l'expression suffisante . . . (ii)

$$1 - \zeta = \frac{\psi - \xi \cdot (\varphi + \tan \alpha)}{\psi - \varphi\xi}.$$

Nous aurons alors, d'après l'expression (145) de mon deuxième Mémoire, pour la détermination de la vitesse v du mouvement, lorsque la force motrice n est donnée, la loi . . . (iii)

$$v = \frac{75 \cdot \gamma n \cdot (1 - \zeta)}{(\varphi + \sin \alpha) \cdot (\xi + \mu) \cdot M};$$

et par conséquent, pour la détermination de la force motrice n , lorsque la vitesse v du mouvement est donnée, la loi réciproque . . . (iv)

$$n = \frac{(\varphi + \sin \alpha) \cdot (\xi + \mu) \cdot M v}{75 \cdot \gamma \cdot (1 - \zeta)}.$$

Nous aurons de plus, d'après l'expression (153) de mon deuxième Mémoire, pour la détermination de ce que l'on nomme frottement des roues de la locomotive, c'est-à-dire, pour la détermination du rapport des vitesses u et w de rotation et de translation de ces roues, la loi . . . (v)

$$\frac{u}{w} = \frac{\xi + \mu\xi}{\xi \cdot (1 - \zeta)};$$

c'est-à-dire, d'après l'expression auxiliaire (159), la loi toute déterminée . . . (vi)

$$\frac{u}{v} = \frac{\left\{ \psi - \varphi(\xi + \mu) \right\} \cdot \cos \alpha + (\varphi + \sin \alpha) \cdot \mu}{\psi \cdot \cos \alpha - \xi \cdot (\varphi + \sin \alpha)}.$$

Nous aurons enfin, d'après l'expression (167) de mon deuxième Mémoire, pour la détermination de la pression Θ qui est exercée sur le piston de la machine à vapeur, la loi . . . (vii)

$$\Theta = 6M \cdot (\varphi + \sin \alpha) \cdot \left\{ 1 + \frac{\mu(1 - \zeta)}{\xi + \mu\xi} \right\} \cdot \frac{\pi r}{2\pi},$$

en désignant toujours par π la circonférence du cercle dont le rayon est l'unité.

Or, vous avez vu, Monsieur, dans mon deuxième Memoire, que, par ces trois présentes lois (iii), (v), et (vii), toutes les circonstances du mouvement actuel sur les chemins de fer se trouvent déterminées. Et vous y avez même vu, d'abord, sous les marques (150) et (151), les évaluations numériques de la première (iv) de ces lois, et ensuite, sous les marques (155) et (156), les évaluations également numériques de la deuxième (v) de ces lois, en les appliquant successivement aux chemins de fer et aux routes ordinaires, pour toutes les pentes principales, depuis la voie horizontale, jusqu'à la susdite pente extrême où le mouvement n'est plus possible. Vous y avez vu de plus, sous la marque (168), où se trouve, pour la voie horizontale, c'est-à-dire, pour $\alpha = 0$, la réduction de la troisième (vi) de ces mêmes lois, savoir, la réduction . . . (viii)

$$\Theta = M \cdot g \cdot (1 + \frac{1}{2}\mu + \mu) \cdot \frac{\pi r}{2n},$$

vous y avez vu, dis-je, l'explication de ce mystérieux phénomène mécanique dont il a été vivement question dans la seconde réunion de la Commission, c'est-à-dire, du phénomène de la cessation intermittente du mouvement lorsqu'on y ajoute successivement, un, deux, trois, etc., waggon.

Eh bien, la Commission pourra maintenant procéder à des expériences, aussi nombreuses et aussi variées qu'elle voudra, pour constater la vérité de ces trois lois fondamentales qui régissent évidemment toutes les circonstances du mouvement que l'on pratique actuellement sur les chemins de fer. La troisième (vii) de ces lois, dont les savants et les ingénieurs ne se doutent même pas encore, offre surtout, par l'application d'un manomètre au cylindre de la machine à vapeur, un moyen aussi facile que décisif pour faire ces expériences, sans déranger le service ordinaire sur les chemins de fer. — Au reste, quelles que soient les expériences que la Commission voudra faire, j'offre de m'y trouver présent pour indiquer, suivant la variation des localités et du mouvement, la détermination la plus convenable et la plus prompte des quantités constantes ϕ , ψ , η , γ , etc., qui entrent, comme éléments, dans les lois dont il s'agit, et dont on parviendra ainsi infailliblement à constater la vérité, avec telle certitude que l'on voudra.

Or, ces trois lois fondamentales sont encore tout à fait inconnues des savants, et par conséquent des ingénieurs, par la raison que j'ai alléguée plus haut, celle de ce que, jusqu'à ce jour, le problème général du mouvement spontané des corps ne s'est pas encore révélé à la science. Elles étaient an moment inconnues complètement jusqu'à l'année 1836, c'est-à-dire, jusqu'à l'époque de la prise de mes brevets d'invention, dans lesquels ces lois furent produites pour la première fois. Et pour se convaincre que les présentes lois fondamentales n'ont rien de commun avec les formules empiriques que, par des expériences, toujours bornées, on a cherché à établir pour le mouvement

actuel sur les chemins de fer, il suffit de remarquer que l'élément caractéristique de ces trois lois est la quantité $(1 - \zeta)$ qui y entre et qui les arrête toutes à la susdite pente de 18 degrés, où ce mouvement cesse d'être possible; et certes, rien de ce qui concerne cette limite du mouvement n'entre dans les formules empiriques en question, puisque ni les savants, ni par conséquent les ingénieurs, n'ont encore aucune idée de cette limite du mouvement sur les chemins de fer. Aussi, est-ce proprement cette quantité caractéristique $(1 - \zeta)$, ou simplement la quantité ζ qui transforme le mouvement *inerte*, celui dont les lois sont connues dans la Mécanique rationnelle, en mouvement *spontané*, en celui dont les lois et même le problème sont demeurés inconnus jusqu'à ce jour. En effet, si dans nos présentes trois lois fondamentales (iii), (v), et (vii), on réduit à zéro cette influence caractéristique de la quantité ζ , c'est-à-dire, si l'on y fait $\zeta = 0$, ces trois lois deviennent manifestement de simples lois connues du mouvement *inerte* dont la Mécanique s'est occupée exclusivement jusqu'à ce jour; et par conséquent, avec cette influence de la quantité caractéristique ζ , ces lois connues du mouvement *inerte* se trouvent dénaturées ou du moins modifiées; et elles sont ainsi demeurées inconnues, non-seulement dans leur détermination contraire à celle des lois connues, mais, comme je viens de le dire, même dans leur problème. D'ailleurs, si ces lois présentes (iii), (v), et (vii) du mouvement *spontané* avaient été connues, du moins depuis l'année 1836 où je les ai produites, M. Arago qui aime tant à s'occuper des chemins de fer, les aurait certainement approfondies; et il n'aurait pas, le 3 juillet 1844, à la susdite séance de la Chambre des Députés, fait des reproches si mal fondés à l'administration des Pouts et Chaussées; et il n'y aurait pas surtout méconnu entièrement le mouvement *spontané* sur les chemins de fer actuels, en proposant de le remplacer par le mouvement *inerte* sur les chemins de fer atmosphériques (*).

Et ce qui en outre recommande à la Commission les expériences que je lui propose de faire, c'est que, comme je l'ai dit plus haut, cette honorable Commission offrira par là en même temps une grande utilité publique. En effet, après avoir ainsi constaté positivement la vérité de ces lois fondamentales qui régissent la locomotion actuelle sur les chemins de fer, elle donnera à cette nouvelle et si importante branche industrielle, nommément aux ingénieurs qui y président, les règles nécessaires pour la construction la plus convenable et pour l'exploitation la plus économique des chemins de fer; règles dont l'absence

(*) Puisque M. Arago, en sa qualité d'astronome, aime tant à s'occuper des choses terrestres, et parmi elles des chemins de fer, on devrait lui conseiller, pour l'empêcher de tomber à l'encre dans des bavardages pareils, de lire et d'approfondir les résultats comparés du voyage de l'ingénieur Zimpel, et surtout le livre récent d'Emile Berger, en se tenant d'ailleurs au courant des inventions par le Journal des chemins de fer, publié à Stuttgart, et rédigé par les célèbres ingénieurs Etzel et Klein.

actuelle exige des tâtonnements, des expériences incertaines, et amène ainsi souvent des résultats faux et dangereux. Aussi, lorsque la Commission aura ainsi établi publiquement la vérité des lois fondamentales que je viens de dévoiler, aurai-je peut-être le droit de la prier d'intervenir auprès du Ministre pour me faire avoir une juste récompense pour ce grand service public.

Mais, ce qui résultera principalement de ces expériences faites par la Commission, expériences qui constateront ainsi les faits que présente la dernière, N°. 3, des trois tables normales, par lesquelles se trouve fixée la valeur numérique de la réforme en question, c'est que, par la vérité de ces lois spéciales (iii), (v) et (vii) de la fausse locomotion actuelle sur les chemins de fer, on pourra conclure, avec une très-grande probabilité, à la vérité de toutes les autres lois que produit cette réforme de la locomotion, et qui, à leur tour, président aux faits majeurs et décisifs que présentent les deux premières tables normales N°. 1 et 2. La Commission sera donc fondée alors à proposer au Ministre, si elle le croit encore absolument nécessaire, de produire les frais pour la construction des nouvelles machines locomotives, propres à faire les expériences pour constater définitivement, dans le degré de perfection technique de ces machines, la vérité de toutes les lois nouvelles que propose la présente réforme scientifique de la locomotion. — Mais, jusque-là, pour les premières expériences dont je viens de signaler l'urgence, la Commission n'aura besoin que des machines dont on se sert actuellement sur les chemins de fer. Aussi, pour ne pas perdre le temps, et surtout pour éviter le susdit malentendu où la Commission me prenait pour un ingénieur-mécanicien, qui lui présente de nouvelles machines, dois-je la prier de me dispenser, avant qu'elle ait reconnu la vérité de mes nouvelles lois de la locomotion spontanée, au moins la vérité des trois lois présentes (iii), (v) et (vii), de lui parler des nouvelles machines locomotives qui, d'après ces lois, doivent réaliser la réforme scientifique que je propose, et par conséquent de me dispenser de lui faire voir les modèles d'étude et les expériences qui, uniquement pour moi, ont été faites avec ces modèles, afin de me conduire à la détermination la plus convenable de ces nouvelles machines locomotives.

Seulement, lorsque les premières expériences seront faites avec les machines actuelles sur les chemins de fer, et lorsque, après avoir ainsi reconnu la vérité des lois spéciales (iii), (v) et (vii) qui président à ces voies métalliques, on pourra suffisamment conclure à la vérité de toutes les autres lois de la locomotion spontanée, et par conséquent à la réalité positive de la présente réforme, seulement alors, dis-je, on pourra, *sans compromettre la vérité d'une si grave réforme*, s'occuper utilement de la fabrication ou de la construction matérielle des machines locomotives qui doivent réaliser cette réforme scientifique. Et alors seulement, dans le cas où les dessins et les descriptions qui sont produits dans les parties techniques de mes Mémoires, ne suffiraient pas pour

donner une idée complète de ces nouvelles machines, il pourrait être temps de prendre connaissance des modèles d'étude. Mais, alors même ces modèles délabrés ne doivent servir que pour constater les travaux préliminaires qui ont été faits pour arriver à la détermination définitive de ces nouvelles machines locomotives, et nullement pour faire des expériences propres à constater, plus ou moins exactement, la vérité des résultats que, d'après les lois en question, devront produire ces machines nouvelles; car, cette vérité, pour éviter tout compromis dans une affaire d'une si haute importance, sera déjà, ou plutôt devra déjà être constatée par la reconnaissance préalable et générale des lois qui président à tous ces procédés de la locomotion spontanée. Et cette reconnaissance générale de toutes les lois en question, quoiqu'elle se fasse d'après la règle logique *a particulari ad generale*, n'en sera pas moins suffisante ici, puisque, comme on le voit dans mes Mémoires, les présentes lois spéciales (m), (v) et (vi) des chemins de fer actuels, non-seulement sont déduites immédiatement des lois générales de la locomotion spontanée, mais elles forment en outre, parmi ces lois générales, un cas singulier et en quelque sorte transcendant, dont la deduction, fondée uniquement sur le cas général, suffit pour garantir la vérité de ces lois générales elles-mêmes.

Bien plus, en ne perdant pas de vue, d'après ce qui a été reconnu plus haut, que les expériences que l'on fera, non avec les modèles d'étude, mais avec les nouvelles machines elles-mêmes, lorsqu'elles existeront, ne devront servir qu'à constater le degré de la perfection technique de ces machines, en comparant leurs résultats avec le prototype de cette réforme scientifique, c'est-à-dire, avec les résultats fixés dans les trois tables normales N°. 1, 2 et 3, on comprendra que si, en renversant la question, on voulait se servir de pareilles expériences pour constater la vérité de notre prototype de la réforme dont il s'agit, c'est-à-dire, la vérité de nos trois tables normales, et par conséquent des nouvelles lois dont ces tables présentent les résultats numériques, on dénaturerait complètement cette question de la réforme, parce que les résultats de ces expériences, pourvu qu'ils se trouvent supérieurs à ceux que l'on obtient aujourd'hui sur les chemins de fer, pourraient subsister indépendamment du prototype en question. Et alors les nouvelles machines par lesquelles on aurait obtenu ces résultats supérieurs, en devenant uniquement propres à perfectionner les chemins de fer actuels, rendraient inutile cette réforme même dont elles devaient constater la vérité, et dont l'objet principal est précisément la condamnation des chemins de fer actuels. Il faut donc nécessairement, pour ne pas laisser égarer ainsi cette grande et urgente réforme de la locomotion, et avec elle la condamnation de la fausse locomotion sur les chemins de fer existants, il faut, dis-je, établir, d'une manière immédiate, la vérité de cette réforme, c'est-à-dire, la vérité des nouvelles lois de la locomotion spontanée, sur lesquelles se fonde cette grande réforme. Et c'est pour cela que je prends la liberté de proposer à la

Commission, puisqu'elle décline l'examen théorique de ces lois nouvelles, les expériences propres à constater immédiatement la vérité de ces lois elles-mêmes, c'est-à-dire, indépendamment de leur réalisation technique par de nouvelles machines locomotives, quelque parfaites qu'elles puissent être. Ce n'est, en effet, que par de telles expériences que cette honorable Commission, en parvenant ainsi à reconnaître immédiatement la vérité des nouvelles lois de la locomotion spontanée, au moins directement la vérité des susdites lois spéciales (iii), (v) et (vu) de la locomotion que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer, dont elle pourra facilement induire la vérité de toutes les autres de ces lois nouvelles, ce n'est, dis-je, que par de telles expériences que cette honorable Commission pourra reconnaître en même temps, comme un corollaire inévitable de ces lois, les protestations scientifiques qu'à plusieurs reprises j'ai faites publiquement contre les chemins de fer, tels qu'ils sont aujourd'hui, en déclarant, d'abord, dans une pétition aux Chambres législatives de France, la *barbarie* de ces actuels chemins métalliques, et ensuite, dans la conclusion de mon deuxième Mémoire, dans cette susdite conclusion qui a été communiquée au Ministre des travaux publics, les conditions graves, savoir, la *profonde ignorance* ou la *profonde immoralité*, sous lesquelles seules on pourrait aujourd'hui, lorsque la vérité est connue, persister dans la construction et dans l'exploitation de ces barbares et fausses voies métalliques. Et vous concevrez facilement, Monsieur, que, sans fausser la vérité, je ne pourrais aujourd'hui rétracter ces protestations publiques.

D'ailleurs, de cette vraie manière de considérer la question résulte l'avantage immense de se que, sans porter atteinte à la vérité générale de cette réforme de la locomotion, qui condamne les chemins de fer actuels, on peut porter un remède décisif à ces fausses voies métalliques, par une espèce de *TRANSITION* des mauvais résultats qu'on obtient aujourd'hui, et qui sont fixés dans la dernière, N°. 3, de nos trois tables normales, aux résultats majeurs qui sont l'objet final de la présente réforme scientifique, et qui sont fixés dans les deux premières, N°. 1 et 2, de ces trois tables normales. En effet, dans l'ensemble total des lois qui président à la présente réforme de la locomotion, c'est-à-dire, dans l'ensemble des lois qui régissent le mouvement spontané des chars, il doit s'en trouver qui sont purement *élémentaires*, et qui, par leur combinaison, servent à établir les lois *systématiques*; et l'on conçoit que, dans l'accomplissement de la présente réforme, tel qu'il est fixé dans les deux premières, N°. 1 et 2, de nos trois tables normales, ce sont les lois systématiques qui conduisent à cette perfection finale. En faisant donc provisoirement abstraction de cette dernière perfection dans la locomotion spontanée, qui se réalise par la *route-accomplie* et par la *route-phorogénique*, on peut faire valoir utilement l'application des lois élémentaires, qui, à la vérité, conduisent à une perfection moins grande, mais qui établissent déjà la *véritable locomotion spontanée*, laquelle

peut, à son tour, être réalisée par deux machines éminemment simples, la *roue à rails mobiles* et la *locomotive à traction-propre*, qui sont les objets respectifs des deux premiers de mes trois Mémoires définitifs. On peut donc, pour sauver les chemins de fer actuels, avant de procéder à la dernière perfection qui est indiquée dans les deux premières de nos trois tables normales, et qui, en rendant inutiles ces faux chemins de fer actuels, causerait la ruine des énormes capitaux engloutis dans ces fausses entreprises, on peut, dis-je, avant de procéder à la perfection finale, N^o. 1 et 2, pratiquer provisoirement, sur les chemins de fer existants, cette vraie locomotion spontanée qui, par l'application des seules lois élémentaires, se réalise déjà par les deux machines simples que je viens de nommer, savoir, la roue à rails mobiles et la locomotive à traction-propre, en considérant ainsi ce premier établissement de la vraie locomotion spontanée comme une *transition* de la fausse locomotion que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer, à cette définitive et accomplie locomotion spontanée qui, conformément aux deux premières de nos trois tables normales, est le grand et final objet de la présente réforme scientifique; transition salutaire que nous nommerons *LOCOMOTION ÉLÉMENTAIRE*.

Ce n'est aussi que de cette transition ou locomotion élémentaire, seule indispensable dans ce moment pour le salut des chemins de fer, que j'offrais d'abord de céder la propriété dans ma pétition (du 15 août 1843) à S. E. le Ministre, sur laquelle a été nommée la Commission; de sorte que, légalement parlant, cette honorable Commission n'a ni ne peut avoir d'autre mission que celle d'examiner la valeur de cette décisive transition ou locomotion élémentaire, qui seule peut empêcher l'inévitable ruine des chemins de fer actuels. Et comme je viens de le prouver, la Commission, en déclinant l'examen théorique, ne peut le faire, d'une manière décisive, que par le moyen des expériences que j'ai pris la liberté de lui indiquer, pour constater, d'abord immédiatement, la vérité des présentes lois nouvelles (III), (V), et (VII) des chemins de fer existants, et ensuite médiatement, par une induction suffisante, la vérité de toutes les lois en général de la locomotion spontanée des chars.

Pour se bien convaincre de cette mission exclusive, je dois prier les honorables membres de la Commission de relire attentivement le Mémoire manuscrit que j'ai nommé plus haut *Mémoire préliminaire*, et qui, ayant été joint à ma susdite pétition (du 15 août 1843) au Ministre pour la demande d'une Commission, et formant ainsi le *programme* de ma pétition, établit nécessairement les véritables et uniques conditions de la charge qui, pour l'objet de ma pétition, se trouve attribuée à la Commission des Ponts et Chaussées. — Or, dans ce Mémoire préliminaire de 1843, Messieurs les Commissaires verront deux classes progressives de problèmes et de résultats correspondant à la solution de ces problèmes de locomotion, savoir : 1^o.) les problèmes élémen-

taires et leurs résultats provisoires, et 2^e.) les problèmes systématiques et leurs résultats définitifs; et ils y verront très-expressément, à la fin de ce Mémoire, que je ne dois procéder à la seconde classe de ces problèmes que lorsque les résultats de la première classe seront réalisés et établis positivement sur le sol. Et il est sans doute inutile d'ajouter ici que cette première classe de résultats, constituant les résultats provisoires, forme précisément ce premier établissement de la vraie locomotion spontanée qui, d'après les seules lois élémentaires de la nouvelle théorie, se réalise par les deux susdites machines élémentaires, la roue à rails-mobiles et la locomotive à traction-propre; tandis que la seconde classe de ces résultats, constituant les résultats définitifs, que je ne dois produire qu'après les premiers, forme précisément aussi cet accomplissement de la vraie locomotion spontanée qui, d'après les lois systématiques de la nouvelle théorie, se réalise par les deux susdites machines systématiques, la roue-accomplie et la roue phorogénique. — D'ailleurs, dans l'introduction au dernier de mes trois Mémoires définitifs, ces deux classes de résultats, et les machines correspondantes par lesquelles ils doivent être réalisés, se trouvent ainsi fixés positivement.

Il s'ensuit que la véritable et même exclusive mission qui est en quelque sorte légalement attribuée à l'honorable Commission dont vous êtes, Monsieur, le rapporteur éclairé, consiste, comme je l'ai caractérisée plus haut, dans l'examen de cette susdite transition ou locomotion élémentaire par laquelle, pour sauver les chemins de fer de leur inévitable ruine, doit être opéré, sur ces voies métalliques existantes, le premier établissement de la vraie locomotion spontanée, telle qu'elle résulte d'abord de l'application des lois élémentaires qui font l'objet des deux premiers de mes Mémoires définitifs, et telle, par conséquent, qu'elle peut déjà être réalisée par les deux susdites machines simples, la roue à rails-mobiles et la locomotive à traction-propre, par ces machines élémentaires qui sont décrites et déterminées, d'après leurs règles techniques, dans ces mêmes deux premiers de mes Mémoires.

Bien plus, dans le Mémoire préliminaire sur lequel a été nommée la Commission, et qui est ainsi le véritable programme des fonctions de cette honorable Commission, se trouvent trois tables qui présentent les valeurs numériques des lois élémentaires, et de leurs correspondants résultats provisoires dont il s'agit dans la susdite transition en question, c'est-à-dire, dans ce premier établissement de la vraie locomotion spontanée sur les chemins de fer, qui est ainsi soumise exclusivement à l'examen de la Commission. Ce sont donc ces trois tables numériques qui doivent exclusivement lui servir de terme de comparaison pour cet examen; et c'est pour cela que je dois les reproduire ici, afin de les rappeler à son attention éclairée.

J'agrandirai même les engagements que je prends par ces trois tables numériques, en substituant, à la place de la première de ces tables, de celle qui concerne la locomotion inerte par la roue à rails-mobiles, et qui ne s'applique

qu'aux routes ordinaires, la table générale qui embrasse cette locomotion inerte, tout à la fois, et sur les routes ordinaires et sur les chemins de fer, sur lesquels derniers elle s'exerce dans les wagons qui reçoivent leur impulsion extérieure au mouvement par la traction de la locomotive. — Cette table générale résulte de la formule (142), qui, dans le dernier de mes trois Mémoires définitifs, a servi pour calculer la table (145), constituant la première de nos susdites trois tables normales N^o. 1, 2, et 3, celle qui indique la réduction définitive du tirage par la roue-accomplie. En effet, au lieu de prendre pour le rapport $\frac{N}{M}$ qui entre dans la formule (142), la quantité $\frac{1}{10}$, comme il l'est dans la roue-accomplie, dont je n'ai encore fait connaître que le simple tracé géométrique, si l'on prend, pour ce rapport, la quantité $\frac{3}{20}$, qui en est la limite extrême dans la roue à rails-mobiles, cette formule (142) servira à déterminer la réduction du tirage dans cette roue élémentaire, en tenant compte de l'influence de la gravitation du char, comme force de *PASSION CONTINUE*, pour augmenter le mouvement. Ainsi, en admettant de nouveau les valeurs (144), qui répondent à l'absence de toute perfection, on obtiendra, par la formule (142), les résultats le moins favorables, et par conséquent tout à fait certains, pour la réduction totale du tirage par la roue à rails-mobiles, par cette roue élémentaire qu'il s'agit d'abord d'introduire, non-seulement sur les routes ordinaires, mais même sur les chemins de fer, en y appliquant ces roues aux wagons. Nous aurons donc, à la place de la table qui, sous le N^o. 1, se trouve dans le Mémoire préliminaire pour la réduction du tirage des chars par la roue à rails-mobiles, la table, tout à la fois, et plus parfaite et beaucoup plus avantageuse, que voici.

TABLE PROVISOIRE N^o. 1.

Limites extrêmes de la réduction du tirage des chars, opérée par la roue à rails-mobiles.

VOIES DE LOCOMOTION.		RÉDUCTION POUR LES DIFFÉRENTES VITESSES.	
Spécification.	Tangente de la pente.	Pour les plus petites.	Pour les plus grandes.
Chemins de fer.	Voie horizontale.	0,2505.	0,2580
	La plus grande pente des routes royales.	0,050.	0,3190
Routes ordinaires.	Voie horizontale.	0,2505.	0,4020
	La plus grande pente des routes royales.	0,050.	0,3945.

Telle est donc la réduction du tirage des chars qui est opérée par la roue à rails-mobiles, même dans l'état où cette roue élémentaire serait privée de toute perfection, matérielle et technique. — On voit ainsi que, sur les routes ordinaires, cette réduction moyenne du tirage sera moindre que $\frac{1}{3}$, pour les plus petites vitesses, et n'excèdera pas $\frac{3}{5}$ pour les plus grandes vitesses, qui au reste n'y seraient guère praticables. Et sur les chemins de fer, dont il s'agit ici principalement, cette réduction moyenne du tirage des waggons, en leur appliquant la roue à rails-mobiles, serait un peu plus grande que $\frac{1}{4}$, pour les plus petites vitesses, et n'excéderait guère $\frac{1}{2}$ pour les plus grandes vitesses (*).

Je n'ai pas besoin de prier Messieurs les membres de la Commission de remarquer combien grande est déjà l'importance de cette réduction du tirage des chars, non-seulement sur les chemins de fer, auxquels nous allons positivement l'appliquer ci-après, mais de plus sur les routes ordinaires. D'ailleurs, tous ces grands avantages sont déjà signalés dans le *Mémoire préliminaire*, où Messieurs les Commissaires peuvent en prendre connaissance. — Je procéderai donc à reproduire également les deux autres tables qui, dans ce *Mémoire préliminaire*, ont été présentées au Ministre, pour la comparaison de la fausse avec la vraie locomotion spontanée, et qui forment ainsi la détermination ultérieure, et tout aussi précise ou numérique du programme du but de la Commission. Je vais même reproduire ici littéralement tout ce qui, dans le *Mémoire* présenté au Ministre, concerne ces grands résultats, afin de rappeler à la Commission, tout à la fois, et la nature précise de ses fonctions, et la haute importance de sa mission. — Voici donc, successivement, dans les deux tables ultérieures, la détermination de ces résultats de la vraie locomotion spontanée, opérée par le procédé nouveau de la traction-propre des chars.

TABLE PROVISOIRE N°. 2.

Locomotion spontanée ou par impulsion intérieure.

CHEMINS DE FER.

Comparaison de la fausse locomotion, pratiquée par routine, avec la vraie lo-

(*) Ainsi, l'événement qui vient d'être fait en Autriche, par le capitaine F. Fraissinet, instituteur des fils de l'archiduc Charles, consistant à transmettre aux waggons une force locomotrice, pareille à celle de la locomotive elle-même, devient instantanément inutile, d'autant plus qu'elle ne saurait nullement, sans la dépense d'une force correspondante, éliminer le tirage des waggons, comme le fait notre roue à rails-mobiles.

comotion, proposée par la science, l'une et l'autre de ces locomotions spontanées étant opérées à l'aide des roues simples ou connues.

Nota. — La vitesse du mouvement, adoptée ici comme vitesse normale, est la vitesse produite par la gravitation à la surface de la terre, savoir, 9^m,80896 par seconde, c'est-à-dire, 8 lieues et 3312 mètres, ou à peu près 9 lieues à l'heure, la lieue étant de 4000 mètres. — Et le poids de la charge totale, adoptée ici comme poids normal, est de 50,000 kilogrammes.

VOIES DIVERSES.		LOCOMOTION SPONTANÉE,				RÉDUCTION opérée par la vraie locomotion spontanée.	
OSCILLATION.	PENTES.	faux ; par la seule rotation des roues.		vrai ; par la traction-propre des chars.			
		Angle de leur inclinaison.	Tangente de cet angle.	Force motrice estimée en nombre de chevaux.	Force motrice estimée en rendement des roues.	Force motrice estimée en rendement des roues.	Rendement de la force motrice.
Voie horizontale	0°, 0'	0,000	46,4	3,000	37,0	1,000	1,000
Limite actuelle des chemins de fer	0,17	0,005	77,0	1,065	64,0	1,035	0,975
Pente moyenne des routes ordinaires . . .	0,34	0,010	136,5	1,135	55,5	1,070	0,950
Maximum de pente.	Nouvelles routes de France . . .	3,53	0,050	475,5	1,717	339,5	1,375
	Anciennes routes de France . . .	5,43	0,100	1096,0	3,747	480,0	1,236
Limite de la marche des chevaux	11,10	0,200	5738,4	7,304	1181,5	3,086	0,236
Limite de la fausse locomotion spontanée.	18,10	0,308	Infinie.	Infinie.	3937,0	6,300	0,000

La première détermination remarquable et utile que présente cette table, c'est, sans contredit, la limite de 18°, 10' pour l'inclinaison des pentes, limite à laquelle tout mouvement devient impossible par le faux procédé de la locomotion spontanée, c'est-à-dire, par le procédé de routine que l'on pratique encore en opérant le mouvement par la simple rotation des roues. On voit, dans cette même table, qu'à cette limite absolue des pentes pour la fausse locomotion spontanée, le mouvement est encore praticable réellement par le procédé de la vraie locomotion spontanée, c'est-à-dire, par le procédé de la traction-propre des chars. A la vérité, il n'existe pas, à la surface de notre globe, de pentes que l'on ait à franchir, et qui aient cette extrême inclinaison de 18°, 10' ; mais, par cette limite tellement resserrée qui, jusqu'à ce jour, est demeurée incon-

ue aux ingénieurs, et même aux savants, se trouve fixé et caractérisé le progrès rapide dans l'augmentation de la force motrice qu'exige l'ascension des chars sur toutes les inclinaisons inférieures, même sur celles où l'on opère déjà aujourd'hui le mouvement des chars à l'aide des chemins de fer. Aussi, comme on le voit dans cette table N°. 2, le progrès de l'augmentation de la force motrice pour l'ascension des pentes par le procédé de la vraie locomotion spontanée, dont la limite extrême est plus reculée, est bien moins rapide; de sorte que, sur les pentes où se trouve la limite de la marche des chevaux, l'augmentation de la force motrice qui est nécessaire sur la voie horizontale, n'exige que cinquante fois plus de force par notre procédé scientifique de la vraie locomotion, tandis qu'elle exige cent fois plus de force par le procédé de la fausse locomotion spontanée, que l'on pratique actuellement par routine.

Une deuxième détermination remarquable et éminemment utile que présente cette table N°. 2, c'est la réduction générale et très-grande de la force motrice qui est opérée par le procédé scientifique de la vraie locomotion spontanée. En effet, on voit, dans cette table, que, par suite de cette réduction, la force motrice dont on a besoin pour opérer le mouvement, par notre procédé scientifique, n'est généralement, pour la voie horizontale et pour toutes les pentes praticables, qu'à peu près la moitié de la force motrice qu'il faut et qu'il faudrait employer pour opérer le même mouvement par le procédé de routine dont on se sert actuellement. Bien plus, sur des pentes plus élevées, comme le sont celles des anciennes routes royales de France, cette réduction de la force motrice serait à peu près $\frac{2}{5}$; et elle irait jusqu'à $\frac{1}{3}$ sur les pentes extrêmes

qui forment la limite de la marche des chevaux. — En outre de l'avantage que présente évidemment cette grande réduction de la force motrice par l'introduction de la vraie locomotion spontanée sur les chemins de fer, un avantage, non moins grand, qui résulte encore de cette même réduction de la force motrice, consiste en ce que, par les moyens dont on se sert aujourd'hui sur ces voies-métalliques, on pourra opérer l'ascension des chars sur des pentes deux fois plus élevées que celles qui forment actuellement la limite de l'inclinaison des chemins de fer, c'est-à-dire, que l'on pourra monter des pentes ayant une inclinaison de 34' ou une élévation de 1 sur 100 mètres, tandis que la limite actuelle des pentes de ces voies métalliques n'a qu'une inclinaison de 17' ou une élévation de 1 sur 200 mètres. En effet, on voit, dans la table présente, que la force motrice qui, par notre procédé scientifique de la vraie locomotion spontanée, serait nécessaire pour opérer l'ascension des chars sur de telles pentes extrêmes de 1 sur 100 mètres d'élévation, ne formerait même qu'à peu près les $\frac{10}{13}$ de la force motrice qui est aujourd'hui nécessaire pour opérer, par le procédé de routine de la fausse locomotion spontanée, l'ascension des chars sur la limite actuelle des pentes de 1 sur 200 mètres d'élévation.

On conçoit par là quel immense avantage il en résulterait pour la construction des chemins de fer, lorsqu'on pourrait ainsi, sans augmenter en rien les forces dont on dispose aujourd'hui, porter les pentes de ces voies métalliques au double de leur élévation actuelle.

Une troisième détermination, aussi importante que remarquable, qui est encore indiquée dans la présente table N°. 2, c'est la réduction de la force réactive, de celle qui, d'après ce que nous avons reconnu plus haut, se manifeste par le riflement des roues de la locomotive, et cause ainsi, en outre de la diminution de l'effet utile, un ébranlement continu des appareils locomoteurs. En effet, comme on le voit dans cette table, sur les pentes extrêmes qui forment la limite de la marche des chevaux, cette réduction de la force réactive ou du riflement des roues est près de $\frac{3}{7}$, c'est-à-dire que, dans notre système scienti-

fique de traction-propre, la vitesse totale de la rotation des roues sur ces pentes extrêmes ne serait que trois fois plus grande que la vitesse partielle et utile de la translation du char, tandis que, dans le système de routine que l'on pratique aujourd'hui, la même vitesse totale de la rotation des roues sur ces pentes extrêmes serait sept fois plus grande que la vitesse partielle et utile de la translation du char. Et le progrès de cette réduction de la force réactive sur des pentes moins élevées est assez rapide pour devenir sensible immédiatement, comme on le voit dans la même table N°. 2. Ainsi, par exemple, sur la pente ayant le double de l'élévation de celle qui forme aujourd'hui la limite pour l'élévation des pentes des chemins de fer, c'est-à-dire, sur la pente de 1 sur 100 mètres d'élévation, la force réactive ou le riflement des roues, dans notre système scientifique de traction-propre, est à peu près égal à la force réactive ou au riflement des roues qui, dans le système de routine que l'on pratique actuellement, a lieu sur la pente moitié moins élevée, c'est-à-dire, sur la pente de 1 sur 200 mètres d'élévation, qui est aujourd'hui la limite raisonnable pour l'élévation des pentes des chemins de fer. Il s'ensuit que, même par la considération de l'étendue de ce riflement des roues ou de cette force réactive du locomoteur, on pourra, avec les mêmes moyens dont on dispose actuellement et sous les mêmes conditions sous lesquelles on opère aujourd'hui le mouvement des chars sur les chemins de fer, en se servant du procédé de routine de la simple rotation des roues, donner dorénavant une élévation double à la limite de l'élévation des pentes de ces voies métalliques, lorsqu'on se servira de notre procédé scientifique de la traction-propre. Et comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut, les avantages de cette extension des pentes dans la construction des chemins de fer, seraient incalculables. — Nous devons encore prévenir ici que, pour calculer la force réactive ou le riflement des roues qui est indiqué dans la présente table N°. 2, nous avons admis que le poids des waggonnets forme les trois quarts du poids total de l'équipage, admission dont la valeur est notoirement exagérée; de sorte que, pour un moindre poids des

wagons, ce riflement des roues ou cette force réactive du locomoteur serait encore plus petite, lorsque, d'ailleurs, le mouvement existerait réellement.

Voici maintenant la table qui réunit les résultats pareils du mouvement des chars sur les routes ordinaires, en y distinguant de même ce mouvement opéré par notre système scientifique de la vraie locomotion spontanée, de celui qui est ou qui pourrait être opéré par le système de routine de la fausse locomotion, par ce système grossier, pour ne pas dire barbare, qui, seul, est connu aujourd'hui.

TABLE PROVISOIRE N°. 3.

Locomotion spontanée ou par impulsion intérieure.

ROUTES ORDINAIRES.

Comparaison de la fausse locomotion, pratiquée par routine, avec la vraie locomotion, proposée par la science, l'une et l'autre de ces locomotions spontanées étant opérées à l'aide des roues simples ou connues.

NOTA. — La vitesse du mouvement adoptée ici comme vitesse normale est, comme dans la table précédente, de 9^m,80896 par seconde, ou à peu près de 9 lieues à l'heure, la lieue étant de 4000 mètres. — Et le poids de la charge totale, adopté ici comme poids normal, est seulement de 10,000 kilogrammes.

VOIES DIVERSES.			LOCOMOTION SPONTANÉE.				RÉDUCTION opérée par la vraie locomotion spontanée.	
SPÉCIFICATION.	PENTES.		fausse : par la seule rotation des roues.		vraie : par la traction-propre des chars.		Force réactive estimée en riflement des roues.	Réduction de la force réactive.
	Angle de leur inclinaison.	Tangente de cet angle.	Force motrice estimée en riflement des roues.	Force réactive estimée en riflement des roues.	Force motrice estimée en nombre de chevaux.	Force réactive estimée en riflement des roues.		
Voie horizontale.	0°, 0'	0,000	46,4	1,000	91,0	1,000	0,520	1,000
Limite actuelle des chemins de fer. . .	0,17	0,005	48,4	1,050	95,0	1,058	0,516	0,978
Pente moyenne des routes ordinaires. .	0,34	0,010	56,7	1,101	99,1	1,058	0,511	0,958
Maximum de pente.								
Nouvelles routes de France. . .	0,50	0,050	131,0	1,580	64,7	1,503	0,480	0,816
Anciennes routes de France. . .	0,543	0,100	974,0	8,644	128,3	1,674	0,430	0,686
Limite de la marche des chevaux. . . .	11,19	0,300	999,7	6,571	101,3	1,585	0,581	0,389
Limite de la fausse locomotion spontanée.	17,1	0,306	Infinité.	Infinité.	588,7	4,977	0,000	0,000

On voit, dans cette table N°. 3, que les avantages de la nouvelle locomotion, proposée par la science, sont, sur les routes ordinaires, aussi grands, sinon plus grands encore que ceux que nous avons reconnus plus haut, dans la table N°. 2, pour les chemins de fer; et cela, dans toutes les déterminations spéciales où nous avons examiné ces avantages.

Ainsi, pour ce qui concerne la première de ces déterminations, la présente limite de 17°, 1' pour l'inclinaison des pentes, limite à laquelle le mouvement des chariots devient impossible, sur les routes ordinaires, par le procédé de routine de la fausse locomotion spontanée, indique également, pour ces routes ordinaires, un progrès rapide dans l'augmentation de la force motrice qu'exige l'ascension des pentes sur ces routes, comparativement au progrès correspondant dans le système scientifique de la locomotion spontanée, où la limite des pentes possibles est plus reculée. — En effet, à la pente où cesse la marche des chevaux, la force motrice qu'exige l'ascension, est, par le procédé de la fausse locomotion, 23 fois plus grande que celle qui suffit pour le mouvement sur la voie horizontale, tandis que, par notre procédé de la vraie locomotion, cette force motrice qu'exige l'ascension sur la même pente, n'est que 12 fois plus grande que celle qui suffit sur la voie horizontale.

Pour ce qui concerne la seconde détermination, celle qui précise la réduction générale de la force motrice, telle qu'elle est opérée par l'application de notre procédé scientifique de traction-propre, la présente table N°. 3 montre que cette réduction est aussi grande pour les routes ordinaires qu'elle l'est pour les chemins de fer. En effet, on voit dans cette table que, par suite de cette réduction, la force motrice qui est nécessaire pour opérer, sur la voie horizontale et sur toutes les pentes praticables, le mouvement des chariots par le procédé de la vraie locomotion spontanée, n'est aussi qu'à peu près la moitié de la force motrice qu'il faudrait employer pour opérer le même mouvement par le procédé de la fausse locomotion dont on se sert actuellement.

Enfin, pour ce qui concerne la troisième détermination, celle qui indique la réduction de la force réactive ou du frottement des roues du remorqueur, on voit encore, dans la présente table N°. 3, que cette réduction, opérée par notre procédé scientifique de la traction-propre, est tout aussi grande sur les routes ordinaires qu'elle l'est sur les chemins de fer, d'après ce que nous avons reconnu plus haut par l'examen de la table N°. 2. — Toutefois, nous devons prévenir que cette réduction de la force réactive ou du frottement des roues du remorqueur a été calculée ici sur la supposition que le poids des waggonnets forme les deux tiers du poids total de l'équipage, supposition dont la valeur est également exagérée pour les routes ordinaires.

Maïs, l'avantage essentiel et décisif qui résulte pour les routes ordinaires, de la comparaison de la présente table N°. 3, concernant ces routes ordinaires, avec la susdite table N°. 2, concernant les chemins de fer, c'est que le mou-

vement des chars sur les routes ordinaires, pour la locomotion spontanée, devient réellement praticable avec notre procédé scientifique de cette locomotion, c'est-à-dire, avec notre système de traction-propre. En effet, on conclut, de cette comparaison des deux tables, qu'avec les moyens dont on se sert aujourd'hui sur les chemins de fer, dans la limite actuelle de l'élévation de leurs pentes, on peut, avec notre système scientifique de traction-propre, opérer, en toute réalité, le mouvement des chars sur les routes ordinaires, dans toutes leurs pentes, jusqu'au maximum des pentes des nouvelles routes royales de France, c'est-à-dire, jusqu'à la pente de 1 sur 20 mètres d'élévation.

Ce résultat, que nous obtenons déjà par la solution de nos deux premiers problèmes concernant la réforme de la locomotion, c'est-à-dire, par les nouvelles machines locomotives dont les principes sont déjà constatés légalement par des brevets d'invention, ce résultat, disons-nous, consistant dans le mouvement réel et praticable des chars sur les routes ordinaires, par notre système scientifique de la traction-propre, est, ce nous semble, de la plus haute importance. — Sans doute, dans l'état provisoire où se trouve encore ce résultat majeur, en tant que la solution qu'il offre, ne s'étend pas encore aux deux problèmes définitifs que nous avons posés plus haut, comme ayant été conçus en dernier lieu, cette nouvelle locomotion spontanée sur les routes ordinaires ne saurait encore remplacer, dans tous ses avantages, la locomotion que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer, puisqu'elle est encore soumise, comme cette dernière, à la condition inerte d'exiger l'élévation immédiate du poids entier des chars sur toutes les pentes. Mais, avec les conditions favorables que présente déjà cette nouvelle locomotion spontanée sur les routes ordinaires, conditions que nous venons de découvrir et de fixer par des chiffres incontestables, elle peut déjà offrir un puissant auxiliaire à la locomotion pareille sur les chemins de fer. En effet, il devient ainsi évident qu'il suffira maintenant de construire, dans chaque pays, un petit nombre de grandes lignes de fer, qui, comme lignes fondamentales, serviront à lier les points principaux et extrêmes de ce pays, et de compléter, dans toutes les autres directions, même les plus détaillées, cette locomotion principale ou fondamentale sur les lignes métalliques par la nouvelle locomotion spontanée sur les routes ordinaires, que la science découvre et peut réaliser dès aujourd'hui.

Ainsi, par exemple, en France, pour satisfaire à toutes les justes exigences locales, qui ont si vivement influé sur la production et sur la modification de la dernière loi concernant le vaste système des chemins de fer que l'on se propose de construire dans ce pays, nous pensons que la combinaison scientifique que nous venons de signaler, peut seule remplir toutes les conditions désirables, en réunissant à l'utilité publique et générale de la France, dans toutes ses localités, des moyens économiques, et même très-peu dispendieux, que ce riche pays, nonobstant d'autres exigences financières, pourra fournir

réellement et dans tous les temps; de sorte que cette œuvre immense de rapides communications dans ce vaste pays pourra ainsi être promptement réalisée et accomplie inmanquablement. — Nous disons que la combinaison scientifique que nous venons de fixer par des chiffres positifs, peut seule, dans l'état actuel de la locomotion spontanée, conduire à l'accomplissement réel et utile du vaste système de chemins de fer que la législation a projeté pour la France; et nous y ajouterons que, par la connaissance approfondie que nous avons de cet état actuel de la locomotion spontanée dans tous les pays, nous pouvons affirmer que, même indépendamment de chances défavorables et très-probables, la France ne pourra réaliser ce vaste projet, pas même dans une étendue suffisante aux besoins commerciaux et stratégiques de ce pays. — Déjà on vient de reconnaître que les évaluations pécuniaires qui ont servi de base à la confection de la loi, ont été déterminées de beaucoup au-dessous de la valeur réelle. Ainsi, on reconnaît déjà aujourd'hui que le coût moyen d'un kilomètre de chemin de fer sera de 400,000 francs; et l'on peut juger par là s'il est possible, sous des conditions aussi dispendieuses que précaires, d'exécuter actuellement en France, dans un temps donné et suffisant pour de si vastes travaux, un système accompli et général de chemins de fer, qui puisse être réellement utile à ce pays, sans nuire surtout et très-gravement à toutes les autres branches de l'industrie nationale.

Il faut remarquer, comme nous l'avons déjà dit, que la combinaison scientifique que nous venons de proposer à la France, et qui, dès aujourd'hui, se présente pour l'amélioration générale et très-considérable de l'état actuel de la locomotion spontanée sur les chemins de fer dans tous les pays, amélioration qui, jointe à la réduction à la moitié des forces motrices nécessaires à l'élévation au double de la limite des pentes de ces voies métalliques, forme le fruit que, déjà aujourd'hui, même dans ses résultats purement provisoires, offre notre présente réforme scientifique de la locomotion terrestre, il faut remarquer, disons-nous encore expressément, que tous ces grands résultats se trouvent ici fixés par des chiffres incontestables. Et, ce qui est plus décisif, c'est que tous ces résultats, concernant notre nouvelle locomotion spontanée, ont été calculés indépendamment des avantages nouveaux et assez considérables que présentent déjà nos roues à rails-mobiles dans leur actuel état provisoire, de ces avantages positifs qui sont également fixés, par des chiffres incontestables, dans notre susdite table provisoire N°. 1. En effet, les résultats numériques qui sont présentés dans les tables provisoires N°. 2 et N°. 3, concernant la locomotion spontanée, sont calculés pour le cas indépendant où l'on ne se servirait encore, pour opérer cette locomotion, que des roues simples ou connues, c'est-à-dire, sans employer encore, pour cette locomotion spontanée, nos nouvelles roues à rails-mobiles qui, d'après ce que nous avons reconnu plus haut, ont pour objet de diminuer le tirage des chars, et qui, suivant la table N°. 1, le diminuent

déjà effectivement jusqu'au tiers sur la voie horizontale. On conçoit ainsi que, si l'on applique aux wagons ces nouvelles roues à rails-mobiles à la place de leurs roues ordinaires, ce qui ne peut nullement changer les conditions de notre nouvelle locomotion spontanée par la traction-propre, laquelle ne s'applique qu'au seul remorqueur, on diminuera considérablement le tirage de l'équipage entier; et cette diminution du tirage offrira ainsi des conditions encore plus favorables pour l'application réelle et générale de notre système scientifique de la locomotion spontanée par la traction-propre des chars.

Pour calculer l'influence probable qu'exercera, sur les valeurs numériques de nos présentes tables provisoires N°. 2 et N°. 3, l'application aux wagons de nos roues à rails-mobiles, désignons par p le poids du remorqueur, et par q celui des wagons, et désignons, de plus, par r la réduction du tirage qui, sur une pente quelconque, est opérée par nos roues à rails-mobiles; et nous aurons évidemment, pour le facteur x par lequel il faut multiplier les forces motrices qui, destinées à opérer la vraie locomotion spontanée, sont indiquées dans nos tables provisoires N°. 2 et N°. 3, l'expression générale :

$$x = \frac{p + q \cdot r}{p + q}.$$

Et le produit de cette multiplication fera connaître la force motrice réduite qui, quoique diminuée ainsi considérablement, suffira alors pour opérer notre nouvelle et véritable locomotion spontanée. — Or, d'après ce que nous avons fait savoir, plus haut, nous avons, pour la table N°. 2, concernant les chemins de fer, les valeurs :

$$\frac{q}{p + q} = \frac{3}{4}, \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{p}{p + q} = \frac{1}{4};$$

et pour la table N°. 3, concernant les routes ordinaires, les valeurs :

$$\frac{q}{p + q} = \frac{2}{3}, \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{p}{p + q} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, en distinguant respectivement, pour chacune de ces deux tables provisoires N°. 2 et N°. 3, par x_2 et par x_3 le facteur général x , nous aurons, pour ces facteurs de réduction, les expressions particulières :

$$x_2 = \frac{1 + 3r}{4}, \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{1 + 2r}{3};$$

où il ne restera à connaître que la réduction r du tirage, opérée par nos roues à rails-mobiles, réduction dont la valeur numérique, pour les diverses pentes, se trouve précisément donnée dans notre susdite table provisoire N°. 1.

— Par exemple, pour la voie horizontale, on voit, dans cette table N°. 1, que l'on a la valeur $r = \frac{1}{3}$, qui, étant introduite dans les présentes expressions particulières des facteurs x_2 et x_3 , donnera, pour ces facteurs de la réduction des forces motrices, les valeurs :

$$x_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{5}{9};$$

c'est-à-dire que, sur la voie horizontale, la moitié de la force motrice qui est indiquée dans la table N°. 2, et les $\frac{5}{9}$ de la force motrice qui est indiquée dans la table N°. 3, suffiront respectivement pour opérer la nouvelle locomotion spontanée sur les chemins de fer et sur les routes ordinaires, lorsque, à la place des roues simples ou connues, on se servira, pour les waggons, de nos nouvelles roues à rails-mobiles. — Il est sans doute superflu de faire ici remarquer qu'au lieu de diminuer ainsi ultérieurement les forces motrices qui sont indiquées dans nos tables provisoires N°. 2 et N°. 3, on peut appliquer, en sens inverse, cette réduction ultérieure, provenant de l'emploi de nos roues à rails-mobiles, à une augmentation correspondante du poids normal qui est adopté respectivement pour chacune de ces tables. Et généralement, on conçoit que toute réduction des forces motrices peut également s'appliquer ainsi, en sens inverse, à une augmentation correspondante du poids normal dans les tables provisoires N°. 2 et N°. 3, ou même à une augmentation pareille de la vitesse normale qui est adoptée dans ces tables.

Pour ce qui concerne l'application de nos roues à rails-mobiles à la locomotion sur les routes ordinaires, en y remplaçant, dans les chars, les roues actuelles par ces roues mécaniques, nous ne nous arrêterons pas ici à indiquer les différents moyens par lesquels, à l'aide de nos rails-mobiles, sans diminuer la vitesse totale du mouvement, on pourra, sur diverses routes, économiser et réduire, plus ou moins, le nombre d'attelages dont on se sert aujourd'hui, pour n'avoir plus à employer, sur toutes ces routes, que la valeur moyenne qui est indiquée dans la table provisoire N°. 1, c'est-à-dire, moins que la moitié de ces forces motrices dont on se sert actuellement. Ces moyens particuliers dépendent entièrement des localités; et les hommes qui, sur différentes routes, s'occupent du charriage, sauront, eux-mêmes, quels seront, suivant les conditions spéciales de ces routes, les plus grands avantages qu'ils pourront tirer de l'application de nos roues à rails-mobiles, soit en diminuant immédiatement et généralement le nombre des attelages, comme on pourra le faire dans quelques régions des pays de plaines, soit en ne le diminuant que sur les parties peu montagneuses des routes, et en se servant de renforts pour l'ascension des grandes pentes, soit en prolongeant ou en raccourcissant l'étendue de quelques relais, soit en variant convenablement la vitesse partielle du mouvement, soit, enfin, par une combinaison quelconque de ces divers moyens. Il nous suffira ici d'avoir indiqué que l'application de ces roues à rails-mobiles doit procurer généralement, onobstant les pentes des routes et sans retarder le mouvement total, l'immense avantage de réduire à peu près à la moitié, dans les pays moyens comme la France, la somme des forces motrices dans le charriage sur

les routes ordinaires, pour pouvoir nous reposer sur l'intelligence et sur l'intérêt des hommes pratiques en ce qui concerne la réalisation spéciale de cet avantage, dans un degré plus ou moins grand, suivant les conditions locales plus ou moins favorables.

En terminant le Mémoire préliminaire qui a été présenté au Ministre, il est dit que nous pouvons, dès aujourd'hui, si nos travaux scientifiques antérieurs peuvent donner quelque valeur à nos assertions, garantir rigoureusement les résultats numériques qui sont produits dans les trois tables présentes, N^o. 1, N^o. 2 et N^o. 3, comme provenant d'une théorie mathématique irréfutable par laquelle nous sommes parvenus à découvrir les lois de la vraie locomotion spontanée des corps, lois qui, jusqu'à ce jour, sont demeurées inconnues.

Or, tout ce que, depuis la première des trois précédentes tables provisoires, je viens de dire concernant les résultats que présentent ces trois tables, est tiré littéralement du Mémoire préliminaire qui a été soumis au Ministre avec la pétition où je demande, précisément pour l'examen de ces résultats, la nomination d'une Commission. Telle est donc conséquemment l'unique charge de la Commission qui a été nommée ainsi, et dont vous êtes, Monsieur, l'honorable rapporteur. Rien autre que l'examen des résultats majeurs que présentent ces trois tables provisoires, et qui sont manifestement les résultats du premier établissement de la vraie locomotion spontanée sur les chemins de fer actuels, afin de les sauver de leur ruine imminente, rien autre, dis-je, que l'examen de ces urgents résultats ne doit être d'obligation pour cette Commission éclairée. Aussi, en produisant, dans le dernier de mes trois Mémoires définitifs, les trois tables normales que je viens de reproduire au commencement du présent Document, ne l'ai-je fait que pour donner, par anticipation, à cette Commission éclairée, une idée de l'ensemble de la grande réforme de la locomotion terrestre, dont il s'agit, en lui faisant connaître le terme final de cette réforme scientifique, terme dont la réalisation, plus prochaine peut-être qu'on ne le pense, rendant inutiles les dispendieux chemins de fer actuels, causerait alors inévitablement leur ruine. Mais, après avoir ainsi éclairé la Commission sur l'ensemble de cette grande réforme, pour qu'elle puisse en prévoir toutes les suites, sinon en France d'abord, du moins dans les pays étrangers, je rentre maintenant dans les limites de ma pétition, et je me borne conséquemment à demander à la Commission l'examen pur et simple des résultats majeurs qui ont été annoncés au Ministre dans les trois présentes tables provisoires, et qui sont ou doivent être les résultats du premier établissement de la vraie locomotion spontanée sur les chemins de fer, à la place de la fausse locomotion spontanée que l'on y pratique actuellement.

A cette fin, je dois avant tout prier la Commission de remarquer que, dans les paroles que je viens d'extraire de mon Mémoire préliminaire, je finis par dire : « Nous pouvons garantir rigoureusement les résultats numériques qui sont

produits dans toutes les trois tables présentes, N^o. 1, N^o. 2 et N^o. 3, comme provenant d'une théorie mathématique irréfragable par laquelle nous sommes parvenus à découvrir les lois générales de la locomotion spontanée des corps, lois qui, jusqu'à ce jour, sont demeurées inconnues. — Eh bien, telle que j'ai offert cette garantie au Ministre, telle précisément je l'ai donnée à la Commission dans les trois Mémoires que je lui ai présentés, et dans lesquels se trouvent effectivement, d'abord, cette rigoureuse théorie mathématique de la locomotion spontanée, et ensuite ces lois inconnues de la vraie et de la fausse locomotion spontanée des chars, lois qui toutes dérivent immédiatement de cette théorie irréfragable. Aussi, suis-je convaincu que, si les occupations administratives de Messieurs les Membres de la Commission leur avaient permis d'approfondir ces trois Mémoires, ils auraient inmanquablement reconnu eux-mêmes, et porté officiellement au Ministre, la grave conclusion de ces Mémoires, savoir, « qu'il y aurait nécessairement, l'un ou l'autre, ou une profonde ignorance, ou une profonde immoralité, si l'on voulait dorénavant persister dans la barbare construction actuelle des chemins de fer et dans la fausse locomotion que l'on y pratique jusqu'à ce jour. »

En effet, vous avez vu, Monsieur, dans mes trois Mémoires, que tous les résultats majeurs que présentent les trois tables provisoires, celles que je viens de reproduire ici, ne sont rien autre que des évaluations numériques des diverses lois qui sont établies, d'une manière irréfragable, par cette rigoureuse théorie mathématique qui, pour toute la locomotion terrestre, est produite dans ces trois Mémoires. Ainsi, pour ce qui concerne, en premier lieu, la vraie locomotion spontanée qu'il faut établir actuellement, dans le deuxième de mes trois Mémoires, en suivant les lois qui président à cette vraie locomotion spontanée, se trouvent calculées, d'abord, pour les chemins de fer, sous la marque (91), les forces motrices, et sous la marque (97), les forces réactives ou le riflement des roues, telles qu'elles sont annoncées respectivement à la sixième et à la septième colonnes de la présente table provisoire N^o. 2, ensuite, pour les routes ordinaires, sous la marque (92), les forces motrices, et sous la marque (98), les forces réactives ou le riflement des roues, telles qu'elles sont annoncées respectivement à la sixième et à la septième colonnes de la présente table provisoire N^o. 3. Et pour ce qui concerne, en second lieu, la fausse locomotion spontanée que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer, dans le même deuxième de mes trois Mémoires, en suivant les lois qui président à cette fausse locomotion spontanée, et qui sont précisément les lois que nous avons reproduites ici sous les marques (iii), (v) et (vi), se trouvent calculées, d'abord, pour les chemins de fer, sous la marque (150), les forces motrices, et sous la marque (155), les forces réactives ou le riflement des roues, telles qu'elles sont également annoncées à la quatrième et à la cinquième colonnes de la présente table provisoire N^o. 2, ensuite, pour les routes

ordinaires, sous la marque (151), les forces motrices, et sous la marque (156), les forces réactives ou le riflement des roues, telles qu'elles sont annoncées respectivement à la quatrième et à la cinquième colonnes de la présente table provisoire N°. 3. Enfin, pour ce qui concerne la locomotion inerte, telle qu'elle est opérée par la roue à rails-mobiles, et telle qu'elle est annoncée dans notre présente table provisoire N°. 1, nous avons déjà vu plus haut qu'elle est calculée d'après la loi qui, dans le dernier de mes trois Mémoires, sous la marque (142), préside à cette spéciale locomotion inerte. Il est donc constaté positivement que ces trois tables provisoires N°. 1, N°. 2 et N°. 3, qui ont été présentées au Ministre, et pour lesquelles précisément j'ai demandé la nomination d'une Commission, ne sont rien autre que des évaluations numériques des lois qui, d'après la nouvelle théorie générale de la locomotion terrestre, président aux différents modes de cette locomotion, savoir, à la locomotion inerte, et à la locomotion spontanée, vraie et fausse, sur les chemins de fer et sur les routes ordinaires.

Il s'ensuit immédiatement que la Commission qui est chargée de constater la vérité de ces résultats numériques, tels qu'ils ont été annoncés au Ministre dans les trois présentes tables provisoires, ne peut le faire, d'une MANIÈRE GÉNÉRALE, par aucun autre moyen qu'en reconnaissant la vérité des lois dont ces résultats sont de particulières évaluations numériques. Et par conséquent, lorsque la Commission décline l'examen théorique de ces lois, elle peut le faire facilement par un examen pratique, c'est-à-dire, par des expériences propres à constater la vérité de ces lois fondamentales, sur lesquelles repose la présente réforme scientifique de la locomotion. Bien plus, comme je l'ai prouvé plus haut, la Commission peut ainsi constater, par l'expérience, la vérité de ces lois fondamentales, en se bornant à reconnaître la vérité de celles qui président à la fausse locomotion que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer, c'est-à-dire, la vérité des trois lois que j'ai reproduites ici sous les susdites marques (iv), (v) et (vi); car, ces trois lois forment un cas singulier et, pour ainsi dire, transcendant (*) dans la théorie générale de la locomotion spontanée, de sorte que la vérité de ce cas transcendant implique nécessairement la vérité de la théorie générale où il s'établit ainsi, et par conséquent la vérité de toutes les lois fondamentales qui dérivent de cette théorie et qui président à tous les modes de la locomotion spontanée des chars.

C'est ici que la Commission comprendra facilement que ce n'est pas par l'inspection de mes nouvelles machines locomotives, qu'elle pourra reconnaître la vérité des lois fondamentales qui président à cette nouvelle locomotion des

(*) Parce que, pour établir ce cas singulier dans la théorie générale, il faut y introduire la considération de l'infini, comme on le voit sous les marques (151) et (153) dans le deuxième de mes trois Mémoires.

chairs, telle qu'elle est fixée numériquement dans les trois tables présentées au Ministre, dans ces tables dont les lois fondamentales, d'après ma pétition, et d'après la nomination conforme de la Commission, constituent conséquemment l'unique objet dont elle soit chargée de constater la vérité. En effet, ces lois subsistent par elles-mêmes, indépendamment des machines locomotives, quelles qu'elles soient; machines qui ne sont destinées qu'à réaliser les mouvements régis par ces lois en question. — Sans doute, il importera à la Commission de connaître les nouvelles machines locomotives, pour constater jusqu'à quel degré de perfection elles peuvent réaliser les mouvements que prescrivent ces nouvelles lois de la locomotion; mais, pour cela, il faudra évidemment connaître d'abord les lois elles-mêmes. Aussi, dès le moment où, par les susdites expériences, la Commission aura reconnu la vérité des nouvelles lois en question, même seulement des trois susdites lois (iii), (v) et (vii), qui président à l'actuelle locomotion sur les chemins de fer, et dont on peut, avec certitude, induire la vérité de toutes les autres, dès ce moment, dis-je, où la Commission aura ainsi reconnu qu'il existe réellement de nouveaux procédés théoriques de locomotion, parce que ce n'est qu'alors qu'on aura besoin de machines propres à réaliser ces procédés, je m'empresserai de lui faire connaître mes nouvelles machines locomotives, mais uniquement comme un premier essai technique de la réalisation pratique de ces nouveaux procédés théoriques de la locomotion, qui alors seront reconnus positivement, en la priant de ne pas confondre ces deux choses essentiellement différentes, savoir, les nouveaux procédés théoriques de locomotion qui, d'après leurs démonstrations mathématiques, sont infaillibles, et les nouvelles machines pour réaliser ces procédés, qui, comme toutes les productions techniques de l'homme, sont susceptibles d'un perfectionnement indéfini.

Ainsi, comme vous le voyez, Monsieur, la chose principale qu'il faut ici constater, ce sont les nouveaux procédés théoriques de la locomotion, c'est-à-dire, les nouvelles lois mécaniques qui régissent la locomotion terrestre. Quant aux machines par lesquelles on pourra réaliser pratiquement ces nouveaux procédés, vous voyez également, Monsieur, que ce n'est là qu'une chose accessoire dans cette réforme scientifique de la locomotion. Aussi, dans le cas où les machines que j'ai conçues moi-même pour cette réalisation pratique, n'auraient pas toute la perfection désirable, et cependant je suis fondé à affirmer qu'elles auront une perfection plus que suffisante aujourd'hui, des ingénieurs habiles trouveront bientôt, pour cette réalisation des nouveaux procédés théoriques de locomotion, qui formeront maintenant une vérité indestructible, des machines de plus en plus parfaites, et même aussi parfaites qu'on pourra le désirer.

Il ne me reste qu'à me féliciter du choix que j'ai fait du corps illustre des Ponts et Chaussées de France pour constater, par l'expérience, ces nouveaux

procédés théoriques ou ces nouvelles lois mécaniques de la locomotion terrestre. Et je dois spécialement me féliciter de la formation de la Commission, nommée à cette fin, par des hommes aussi éclairés et bienveillants que le sont les honorables membres qui la composent. En effet, sous de pareils auspices, je puis espérer que, par les expériences faciles et décentes que je viens de signaler, la Commission constatera la présente réforme scientifique de la locomotion, d'une manière suffisante pour que les capitalistes, qui généralement ont peur de théories et de réformes, puissent, sur ces expériences de la Commission, établir une confiance propre à entreprendre la réalisation en grand de ces nouveaux procédés de locomotion terrestre.

C'est aussi, par cette raison, que, plein de confiance dans les lumières du Corps des ponts et chaussées de France, je me suis adressé à lui exclusivement, étant bien assuré que, par des expériences décisives, ce Corps illustre pourra, dans cette grave question, convaincre le gouvernement et le public, mieux que ne pourrait le faire l'Institut, c'est-à-dire, l'Académie des sciences de Paris, qui ne saurait en effet produire, dans le cas où elle les comprendrait, rien autre qu'une confirmation théorique des nouvelles lois mécaniques dont il est question; confirmation théorique qui ne saurait convaincre le public, ni surtout les capitalistes.

D'ailleurs, tout recours à l'Académie des sciences de Paris était, dès l'origine de cette affaire, une démarche très-hasardeuse; démarche que le Ministre seul aurait pu faire alors, en acceptant la responsabilité d'un compromis grave auquel elle aurait pu conduire. Et aujourd'hui, ce recours à l'Académie des sciences de Paris est, non-seulement inutile, mais même absolument impossible, comme je vais le prouver.

Il y a trente-cinq ans que, du moins à l'égard de mes travaux, l'incompétence scientifique de ce corps savant est déjà établie légalement, par la comparaison publique de deux rapports authentiques, faits par ses commissaires, et sanctionnés formellement par ce corps savant lui-même. Ces deux rapports, dont tous les points, tous absolument, forment une scandaleuse contradiction, ont été publiés en 1812, à la tête de mon ouvrage intitulé : *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*. Aussi, depuis cette époque de 1812, me suis-je servi de cette contradiction authentique pour repousser légalement, dans toutes mes pétitions et démarches auprès du gouvernement français, la compétence scientifique de cette savante Académie de Paris, à l'égard de mes travaux mathématiques. Et l'on conçoit facilement qu'à plus forte raison, j'ai dû, depuis cette époque de 1812, me priver de l'honneur de toute relation avec cette illustre Académie des sciences de Paris, par la certitude que j'avais acquise qu'il ne pourrait résulter, de ces relations, rien d'utile pour la science.

Enfin, ayant fondé à Paris, sur mes brevets d'invention, une association

pour la présente réforme de la locomotion terrestre, mes associés me témoignèrent, en 1842, le désir d'avoir un rapport de l'Institut sur cette réforme scientifique, pour pouvoir offrir cette espèce de garantie au public et à leurs familles. Il m'était impossible de contrarier ce juste désir; et, ne voulant pas me compromettre moi-même, parce que, en outre de mes anciennes convictions, je savais que, dans la classe des sciences de l'Institut, c'est-à-dire, dans l'Académie des sciences de Paris, on n'avait encore aucune idée de la locomotion spontanée, je consentis à ce que mes associés fissent, en leur propre nom, cette démarche auprès de l'Académie. Mais, M. Arago, son secrétaire perpétuel, qui probablement comprit le motif secret de ma réserve, déclara, en présence d'un témoin respectable, que cela était impossible, et qu'il fallait que le rapport fût demandé en mon nom; comme si le nom d'un auteur, quel qu'il soit, pouvait être nécessaire à l'aveu public et à la déclaration d'une vérité par un corps savant, surtout d'une vérité scientifique et utile à la nation!

A mon tour, je compris le motif secret de M. Arago; et sachant néanmoins apprécier la bienveillance qu'il me témoignait, en me proposant de choisir les membres de la Commission, si je consentais à m'adresser moi-même à l'Académie, ce que j'ai refusé formellement, j'ai voulu, quelque temps après, profiter de cette bienveillance, et non pas l'éprouver, comme on pourrait le croire. En conséquence, je lui écrivis une lettre, en 1844, pour le prier, en sa qualité de député, de dire quelques mots à la Chambre législative, pour faire prendre en considération notre affaire de la réforme de la locomotion, au moment précisément où, par des mesures législatives concernant les chemins de fer, on allait jeter la France dans les embarras financiers qu'elle éprouve aujourd'hui. Ma lettre était tellement polie, et même flatteuse, qu'à moins d'y voir de l'ironie, M. Arago ne pouvait ne pas la trouver agréable. Aussi, s'empressa-t-il de déclarer qu'il ferait ce que je lui demandais. Mais, pour pouvoir, à ce qu'il disait, mettre un « temps d'arrêt » dans les décisions de la Chambre, il prétendait devoir commencer par l'Académie; et à cette fin, il me fit demander, par mon principal associé, un Mémoire pour l'Académie, aussi succinct que je le voudrais, pourvu qu'il fût en mon nom. Il était facile de comprendre l'intention de M. Arago; mais, je ne pouvais cette fois-ci, à cause de l'intermédiaire qu'il avait choisi, refuser sa demande. D'ailleurs, il n'y avait plus de compromis pour moi; car, ce n'est pas de mon chef que je m'adressais à l'Académie pour avoir son approbation; c'est sur la demande expresse de son secrétaire perpétuel que je consentais à éclairer l'Académie concernant cette nouvelle et grande question de la locomotion spontanée, dont elle n'avait même pas conçu encore le problème, et dont elle devait ainsi apprendre de moi, tout à la fois, et le problème et sa solution. Au reste, dans toute hypothèse, car j'ai prévu ce qui arrive aujourd'hui, il

était temps de faire triompher la vérité. — En conséquence, je rédigeai à la hâte, sous le titre d'*Aperçu de la réforme scientifique de la locomotion terrestre*, le Mémoire que M. Arago m'avait demandé.

C'est cet *Aperçu* dont j'ai parlé plus haut dans le Document présent, et dont je fis un hommage personnel à vous, Monsieur, et aux deux autres membres honorables de la Commission. — Or, vous savez, Monsieur, quel est le rapport que, sur cet *Aperçu*, l'Académie fit publier, dans son journal politique (*), le *National*, le 5 juin 1844; et vous savez combien ce rapport changea, dans votre Commission éclairée, les bienveillantes dispositions pour l'affaire de la réforme de la locomotion. Mais, vous ne savez peut-être pas que ce rapport académique a porté, dans le public, une atteinte mortelle à cette affaire de la locomotion, au point que, pour les intérêts de mes associés, je me verrai forcé de poursuivre, devant les tribunaux, le journal qui a osé servir d'organe à cette atteinte à mes droits.

Je ne m'attribue pas, et je l'abandonne volontiers à l'histoire des sciences, le droit de scruter si ce rapport académique est une œuvre de loyauté ou une œuvre de perfidie. Bien plus, quand même je saurais, et je ne veux pas le savoir, que c'est une œuvre de perfidie, je me garderais bien de m'en plaindre, parce que, en y joignant l'ouvrage que je publie en même temps que le Document présent, on pourrait croire que je cherche à établir, pour l'Académie des sciences de Paris, une comparaison injurieuse entre son génie scientifique, par l'absence de la production de toute découverte fondamentale en mathématiques, et son esprit pratique, par la présence de la destruction des découvertes fondamentales des autres. Et je m'en plaindrais d'autant moins, que ce procédé de la savante Académie de Paris, en me forçant à produire, pour les intérêts de mes associés, l'ouvrage ci-joint sur la *Réforme des Mathématiques*, m'a procuré, d'une part, l'occasion de faire ainsi quelque chose qui peut-être sera utile à l'humanité, et de l'autre, le droit de prouver, pour ma légitime défense, qu'il n'existe pas, dans cette Académie des sciences de Paris, des connaissances mathématiques suffisantes, non-seulement pour apprécier les lois fondamentales que j'ai données à la science, mais même pas pour éviter les graves erreurs où elle est tombée dans presque toutes les grandes applications mathématiques, telles que celles de la mécanique céleste, de la théorie de la terre, du système métrique de la France, du calcul des marées, etc., etc., etc.

Et bien, ces graves erreurs mathématiques de l'Académie des sciences de Paris suffiront-elles pour prouver, comme je me le suis proposé, qu'il serait, pour le moins, inutile de recourir à cette Académie pour faire apprécier la

(*) Par suite de cette influence de l'Académie, les étrangers appellent le *National*, journal trigonométrique.

réforme de la locomotion que j'ai soumise au Conseil général des Ponts et Chaussées de France? — Dans le cas où ce Conseil éclairé ne voudrait pas prendre sur lui de se décider par de si grandes preuves, le susdit rapport que l'Académie des sciences de Paris a fait publier dans son journal politique, le *National*, suffira pour prouver irréfutablement cette inutilité en question, celle de recourir ultérieurement aux lumières de cette savante Académie de Paris. En effet, faisant abstraction des injures qu'elle m'adresse dans ce rapport, aussi savant qu'elle est savante elle-même, injures qui ne sont que la marque d'une mauvaise éducation, dont elle ne saurait être responsable, ce que ce savant rapport contient de réellement scientifique, c'est le blâme qu'il prononce sur la phrase citée plus haut, par laquelle, comme étant extraite de mon susdit Aperçu, il est prouvé que le rapport en question émane effectivement de cette savante Académie de Paris. — Or, cette phrase, qui est extraite de mon Aperçu, et qu'il faut répéter, la voici : « La nouvelle locomotion prend son point d'appui, sa réaction, non dans le précaire frottement, réel ou virtuel, des roues contre le sol, comme on le prend actuellement dans la fausse locomotion sur les chemins de fer, mais dans la gravitation même du char, comme le prennent tous les êtres animés qui exercent une locomotion spontanée. »

Et le blâme de l'Académie, qui condamne ce principe, le voici :

« Prétendre que les êtres animés développent en eux-mêmes la réaction nécessaire à leur déplacement; prétendre qu'à l'imitation de cet étrange procédé de locomotion, les chars marchent sans prendre leur point d'appui sur le sol, voilà certes des idées nouvelles, et que M. Wronski formule avec une confiance imperturbable. »

Il est donc inutile, comme je me suis proposé de le prouver, de recourir actuellement à l'Académie des sciences de Paris, puisque, comme vous venez de le relire, Monsieur, elle a déjà condamné formellement, et sans aucune réserve, comme une véritable absurdité, la réforme de la locomotion terrestre, sur laquelle doit prononcer votre honorable Commission. En effet, je déclare, tout aussi formellement, que le principe fondamental de ma réforme scientifique de la locomotion, consiste précisément en ce qui est énoncé dans la phrase précédente, que cette savante Académie déclare être une absurdité.

Bien plus, j'ai avancé en outre que ce recours à l'Académie des sciences de Paris est aujourd'hui absolument impossible, c'est-à-dire, qu'à mon tour, je déclare comme une véritable absurdité tout jugement de cette Académie sur des principes ou sur des découvertes fondamentales en mathématiques. — Absurdité pour absurdité; voilà d'abord le simple droit de réciprocité. Mais, voyons s'il n'existe pas ici, en notre faveur, quelque droit de plus. — Si l'Académie des sciences de Paris, qui n'a jamais produit rien de fondamental en mathématiques, peut considérer, comme absurdes, nos productions mathé-

matiques, nous pourrions bien, nous qui venons de donner à la science ses lois fondamentales, considérer aussi, et à plus forte raison, comme absurde, tout jugement que cette Académie oserait porter sur des découvertes fondamentales. Et malgré cette supériorité de nos droits, nous allons de plus prouver positivement que nous sommes fondés, non-seulement à appliquer le mot d'absurde à ces prétentieux jugements de l'Académie, mais même à ne leur appliquer aucun autre mot, pour ne pas tromper le public sur cette absolue impuissance de concevoir des principes ou des vérités fondamentales, qui est le caractère distinctif de l'Académie des sciences de Paris.

Et pour faire mieux apprécier les preuves que nous allons donner, observons d'abord que, dans le susdit blâme que l'Académie de Paris porte sur nos productions, elle ne l'établit sur rien autre que sur des injures. C'est donc elle qui débite ainsi, avec une « *confiance imperturbable*, » le plus grossier non-sens; car, il n'y a pas un homme, tant soit peu éclairé en mécanique, qui ne sache qu'en levant une masse à l'aide d'une corde et d'une poulie fixée plus haut que sa tête, il trouve, dans son propre poids, la réaction nécessaire à la force qu'il exerce, au point qu'il demeurerait suspendu à la corde si la masse qu'il veut lever, pesait plus que son corps.

Quant à nous, ce n'est pas sur des injures que nous établirons les preuves que nous allons donner de ce que tout jugement de l'Académie des sciences de Paris, porté sur des principes ou sur des découvertes fondamentales en mathématiques, est nécessairement une absurdité, et qu'il ne saurait même absolument être rien autre. Et ces preuves, nous allons les établir, non-seulement avec une « *confiance imperturbable*, » mais de plus avec une *CERTITUDE ABSOLUE* dont cette Académie, qui ne connaît encore, pour la vérité, d'autre source que l'expérience; n'a malheureusement aucune idée.

Ce qu'il y a de plus remarquable, c'est que celles de ces preuves qui se rapportent au passé, sont tellement frappantes et nombreuses, que l'un a de la peine à concevoir comment l'Académie des sciences de Paris peut les oublier, et peut ainsi, dans ses prétendus jugements sur des découvertes fondamentales, trancher avec une si grossière injustice. En effet, ces preuves du passé, aussi nombreuses qu'irréfragables, résultent immédiatement du simple tracé historique du sort qu'ont trouvé, dans cette savante Académie, toutes les grandes découvertes mathématiques qui font aujourd'hui la gloire de l'humanité, et qui toutes, sans la moindre exception, loin d'avoir reçu leur naissance dans le sein de cette Académie, n'y furent même jamais comprises suffisamment pour n'être pas repoussées toujours, avec une scandaleuse et ridicule violence, qui décèle la susdite impuissance absolue de concevoir des principes ou des vérités fondamentales.

Mais, quelque déçues que soient ces preuves historiques, que nous sommes prêts à donner en détail, si nous y sommes forcés absolument, elles ne for-

ment ici, en ce qui nous concerne, que des preuves négatives. Nous allons donc, par rapport à nos propres productions, ajouter ici une preuve positive, et également irréfragable, de ce que tout jugement de l'Académie des sciences de Paris sur des découvertes fondamentales en mathématiques, est réellement une absurdité, et ne saurait même être rien autre. — Or, cette preuve positive, malgré tout ce qu'il nous en a coûté, puisqu'il faut enfin faire triompher la vérité, nous la donnons dans l'ouvrage que nous produisons actuellement sur la *Réforme des Mathématiques*. En effet, il a fallu ordinairement à peu près un demi-siècle pour que l'Académie des sciences de Paris, ou la corporation qui l'a précédée, comprit les ausdites grandes découvertes mathématiques qui font aujourd'hui la gloire de l'humanité, telles que la résolution des équations du troisième et du quatrième degré, les lois de Kepler, le calcul différentiel, l'attraction universelle, l'aplatissement de la terre, la précession des équinoxes (*), etc., etc., etc. Eh bien, si nous ne nous trompons, il faudra plus d'un siècle pour que l'Académie des sciences de Paris, en absence de Lagrange, parvienne à comprendre, dans toute leur portée infinie, les trois lois fondamentales que nous donnons à la science, et sur lesquelles nous fondons la présente Réforme des Mathématiques.

Vous voyez ainsi, Monsieur et honorable rapporteur de la Commission, que le Conseil général des Ponts et Chaussées ne peut recourir à l'Académie des sciences de Paris pour faire juger la théorie de la réforme de la locomotion, théorie que, par l'organe du Ministre, j'ai soumise à ce Conseil éclairé. — Heureusement, comme vous venez de le voir dans le Document présent, cette réforme de la locomotion terrestre est, dans son application, une question purement pratique; et comme telle, sa vérité et son importance peuvent suffisamment être reconnues par l'expérience, nommément par les expériences que j'ai signalées dans ce Document, savoir, d'abord, par les expériences préliminaires des lois que notre réforme assigne à la fausse locomotion spontanée que l'on pratique actuellement sur les chemins de fer, et ensuite, en construisant les machines locomotives nécessaires, par les expériences définitives des lois que cette réforme découvre pour la vraie locomotion.

Le Conseil général des Ponts et Chaussées pourra donc, d'après le rapport de votre honorable Commission, prononcer tout seul sur cette grande question de l'industrie nationale, si, à l'intérêt de la France, dont il est pénétré, il peut maintenant joindre quelque confiance dans nos travaux mathématiques, d'autant plus que les frais de ces expériences, à côté de leurs immenses résultats, n'ont, pour ainsi dire, aucune valeur appréciable. — Aussi, dans la

(*) M. Saint-Jacques de Sylabelle, directeur de l'Observatoire de Marseille, nous a confié, quelques jours avant sa mort, une fort remarquable histoire académique concernant la précession des équinoxes.

MATHÉMATIQUES.

CCXXV

présente crise financière, causée par les barbares et coûteux chemins de fer actuels, y a-t-il lieu de penser, si je ne me trompe, que la France, et peut-être l'Europe, doivent attendre cette salutaire décision du Conseil général des Ponts et Chaussées de France.

J'ai l'honneur d'être, avec la plus haute considération,

Monsieur et honorable Rapporteur de la Commission,

Votre très-humble et très-obéissant serviteur.

(Signé) : HENRI WRONSKI.

Nous n'avons plus assez d'espace pour pouvoir ici joindre les lettres et toutes les autres pièces dont il a été fait mention dans le Document précédent. Nous les produirons, s'il en est besoin, à la fin du Supplément du second tome de cet ouvrage. — Toutefois, pour rendre intelligibles les lois principales de la présente réforme de la locomotion, lois que nous allons faire connaître, nous reproduirons ici, dès ce moment, au moins l'Aperçu dont il vient d'être question dans ce Document précédent. — Le voici :

Aperçu de la réforme scientifique de la locomotion terrestre, rédigé pour l'Académie des sciences de Paris, sur la demande expresse de M. Arago, l'un de ses secrétaires perpétuels.

Cette réforme, comme le dit son nom, résulte entièrement de déductions scientifiques, fondées sur de nouveaux principes de la mécanique, et notamment sur la découverte des lois de la locomotion spontanée, qui, jusqu'à ce jour, est demeurée inconnue dans la mécanique rationnelle. — Or, cette nouvelle locomotion prend son point d'appui, sa réaction, non dans le précaire frottement, réel ou virtuel, des roues contre le sol, comme on le prend actuellement dans la fausse locomotion sur les chemins de fer, mais dans la gravitation même du char, comme le prennent tous les êtres animés qui exercent une locomotion spontanée. Et elle reçoit sa force motrice, son action, principalement de cette gravitation elle-même de la masse du char, de cette gravitation qui, comme un nouvel agent mécanique, exerce ici son action, non par une chute réelle des corps, mais par la simple pression ou chute virtuelle des corps; pression qui, jusqu'à ce jour, est demeurée méconnue en mécanique pour la production du mouvement. — Il suffit alors d'employer une très-petite force motrice additionnelle, ou indépendante du char lui-même, pour mettre ainsi en action la gravitation de sa masse; et notamment, d'après la

nature de ce mouvement, il suffit alors d'employer, ou une très-petite force motrice *extérieure*, placée hors du char, pour produire, par cette impulsion *extérieure*, sa *locomotion inerte*, ou bien une très-petite force motrice *intérieure*, attachée au char, pour produire, par cette impulsion *intérieure*, sa *locomotion spontanée*. En effet, à l'aide de ces très-petites forces additionnelles, *extérieure* ou *intérieure*, qui seules exigent une dépense continue de force, la gravitation de la masse du char peut opérer son mouvement, avec des vitesses quelconques, et sur toutes les pentes, quelque paradoxal que cela puisse paraître, lorsqu'on ne connaît pas encore le nouvel et puissant agent mécanique que forme ici la simple pression ou la chute virtuelle des corps.

Telles sont les *conditions mécaniques* de cette réforme de la locomotion terrestre. — Voici ses *conditions physiques*.

D'après les différentes formes sous lesquelles s'établit la construction ou l'état physique de la matière, et nommément d'après ses triples formes, solide, liquide et gazeuse, sous lesquelles les corps exercent conséquemment leur action mécanique, les présentes conditions mécaniques de notre réforme de la locomotion peuvent se manifester de trois manières différentes. Il en résulte ainsi, pour cette nouvelle locomotion, considérée en général, trois classes distinctes de machines locomotives. Mais, pour la locomotion terrestre, considérée en particulier, qui seule est ici notre objet, la première et la dernière de ces trois classes, c'est-à-dire, les deux classes qui dépendent respectivement de l'action mécanique des corps solides et des fluides élastiques, se trouvent le mieux appropriées. — Nous obtenons ainsi, pour cette réforme scientifique de la locomotion terrestre, les deux classes de nouvelles machines locomotives, que nous nommerons *machines stéréophoriques* et *machines pneumophoriques* (*).

Voyons maintenant quels sont les principes de cette réforme, et nommément ses *principes théoriques* et ses *principes techniques*. — Commençons par indiquer rapidement les principes théoriques.

L'état imparfait où se trouve encore généralement toute la locomotion terrestre, non-seulement la moderne locomotion spontanée sur les chemins de fer, mais aussi l'ancienne locomotion inerte sur les routes ordinaires, en considérant surtout que les principes scientifiques de ces deux modes de mouvement, à l'aide des roues, demeurent encore inconnus, nous a fait présumer que les véritables éléments primordiaux de cette double locomotion terrestre n'étaient encore, ni découverts en théorie, ni même présentés en pratique. Et en effet, en recherchant ces éléments, nous avons trouvé, d'une part, que, pour la locomotion inerte, exercée à l'aide d'une force motrice *extérieure*, le véritable élément, inconnu jusqu'à ce jour, consistait à *détacher du sol la masse du char*, afin de lui conserver, par son inertie, l'impulsion pri-

(*) Par abréviation du mot *pneumophoriques*.

mitive du mouvement, et d'éviter ce qui arrive aujourd'hui, c'est-à-dire, la destruction continuelle du mouvement que causent les inégalités verticales de la route; et nous avons trouvé, de l'autre part, que, pour la locomotion spontanée, exercée à l'aide d'une force motrice intérieure, le véritable élément, inconnu également jusqu'à ce jour, consistait à donner au char une traction-propre, afin que cette traction ou impulsion dans la direction du mouvement devienne la cause de la rotation des roues, et ne soit pas, comme dans la fausse locomotion actuelle sur les chemins de fer, l'effet de cette rotation des roues. Et nous reconnûmes alors que le premier de ces éléments, celui de la locomotion inerte, consistait dans une position excentrique qu'il fallait donner à l'essieu du char au milieu de ses roues, et que le second de ces éléments, celui de la locomotion spontanée, consistait dans une application spéciale qu'il fallait faire de la force motrice. Il se trouvait ainsi que ces deux véritables éléments de la locomotion terrestre, qui sont demeurés inconnus jusqu'à ce jour, formaient respectivement, le premier, un élément géométrique, et le second, un élément mécanique de cette locomotion spéciale. Et il ne restait qu'à découvrir les lois théoriques qui régissent respectivement l'influence de ces deux véritables éléments de la locomotion terrestre.

De plus, en observant, d'une part, que, par la position excentrique de l'essieu au milieu des roues, la gravitation du char opère une bascule ou un renversement de ces roues, et de l'autre part, que, par les conditions de la traction-propre, ce renversement des roues forme une véritable traction-propre du char, il devenait évident que les deux éléments de la locomotion terrestre, que nous venons de signaler, se combinent systématiquement dans l'un et dans l'autre mode de cette locomotion spéciale, c'est-à-dire, dans la locomotion inerte et dans la locomotion spontanée. Et il restait de nouveau à découvrir les lois qui, dans la locomotion terrestre, régissent cette combinaison systématique de ses deux éléments primordiaux.

Ainsi, la théorie de la présente réforme de la locomotion terrestre consiste en trois parties, qui, d'après ce que nous venons de reconnaître, ont respectivement les objets suivants. — La première de ces parties, qui concerne l'élément géométrique de cette réforme, a pour objet les lois d'après lesquelles, dans cette position excentrique de l'essieu au milieu des roues, la masse du char, se trouvant ainsi détachée du sol, opère, par sa simple translation, son propre mouvement, et transforme, par là même, cet élément géométrique en un véritable élément statique. La seconde de ces parties, qui concerne l'élément mécanique, a pour objet les lois qui, dans toute application spéciale de la force motrice, régissent la traction-propre du char, c'est-à-dire, son impulsion dans la direction de son mouvement, et qui, par là même, donnent à cet élément mécanique le caractère d'un véritable élément dynamique. Enfin, la troisième et dernière partie de la théorie de notre présente réforme, cette

partie qui concerne la *combinaison systématique* des deux éléments précédents, a pour objet les lois qui, à leur tour, rigissent la *sûreté* de ces deux éléments, dans la production du maximum possible de l'action locomotive qu'il soit donné à l'homme de se procurer sur ce globe.

Or, ce sont ces trois parties intégrantes de la théorie générale de notre réforme de la locomotion terrestre qui constituent, dans leurs objets respectifs, les parties théoriques des trois Mémoires dont se compose le système entier de cette réforme scientifique. Et ce sont ces trois Mémoires qui, dans les critiques circonstances actuelles de la fausse locomotion sur les chemins de fer, ont été mis sous les yeux du Conseil général des Ponts et Chaussées pour éclairer la proposition que nous avons faite au Ministre des travaux publics, celle d'introduire en France cette urgente réforme des chemins de fer et de toute la locomotion terrestre.

On conçoit que, dans l'Aperçu présent de cette réforme scientifique, nous ne pouvons reproduire rien de plus concernant les parties théoriques de nos trois Mémoires. Nous nous bornerons donc à faire savoir que ces trois parties théoriques s'y trouvent développées complètement et démontrées rigoureusement, dans tous leurs principes, déduits entièrement *a priori*, et dans toutes leurs conséquences, conduites jusqu'aux dernières applications pratiques. De cette manière, les lois théoriques et les procédés techniques y sont déterminés par des formules mathématiques éminemment simples, d'après lesquelles toutes les conditions, théoriques et pratiques, s'y trouvent évaluées réellement, et fixées même par des chiffres positifs. On y découvre ainsi la différence essentielle entre le mouvement inerte, celui par impulsion extérieure, qui était le seul connu en mécanique, et le mouvement spontané, celui par impulsion intérieure, qui est demeuré inconnu à la science, et dont les lois spéciales fixent, même pour des forces motrices infinies, des limites infranchissables, d'abord, dans la direction horizontale, et ensuite principalement sur des pentes, limites dont les ingénieurs, et même les savants, ne se doutaient pas encore jusqu'à ce jour. — De plus, toutes ces lois théoriques et tous ces procédés techniques y sont donnés, tout à la fois, et pour nos anciens machines stéréophoriques, et pour nos machines pneumophoriques, dépendant de l'action mécanique des fluides élastiques.

Procédons enfin à indiquer, avec la même rapidité, les principes techniques de cette réforme de la locomotion, c'est-à-dire, les principes de la réalisation matérielle des résultats théoriques que nous venons de signaler, et par conséquent les principes de la construction des nouvelles machines locomotives par lesquelles cette réforme scientifique se trouve, déjà aujourd'hui, à l'aide des modèles principaux que l'on a fabriqués et des expériences que l'on a faites avec ces modèles, accomplie positivement. — Et dans cette indication technique, suivons naturellement la marche que nous avons suivie pour l'indication des principes théoriques de cette réforme.

Or, le premier de nos deux susdits éléments primordiaux, celui qui, par la position excentrique de l'essieu au milieu des roues, sert à détacher du sol la masse du char, est réalisé dans notre nouvelle roue que nous nommons *roue à rails-mobiles* ou à *rails-circulaires*. — Dans l'atlas technique N°. 1, qui appartient au premier de nos trois Mémoires susdits, cette roue à rails-circulaires, qui, comme nous le verrons ci-après, servira à former notre *roue-accomplie*, se trouve produite dans tous les modes progressifs de sa construction, depuis son premier état d'imperfection, en la construisant d'abord en fer, jusqu'à son dernier et définitif mode de construction en bois préparé chimiquement, que nous nommons *bois métallique*, à cause que, comme les métaux, il n'a plus les deux défauts essentiels du bois ordinaire, savoir, son action hygrométrique et son imparfaite conductibilité calorique. — Les premières expériences qui ont été faites avec cette roue à rails-circulaires, dans son premier état d'imperfection, lorsqu'elle était encore construite en fer, ont déjà répondu suffisamment à la théorie de cette roue nouvelle, en réduisant au tiers le tirage qu'ont les chars avec les roues ordinaires. Voici ce que, à la page 3, nous disons plus positivement de ces expériences dans notre *Prospectus historique*, publié en octobre de 1840. — « Au mois de septembre de 1839, l'auteur fit, en présence de plusieurs personnes, des expériences en grand, dans les environs de Paris, sur des routes différentes, et avec des charges et des vitesses variées. — Ces expériences ont été publiées, un mois après, dans un opuscule intitulé : *Résultats des expériences faites avec les rails-mobiles*, dont voici la conclusion. — Par ces expériences comparatives, nous voyons que, pour le même effet pour lequel il faut trois chevaux sur les chemins de fer fixes, il en faut quinze sur les routes ordinaires avec les anciennes roues, et il ne faut que cinq chevaux sur ces mêmes routes ordinaires avec nos roues à rails-mobiles; de sorte que cette modique augmentation de la force motrice que demandent nos rails-mobiles, comparativement à la force qu'il faut sur les chemins de fer fixes, est plus que compensée par l'absence des massives et inertes voies métalliques. — Ainsi, malgré les imperfections des machines que l'on a employées à ces expériences, les résultats obtenus approchaient de ceux que donne la théorie, dans une étendue assez grande pour que l'on pût établir, dès lors, qu'avec des machines plus parfaites, on obtiendra complètement les résultats fixés par la théorie, savoir que, par le moyen de nos roues à rails-mobiles, quatre chevaux suffiront pour produire le même effet que produisent, avec les roues ordinaires, quinze chevaux sur les routes ordinaires, et trois chevaux sur les chemins de fer. » — En effet, dans une expérience authentique, qui a été faite le 11 janvier 1842, avec la roue à rails-circulaires déjà perfectionnée et construite en bois métallique, on a obtenu une réduction que l'on peut évaluer à près du quart du tirage ordinaire des chars, comme on le

démontre dans le Mémoire d'annonce qui a été présenté d'abord au Ministre des travaux publics de France. Le procès-verbal de cette expérience, signé par le maire de Pantin, et les bulletins de pesage du préposé au pont de bascule de la même commune, sont déposés à Paris, au Bureau de la Locomotion-spontanée, rue Paradis-Poissonnière, N°. 32.

Le second de nos deux éléments primordiaux, celui qui, par l'application spéciale et la plus convenable de la force motrice, sert à imprimer au char une traction-propre, une impulsion dans la direction même du char, est réalisé dans notre nouvelle locomotive que nous nommons *Dromade*, où l'action de la force motrice s'exerce perpendiculairement au plan du mouvement, à l'extrémité d'un levier attaché à la roue, et ayant une longueur équivalant à $\sqrt{3}$, ou à peu près à 1,7 de la longueur du rayon de la roue. C'est en effet cette longueur du levier qui, d'après la théorie de la vraie locomotion spontanée, répond au maximum possible de la traction-propre que peut recevoir un char par l'action de la force motrice qu'il porte lui-même. — Dans l'atlas technique N°. 2, qui appartient au deuxième de nos trois Mémoires, cette dromade ou locomotive nouvelle à traction-propre se trouve également produite avec tous les détails concernant la construction de cette machine stéréographique. On y voit, aux planches IV et VIII, les deux leviers, l'un en avant et l'autre en arrière du char, qui, d'après les principes théoriques indiqués à la planche II, produisent ainsi, par une action incessante de la force motrice, le maximum de la traction-propre du char, constituant la vraie locomotion spontanée. — Les expériences qui ont été faites avec cette dromade ou machine locomotive à traction-propre se trouvent également indiquées dans le susdit *Prospectus historique*. Voici ce que nous y disons à la même page 3.

— Les expériences faites quelque temps avant celles que nous venons d'indiquer plus haut, et renouvelées récemment sur le grossier modèle de cette dromade, qui avait été construit, en premier lieu, c'est-à-dire, en 1837, donnaient également, malgré l'extrême imperfection de ce modèle, des résultats assez approchant de ceux qui sont indiqués par la théorie. — En effet, les frottements que présente cet imparfait modèle de notre système de traction-propre, sont estimés à peu près au tiers de la force d'un cheval; et deux hommes, dont la force est notoirement les deux cinquièmes de celle d'un cheval, parviennent, par le mouvement de la manivelle à laquelle doit s'appliquer une force motrice quelconque, à vaincre ces frottements et à mettre en mouvement cette machine locomotive, de manière à constater la réalité matérielle du susdit principe scientifique sur lequel est fondé ce système de traction-propre des chars. — Bien plus, lorsqu'on oppose au mouvement de cette machine locomotive un obstacle suffisant, aucune force, quelque grande qu'elle soit, ne peut opérer sur la même place la rotation des roues, comme on l'opère par le mode connu de l'application de la

« vapeur au mouvement des chars, lorsque le moindre obstacle s'oppose à ce mouvement; ce qui prouve matériellement que, dans notre nouveau mode d'application de la force motrice, l'action s'exerce immédiatement dans la direction même du mouvement du char, et forme, en toute réalité, un véritable mode de traction-propre. » — Or, d'après ces expériences, seulement $\frac{1}{6}$ de la force motrice se trouvait perdu, et dans la fausse locomotion spontanée que l'on pratique sur les chemins de fer, plus de la moitié, et nommément $\frac{8}{13}$ de la force motrice se trouvent perdus inutilement; de sorte que les actions efficaces dans la vraie et dans la fausse locomotion spontanée sont dans le rapport de $\frac{5}{6}$ à $\frac{5}{13}$, ou de 13 à 6, ou à peu près de 2 à 1, comme nous le découvrons effectivement dans la théorie de ces deux modes de la locomotion spontanée, telle que cette théorie est produite dans notre deuxième Mémoire.

Nous devons, dans la présente construction de cette dromade ou machine locomotive à traction-propre, faire remarquer un commencement de réalisation de notre système tricyclique à quatre roues, qui, à la planche III de ce même atlas technique N°. 2, se trouve indiqué dans la perfection avec laquelle il doit être appliqué à nos nouveaux équipages ou convois sur les chemins de fer. L'objet de ce système tricyclique des chars, soit dans leur mouvement isolé, soit dans leur liaison formant les convois sur les voies métalliques, et même sur les routes ordinaires, est de réduire, d'après des principes scientifiques, au minimum possible, le frottement latéral des roues dans les changements de la direction de leur mouvement, quelque brusques que soient ces changements, et de rendre ainsi possible, en y joignant des articulations verticales, le mouvement de l'équipage ou du convoi entier sur des voies à double courbure, quelque rapides que soient, à leur tour, les variations de cette courbure. Et alors, en appliquant aux wagons, et même au remorqueur, d'après ce que nous verrons ci-après, nos roues-accomplies, qui détacheront du sol la masse entière de l'équipage, tous les dangers actuels qui sont inhérents au mouvement sur les chemins de fer, cesseront entièrement, comme nous le prouvons dans notre deuxième Mémoire.

Enfin, la combinaison systématique de nos deux susdits éléments primordiaux, pour opérer, par leur réunion, le maximum de l'action locomotive qu'il soit possible d'obtenir par des procédés mécaniques, est réalisée dans deux machines stéréophoriques, l'une, pour la locomotion inerte, que nous nommons *roue-accomplie*, et l'autre, pour la locomotion spontanée, que nous nommons *roue-phorogénique*. — Dans l'atlas technique N°. 3, qui appartient au dernier de nos trois Mémoires susdits, la roue-accomplie se trouve pro-

duite à la planche I, et la roue-phorogénique aux planches II et III. — On y voit que la roue-accomplie n'est proprement, dans sa construction fondamentale, rien autre que la roue à rails-mobiles ou à rails-circulaires que nous avons déjà reconnue aux planches XI, XII et suivantes de notre atlas technique N°. 1. Et, en effet, la présente roue-accomplie, telle qu'elle est produite à la planche I de l'atlas N°. 3, n'en diffère que par le perfectionnement qu'elle reçoit de la combinaison systématique qui s'établit ici entre l'élément géométrique que forme son excentricité, avec l'élément mécanique que forme ici la gravitation du char, en y imprimant déjà une décisive traction-propre. Et cette perfection spéciale de la roue-accomplie s'y trouve déterminée par la dimension du rayon de ses roulettes, dimension qui fixe l'étendue la plus convenable de l'excentricité de cette roue pour que la traction-propre qui y est produite par la gravitation du char, soit la plus grande possible. — Quant à la roue-phorogénique, qui, dans ses deux modes de construction, est représentée aux planches II et III du même atlas technique N°. 3, elle opère, dans sa plus haute perfection, la combinaison systématique de nos deux éléments primordiaux de la locomotion terrestre, et notamment de l'élément géométrique que réalise, par son excentricité, notre roue à rails-mobiles (Atlas N°. 1), en détachant ainsi du sol la masse du char, et de l'élément mécanique que réalise à son tour, par l'application la plus convenable de la force motrice, notre dromade avec ses roues à leviers (Atlas N°. 2), en produisant ainsi le maximum possible de traction-propre. Et l'on y voit, dans ces planches II et III de l'atlas N°. 3, que les leviers des roues, par lesquels s'opère le maximum de la traction-propre dans la dromade, sont ici formés par les rayons d'une roue dentée, qui viennent se présenter successivement pour subir, par le pignon, l'action perpendiculaire au plan du mouvement, et pour rendre ainsi d'une continuité absolue cette action de la force motrice.

Quant à nos machines pneumophoriques, qui, comme nous l'avons déjà dit, ont les mêmes principes théoriques et les mêmes principes techniques, elles sont réalisées par un seul mode de construction, sous lequel elles forment progressivement, d'abord, la simple *roue-pneumatique* qui, en tout analogue à notre roue-accomplie, peut servir, avec les mêmes avantages, pour la locomotion inerte, à l'aide de chevaux ou d'autres forces motrices extérieures, ensuite, la *roue-locomotrice* qui, par analogie avec notre roue-phorogénique, peut servir, avec de très-grands avantages, à la vraie locomotion spontanée, à l'aide de la vapeur ou de toute autre force motrice intérieure; enfin, la *roue-motrice* qui, par une simple élévation de la précédente roue-locomotrice, en la dégageant ainsi du sol, forme une machine rotative absolue. — Dans la seconde partie de notre atlas technique N°. 3, se trouvent produites, à la planche IV, la roue-pneumatique; à la planche V, la roue-locomotrice; et à la planche XIII, la roue-motrice, formant cette machine rotative absolue. — Bien

plus, cette dernière roue, telle qu'elle est représentée à la planche XIII, en la plaçant sur un foyer de chaleur, et en la mettant en communication avec un réservoir d'eau, y puise ce liquide et le transforme en vapeur, en formant ainsi une bouilloire génétique, que nous nommons *Pneumogène*, où la vapeur s'engendre principalement par le développement de la chaleur propre. Aussi, dans de très-petites dimensions, cette bouilloire génétique peut-elle remplacer les volumineuses chaudières actuelles que l'on est forcé de traîner sur les locomotives des chemins de fer; et en nous fondant sur l'idée répandue aujourd'hui généralement « que la chaudière est toute la machine à vapeur, » nous pouvons penser que, par ce pneumogène, joint à notre présente machine rotative absolue, nous amenons généralement ces puissantes machines modernes à leur dernier degré de perfection. — Nous ajouterons ici que ces mêmes machines pneumophoriques peuvent servir à former de formidables machines de guerre, en agissant immédiatement par une explosion modérée et continue de la poudre à canon.

Les atlas techniques que nous venons de citer, sont joints aux trois Mémoires qui, pour cette réforme scientifique de la locomotion, ont été présentés à la Commission des Ponts et Chaussées de France. Et ces atlas sont également déposés à Paris, au susdit Bureau de la Locomotion-spontanée, rue Paradis-Poissonnière, N°. 32, où les personnes qui voudraient en prendre connaissance, peuvent s'adresser par écrit, afin que l'on puisse, pour cette communication, leur indiquer un jour convenable.

C'est de ces mêmes trois Mémoires que nous allons extraire les lois principales de l'actuelle réforme scientifique de la locomotion terrestre; ces lois que, dans l'ouvrage présent, à la fin du Complément de la Réforme des Mathématiques, nous avons promis de donner ici, pour compléter la solution du troisième et dernier grand problème du monde physique. — Les voici.

Lois principales de la réforme scientifique de la locomotion terrestre.

Ainsi que nous l'avons dit dans le Document de la Commission, la base sur laquelle repose cette réforme, est établie, au commencement de l'Aperçu demandé par M. Arago, dans la phrase que voici : « Cette nouvelle locomotion prend son point d'appui, sa réaction, non dans le précaire frottement, réel ou virtuel, des roues contre le sol, comme on le prend actuellement dans la fausse locomotion sur les chemins de fer, mais dans la gravitation même du char, comme le prennent tous les êtres animés, lorsqu'ils

exercer une locomotion spontanée. — Et l'on a vu, dans ce même Document, que l'Académie des sciences de Paris n'a pu comprendre ce principe fondamental de notre présente réforme; ce qui, s'il en était besoin, offrirait une nouvelle preuve que les corps savants, et plus spécialement la savante Académie de Paris, ne sont pas compétents pour juger les principes fondamentaux des sciences. Et, en effet, pour juger de nouveaux principes scientifiques, il faudrait déjà connaître des principes supérieurs, dont on pourrait déduire les principes nouveaux qu'il s'agirait de juger; ce qui est une contradiction, parce qu'alors ces derniers principes ne seraient que des corollaires des principes supérieurs, et non des principes nouveaux. — Nous signalons ici cette espèce d'absurdité, parce que récemment un journaliste français prétendait que l'Académie des sciences de Paris est une institution sociale pour juger les principes scientifiques. Ce bon journaliste ignore donc que les corporations ou associations scientifiques sont obligées d'apprendre les principes nouveaux, tout comme les autres hommes, et que la savante Académie de Paris y met ordinairement un demi-siècle d'opposition, avant qu'elle parvienne à les comprendre. — En effet, la découverte de nouveaux principes scientifiques est une œuvre spontanée, une œuvre de création; et comme telle, une pareille découverte est l'attribut exclusif du génie. Or, le génie ne s'associe jamais avec personne, car il ne trouve jamais d'égaux parmi ses contemporains. — Les hommes qui s'associent pour former des corporations scientifiques, prouvent par là même leur impuissance de création ou de production des découvertes fondamentales. Ce sont toujours, et à coup sûr, des hommes inférieurs, des ouvriers secondaires, qui ne peuvent que déduire les conséquences des principes qu'on leur a appris; et cela même en réduisant leur but à sa signification ostensible, et en écartant ainsi, de ce but de leur association, toute idée de l'exploitation du public au nom des sciences. — Mais, laissons là ces abus des sciences, et revenons à notre susdit principe fondamental de la présente réforme de la locomotion.

En reconnaissant donc ce principe que le mouvement spontané d'un corps, c'est-à-dire, le mouvement d'un corps qui porte en lui-même sa force motrice, exige, pour qu'il soit possible, que, dans le même corps, il se trouve aussi un élément propre à former une réaction égale à l'action de cette force motrice, en vertu de la loi générale de la nécessité d'une réaction égale à toute action mécanique, on découvre facilement, comme un corollaire immédiat, que l'élément de réaction qui est ainsi requis pour rendre possible le mouvement spontané d'un corps, ne saurait être rien autre que la MASSE de ce corps; manifestée par sa GRAVITATION. Lors même qu'un tel corps à force propre trouverait un appui, et par conséquent une réaction, dans un corps étranger à lui, encore serait-ce par sa masse, mesurée par sa gravitation, qu'il exercerait cet appui, et par conséquent cette réaction étrangère, pour

rendre possible l'action de sa propre force motrice. — Ainsi, pour exercer cette force motrice dans la direction verticale, de haut en bas, la gravitation du corps formerait immédiatement la réaction nécessaire; et l'action de la force motrice ne saurait alors excéder la gravitation ou la pesanteur de ce corps. Et pour exercer cette même force motrice dans la direction verticale opposée, savoir, de bas en haut, le corps peut trouver un appui, et par conséquent la réaction nécessaire dans un corps étranger; mais il ne peut trouver ainsi cet appui ou cette réaction que par le moyen de sa masse, mesurée par sa gravitation.

Or, pour appliquer ce principe fondamental de la locomotion spontanée au mouvement des chars, il est manifeste que leur mouvement spontané, quel qu'il soit, ne saurait être produit que par une action verticale de sa propre force motrice. Et nous verrons en effet ci-après que tout mouvement spontané d'un char, quel que soit le mode de l'action de sa propre force motrice, équivaut toujours à une certaine action verticale de cette force motrice.

On conçoit de plus que, pour la production de ce mouvement spontané d'un char, sa propre force motrice verticale doit s'exercer sur un point situé dans le plan de la roue, et fixé matériellement à cette roue, parce que, dans toute position indépendante de la roue, l'action de cette force motrice verticale ne saurait produire un mouvement continu du char. — Il faut donc, pour l'établissement de la théorie générale du mouvement spontané des chars, découvrir les lois qui président à cette action verticale de leurs propres forces motrices; et ce sont ces lois que nous allons signaler ici rapidement, du moins les principales de ces lois, en les tirant des trois susdits Mémoires qui ont été mis sous les yeux du Conseil général des Ponts et Chaussées de France, et dans lesquels toutes ces lois se trouvent démontrées rigoureusement.

A cette fin, pour embrasser, dans son ensemble, la notation algébrique dont nous nous servirons, du moins pour les éléments principaux, fixons-les tout à coup, d'après la marque (3) du deuxième Mémoire, dans le registre suivant . . . (1)

M = poids total du remorqueur, avec tout ce qu'il porte.

μM = poids total des waggons ou de ce qui est remorqué.

α = angle de l'inclinaison de la voie sur le plan horizontal.

ρ = facteur de traction sur des plans exacts, tels que les chemins de fer; facteur qui mesure, en partie du poids du char, la résistance au mouvement, causée par le frottement de l'essieu contre les moyeux des roues, et dont la valeur moyenne est actuellement $\rho = \frac{1}{200}$.

φ = facteur général de traction, sur des routes quelconques; facteur qui mesure de même, en partie du poids du char, la résistance au mon-

RÉFORME DES

vement, causée, non-seulement par le frottement de l'essieu contre les moyeux des roues, mais de plus par tous les obstacles que les routes peuvent y opposer, et dont la valeur moyenne, sur les routes ordinaires, est actuellement à peu près $\varphi = \frac{1}{40}$.

P = résistance, estimée en poids, que, par son inertie, le char oppose à son mouvement ou à sa traction.

ψ = facteur de la résistance de la voie contre le mouvement des jantes des roues; facteur qui indique, dans le poids du char, la partie équivalente à cette résistance, et dont la valeur moyenne est entre $\psi = \frac{1}{4}$ et $\psi = \frac{1}{2}$.

ϵ = partie de l'intensité perdue dans la force de rotation des jantes, par l'influence de la précédente résistance ψ de la voie, et par suite d'un glissement des jantes sur la voie avec la vitesse n .

v = vitesse du mouvement de translation du char.

u = vitesse du mouvement de rotation des jantes du remorqueur.

$\frac{u}{v}$ = rapport entre la vitesse réelle u des jantes dans les roues du remorqueur et leur vitesse v , qui suffirait pour la translation du char; rapport qui mesure ainsi le degré de ce que l'on nomme le riflement de ces roues.

r = rayon des roues de ce remorqueur ou de cette machine locomotive.

a = distance, dans le plan de la roue r , du point d'application de la force motrice par rapport à la ligne centrale, c'est-à-dire, par rapport à la ligne qui passe par le centre de cette roue r , perpendiculairement à la direction α de la voie.

i = distance du même point d'application de la force motrice par rapport à la ligne de traction, c'est-à-dire, par rapport à la ligne qui, dans le plan de la roue r , passe par son centre, parallèlement à la direction α de la voie.

Π = pression verticale, estimée en poids, qu'exerce la force motrice au susdit point de son application, fixé par les précédentes coordonnées a et i .

λ = action qu'exerce cette pression Π sur le point de son application a et i , dans la direction perpendiculaire à la direction α de la voie.

h = vitesse avec laquelle s'exerce cette action ou pression perpendiculaire λ .

g = intensité de la gravitation à la surface de la terre, dont la valeur moyenne est notoirement $g = 9^m,80896$.

F = force de traction qui résulte de l'application de la force motrice AA , et qui, dans le plan de la roue r , passe par son centre, c'est-à-dire, par l'essieu dans la direction parallèle à la direction α de la voie.

MATHÉMATIQUES.

ccvii

G = force de rotation des jantes des roues r , force qui résulte de la même application de la force motrice Ah , et qui s'exerce dans la direction même de la rotation de ces roues r du remorqueur.

ζ = partie de la force de rotation G , qui est employée à opérer, par la susdite résistance ϕ de la voie, un point d'appui pour la réaction nécessaire à l'action efficace de la partie restante $(1 - \zeta)$ de la même force de rotation G .

Δ = dyname ou force d'un cheval, estimé par le poids de 75 kilogrammes élevés à la hauteur d'un mètre dans une seconde de temps.

n = nombre de ces dynames qui mesurent la présente force motrice Πh ,

$$\text{de sorte que l'on a } n\Delta = \Pi h = \frac{Ah}{\cos \alpha}.$$

Avant de procéder à la détermination de la relation qui existe entre la force motrice Πh et les forces résultantes F et G qui opèrent le mouvement du char, relation absolue qui, d'après notre loi de création, constitue ici manifestement la loi suprême de la locomotion spontanée des chars, voyons quelles sont les déterminations spéciales des éléments que nous venons de signaler dans le présent registre (1), en renvoyant, pour leur déduction, aux marques sous lesquelles elles sont produites dans le deuxième Mémoire. — Ainsi, d'après les marques (7) et (8), on aura, par suite des principes ordinaires de la mécanique, pour la résistance P , l'expression . . . (2)

$$P = (\varphi \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (\xi + \mu) \cdot M,$$

en faisant auxiliairement . . . (3)

$$\xi = 1 + \varphi \mu, \quad \text{ou sensiblement } \xi = 1.$$

Et d'après les marques (14) à (17), on aura, par suite de notre susdit principe fondamental de la locomotion spontanée, pour la limite de la force motrice Πh , l'expression . . . (4)

$$\Pi h < Mg; \quad \text{et par conséquent, } Ah < Mg \cdot \cos \alpha.$$

Enfin, d'après l'expression (116) de ce deuxième Mémoire, on aura, pour la détermination de la perte ω , l'expression . . . (5)

$$\omega = \frac{\phi \cdot \cos \alpha \cdot (e^{a\alpha} - 1)}{e^{a\alpha} + \phi \cdot \cos \alpha \cdot (e^{a\alpha} - 1)};$$

le nombre e étant la base des logarithmes naturels, et le coefficient v servant, tout à la fois, et pour préciser l'intensité spéciale de la force motrice Ah , et pour réduire en nombre abstrait l'exposant va dans le système métrique que l'on emploie pour mesurer la vitesse n du glissement des jantes. — Ainsi, lorsque ce glissement n'a pas lieu, on a $n = 0$; et alors, la perte ω est égale (39).

lement zéro. Et pour toute valeur finie de cette vitesse n du glissement des jantes, en observant que le coefficient νn est toujours un nombre fini et même assez considérable, l'unité disparaît sensiblement devant la puissance νn de e ; et l'on a alors généralement, pour la valeur de la perte ζ , la détermination très-approchée . . . (6)

$$\zeta = \frac{\psi \cdot \cos \alpha}{1 + \psi \cdot \cos \alpha}.$$

Procédons maintenant, après cette détermination préliminaire des éléments (1), à l'exposition des lois principales qui régissent le mouvement spontané des chars, et qui constituent ainsi les principes de la théorie de ce mouvement spontané, et par conséquent le principe de notre présente réforme scientifique de la locomotion terrestre. — Or, d'après la signification que, dans le registre (1), nous venons d'attacher aux éléments de cette locomotion terrestre, la première des lois principales en question, suivant la marque (18) du deuxième Mémoire, est manifestement . . . (7)

$$P \cdot \nu = F + (1 - \zeta) \cdot G.$$

Et c'est là évidemment, d'après notre loi de création, le PROBLÈME-UNIVERSSEL dans cette réforme de la locomotion terrestre. — Nous avons déjà dit plus haut, et on le conçoit ici mieux par la nature même de ce problème-universel, que la détermination des forces résultantes F et G , qui proviennent de la force motrice ΠA , et qui produisent immédiatement le mouvement du char, constitue, dans cette réforme de la locomotion, la LOI SUPRÊME qui, sur des voies solides, régit le mouvement spontané des locomotives quelconques. — Quant à la quantité ζ , qui entre dans le problème-universel (7), elle constitue manifestement une exception aux lois connues du mouvement inerte; car, d'après ces lois connues, on devrait avoir l'égalité . . . (8)

$$P \cdot \nu = F + G.$$

Et comme telle, cette quantité ζ , qui forme ainsi le caractère distinctif du mouvement spontané, constitue évidemment, d'après notre loi de création, dans notre présente réforme de la locomotion terrestre, le FAIT TÉLÉOLOGIQUE du mouvement spontané des locomotives quelconques.

Il ne nous reste donc qu'à déterminer, d'abord, cette quantité téléologique ζ , et ensuite, les forces immédiates F et G , pour avoir, en y joignant la relation (7), les TROIS LOIS FONDAMENTALES qui président au mouvement spontané des chars, et qui, dans leur ensemble, constituent la présente réforme de la locomotion terrestre.

Or, d'après l'expression (18) du deuxième Mémoire, nous avons d'abord, pour la quantité caractéristique ζ , la détermination générale et exacte . . . (9)

$$\zeta = \frac{\left\{ \varphi \cdot (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \right\} \cdot 6}{(\psi - \varphi \cdot 6) \cdot \cos \alpha};$$

MATHÉMATIQUES.

eccia

et c'est là, d'après ce que nous venons de dire sur le caractère distinctif et exceptionnel de cette quantité, le fait téléologique dans le mouvement spontané des locomotives quelconques. Et l'on voit qu'une expression approchée et suffisante de cette quantité caractéristique ζ , est . . . (10)

$$\zeta = \frac{6 \cdot \tan \alpha}{\psi - 9 \cdot 6};$$

la quantité auxiliaire ψ ayant toujours les valeurs (3).

Pour avoir enfin la détermination des forces immédiates F et G qui produisent le mouvement spontané des locomotives, formons, avec les quantités r , a et i , un angle x par l'expression . . . (11)

$$\tan x = \frac{a}{r + i},$$

ou bien par les expressions . . . (12)

$$\sin x = \frac{a}{s}, \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{r + i}{s};$$

en construisant la quantité auxiliaire . . . (13)

$$s = \sqrt{a^2 + (r + i)^2};$$

qui sera évidemment, dans le plan de la roue, la jonction du point du sol où s'appuie la roue, avec le point fixe auquel s'applique la force motrice AA . Nous nommerons conséquemment *levier idéal* cette ligne s , et *angle vecteur* l'angle x qui, dans le plan de la roue, est formé par ce levier idéal s et la susdite ligne centrale. Nous aurons alors, d'après les expressions (33) du deuxième Mémoire, pour les forces immédiates F et G dont il s'agit, la détermination générale . . . (14)

$$F = AA \cdot \tan x \cdot \left\{ \frac{\psi \cdot (r + i)}{r} + (1 - \psi) \cdot \cos x \cdot (1 - \cos x) \right\},$$

$$G = (1 - \psi) \cdot AA \cdot \tan x \cdot \left\{ \frac{r + i}{r} - \cos x \cdot (1 - \cos x) \right\}.$$

Et d'après ce que nous venons de faire remarquer, c'est cette détermination générale des forces F et G qui, suivant notre loi de création, constitue, dans notre présente réforme de la locomotion terrestre, la loi suprême du mouvement spontané des locomotives quelconques.

Nous avons donc, dans les présentes trois déterminations générales (7), (9), (14), les trois lois fondamentales de la théorie du mouvement spontané des chars, savoir, son *problème-universel* (7), son *fait téléologique* (9), et sa *loi suprême* (14). — Et comme nous l'avons déjà dit, ce sont ces trois lois fondamentales qui constituent les principes de notre réforme scientifique de la locomotion terrestre.

Nous nous bornerons ici à signaler quelques corollaires principaux de ces

lois; corollaires qui, dans leur ensemble, constituent la théorie générale du mouvement spontané des chars, et qui tous sont déduits, en détail, dans nos trois Mémoires soumis au Conseil général des Ponts et Chaussées de France. — Pour cela, et afin d'abréger les expressions, formons les deux quantités auxiliaires . . . (15)

$$A = \tan \alpha = \frac{a}{r+i}, \quad \text{et}$$

$$B = \cos \alpha \cdot (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{(r+i) \cdot \left\{ 1 - (r+i) \right\}}{r^2}.$$

Nous aurons alors, pour les forces immédiates F et G, qui forment la loi suprême (14), les expressions plus simples . . . (16)

$$F = Ah \cdot \left\{ \varpi \cdot (1+j) + (1-\varpi) \cdot B \right\} \cdot A,$$

$$G = Ah \cdot \left\{ (1+j) - B \right\} \cdot (1-\varpi) \cdot A;$$

en faisant . . . (17)

$$j = \frac{i}{r}.$$

Et, pour la vérification de ces expressions, observons que, par les présentes formules (16), on obtient immédiatement, pour la somme des forces F et G, la valeur . . . (18)

$$F + G = Ah \cdot (1+j) \cdot A = Ah \cdot \frac{a}{r};$$

qui, pour $a = r$, devient . . . (19)

$$F + G = Ah;$$

comme cela doit être d'après les principes connus du mouvement inerte des corps. On reconnaît ainsi de nouveau, et mieux encore, conformément à ce que nous avons déjà remarqué dans l'expression (8), que c'est la quantité ζ qui, dans le problème-universel (7) du présent mouvement spontané, forme l'exception caractéristique de ce mouvement par rapport au mouvement inerte.

Or, d'après ce problème-universel (7), on a, pour la détermination de la vitesse v , l'expression . . . (20)

$$v = \frac{F + (1-\zeta) \cdot G}{P}.$$

Substituant donc, pour les forces F et G, leurs valeurs (16), et pour la résistance P, sa valeur (2), nous obtenons, pour cette vitesse v du mouvement spontané des chars, l'expression complètement déterminée . . . (21)

$$v = \frac{(1+j) - \zeta \cdot (1-\varpi) \cdot \left\{ (1+j) - B \right\}}{(\varpi \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (b + \mu)} \times \frac{A \cdot Ah}{M};$$

qui, pour le cas plus spécial de la locomotion terrestre, en faisant $i = 0$, et

par conséquent $j = 0$, devient . . . (22)

$$v = \frac{1 - \zeta \cdot (1 - \varpi) \cdot (1 - B)}{(\varphi \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (\xi + \mu)} \times \frac{A \cdot \Delta h}{M}.$$

Et comme, d'après la notation adoptée dans le registre (1), on a, pour la force motrice Δh , estimée en nombre η de dynames Δ ou de forces de chevaux, la valeur . . . (23)

$$\Delta h = \eta \Delta \cdot \cos \alpha = \eta \cdot 75^{\text{m}} \cdot \frac{1 \text{ mètre}}{1 \text{ seconde}} \cdot \cos \alpha = 75 \cdot \eta \cdot \cos \alpha;$$

l'expression (22), déterminée ainsi en nombre de dynames ou de forces de chevaux, sera . . . (24)

$$v = \frac{75 \cdot \eta \cdot A \cdot \left\{ 1 - \zeta \cdot (1 - \varpi) \cdot (1 - B) \right\}}{(\varphi + \tan \alpha) \cdot (\xi + \mu) \cdot M};$$

en observant que, pour ce cas spécial où $i = 0$, et par conséquent $j = 0$, les expressions (15) donnent, pour les deux quantités auxiliaires A et B , les valeurs . . . (25)

$$A = \frac{a}{r}, \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt{(1 + A^2)} - 1}{1 + A^2}.$$

Pour compléter ces lois principales, il nous reste à faire connaître celle qui détermine le rapport entre la vitesse u de la rotation des jantes de la locomotive, et la vitesse v de sa translation. — Or, d'après l'expression (63) du deuxième Mémoire, cette loi, qui fixe ainsi le riflement des roues de la locomotive, est . . . (26)

$$\frac{u}{v} = \frac{6 \cdot (1 + j) + \mu \cdot Y}{6 \cdot \left\{ (1 + j) - Y \right\}};$$

en faisant auxiliairement . . . (27)

$$Y = \zeta \cdot (1 - \varpi) \cdot \left[(1 + j) - B \right].$$

Nous avons maintenant toutes les lois principales du mouvement spontané des chars; lois dont on pourra déduire toutes les circonstances de cette spéciale locomotion terrestre, comme nous les avons effectivement déduites dans les trois Mémoires présentés au Conseil général des Ponts et Chaussées de France. — Nous nous bornerons ici à déduire, de ces lois générales, les deux cas particuliers et extrêmes qui correspondent respectivement, l'un, au maximum d'efficacité, et l'autre, au minimum d'efficacité, dans ce mouvement spontané des chars, en observant que ces deux cas extrêmes constituent manifestement, le premier, la *véritable locomotion spontanée*, et le second, la *fausse locomotion spontanée* des chars, et en reconnaissant que ces deux cas extrêmes dépendent uniquement de la détermination spéciale des ordonnées a et i du point où s'applique la force motrice.

Or, d'après les expressions (71) du deuxième Mémoire, ces deux cas en question sont déterminés respectivement par les relations suivantes . . . (28)

$$\text{Vraie locomotion spontanée, . . . } \frac{F}{G} = \text{maximum};$$

$$\text{Fausse locomotion spontanée, . . . } \frac{F}{G} = \text{minimum};$$

comme cela est d'ailleurs évident immédiatement; car c'est du rapport de la force F de traction-propre à la force G de simple rotation des roues, que dépend évidemment l'efficacité du mouvement spontané des chars. — Nous allons donc déduire successivement, de ces deux relations spéciales, les conditions caractéristiques de chacun de ces deux cas extrêmes de la locomotion spontanée des chars.

Pour ce qui concerne d'abord le premier de ces cas, celui de la vraie locomotion spontanée, sa relation spéciale (28), suivant les expressions (16) des forces immédiates F et G, sera . . . (29)

$$\frac{\varphi.(1+j) + (1-\varphi).B}{(1+j) - B} = \text{maximum};$$

et donnera l'équation . . . (30)

$$\frac{dB}{dx} = 0, \quad \text{savoir,} \quad -1 + 2.\cos x = 0;$$

d'où l'on tire . . . (31)

$$\cos x = \frac{1}{2}; \quad \text{et par conséquent,} \quad \tan x = \sqrt{3}.$$

On aura donc, en vertu de la première des expressions (15), pour la détermination la plus convenable des ordonnées a et i du point où doit s'appliquer la force motrice ΔH , l'équation . . . (32)

$$a = (r + i).\sqrt{3}.$$

Et par conséquent, lorsqu'on fait $i = 0$, comme on peut toujours le faire convenablement dans la locomotion terrestre, on aura, pour cette détermination la plus favorable de l'ordonnée a , l'expression . . . (33)

$$a = r.\sqrt{3}.$$

C'est donc cette détermination du levier a qui, en produisant la plus grande efficacité dans le mouvement spontané des chars, caractérise ce que nous nommons la *vraie locomotion spontanée*. Et par conséquent, c'est cette détermination que nous donnons au levier a dans notre locomotive à traction-propre, nommée *dromade*, qui est destinée à opérer la transition de la fausse locomotion actuelle sur les chemins de fer à la vraie locomotion spontanée sur ces voies métalliques.

Or, avec cette détermination (33) du levier a , les expressions (25) des

quantités auxiliaires A et B, recevront les valeurs numériques . . . (34)

$$A = \sqrt{3}, \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{4}.$$

Substituant donc ces valeurs dans l'expression générale (24) de la vitesse v du mouvement, on obtiendra, pour cette vitesse, dans le cas présent de la vraie locomotion spontanée, opérée par notre dromada, l'expression . . . (35)

$$v = \frac{75n \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{4} \cdot \zeta \cdot (1 - \varpi) \right\} \cdot \sqrt{3}}{(\varphi + \tan \alpha) \cdot (6 + \mu) \cdot M};$$

dont on tire, pour la détermination de la force n , l'expression réciproque . . . (36)

$$n = \frac{(\varphi + \tan \alpha) \cdot (6 + \mu) \cdot M v}{75 \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{4} \cdot \zeta \cdot (1 - \varpi) \right\} \cdot \sqrt{3}};$$

expressions dans lesquelles, d'après les déterminations préliminaires (6) et (10), on a la quantité . . . (37)

$$\zeta \cdot (1 - \varpi) = \frac{6 \cdot \tan \alpha}{(\psi - \varphi 6) \cdot (1 + \psi \cdot \cos \alpha)},$$

en ne perdant pas de vue que la quantité auxiliaire 6 est toujours sensiblement égale à l'unité.

Et si l'on introduit également les présentes valeurs numériques (34) de A et de B, dans la loi secondaire (26), qui fixe le riflement des roues, en y faisant également $l = 0$, on obtiendra, pour la vraie locomotion spontanée, et par conséquent pour le riflement des roues de notre dromade ou de la vraie locomotive à traction-propre, l'expression . . . (38)

$$\frac{n}{v} = \frac{46 + 3\zeta \cdot (1 - \varpi) \cdot \mu}{46 - 3\zeta \cdot (1 - \varpi)}.$$

Telles (36) et (38) sont donc les deux lois principales de la vraie locomotion spontanée des chars, de cette locomotion distinctive où, par la détermination la plus favorable (33) du levier α , se trouve produite la plus grande efficacité du mouvement. — Et c'est aussi d'après ces deux lois, telles qu'elles sont scientifiquement réalisées dans notre dromade ou locomotive à traction-propre, que l'on a calculé toutes les circonstances de cette vraie locomotion spontanée, dans les deux tables provisoires N°. 2 et 3, qui sont reproduites dans le précédent Document sur la réforme de la locomotion terrestre.

Voyons maintenant quelles sont les conditions caractéristiques de la fausse locomotion spontanée, en les déduisant, à leur tour, de la relation spéciale (28) de cette fausse locomotion. — Or, cette relation, qui forme le minimum du rapport entre les forces immédiates F et G, a lieu essentiellement lorsque la force de traction-propre F est zéro. Nous aurons donc, pour ce cas de

fausse locomotion, où l'efficacité du mouvement est la plus petite, d'après la première des expressions (16), l'équation . . . (39)

$$0 = \{ \varpi.(1 + j) + (1 - \varpi).B \} . A .$$

Et cette équation se réalise immédiatement, par chacun de ses deux facteurs, lorsque . . . (40)

$$A = 0 ; \quad \text{et par conséquent,} \quad a = 0 .$$

En effet, par suite de la seconde des expressions (25) des quantités A et B, on a alors également $B = 0$; et par suite de l'expression générale (5) de la perte ϖ , en considérant que, lorsque le levier $a = 0$, la vitesse n de glissement est nulle, on a de plus $\varpi = 0$; de sorte que les deux facteurs de l'équation (16) sont zéro, lorsque $A = 0$. Et alors, quand même la force motrice Λh serait infinie, la force de traction-propre F, d'après les expressions (16), serait toujours . . . (41)

$$F = \Lambda h . 0^2 = 0 .$$

Mais, d'après ces mêmes expressions (16), la force de rotation G serait alors . . . (42)

$$G = \Lambda h . (1 + j) . A = \Lambda h . \frac{a}{r} ;$$

de sorte qu'en concevant que, lorsque le levier a est ainsi indéfiniment petit, la force motrice Λh , réglée par une quantité finie λ , soit . . . (43)

$$\Lambda h = \lambda . \frac{r}{a} ,$$

c'est-à-dire, indéfiniment grande, la force de rotation G serait toujours une quantité finie, savoir . . . (44)

$$G = \lambda ,$$

la quantité finie λ étant indéterminée et arbitraire. — On aurait donc, pour cette fausse locomotion, les conditions caractéristiques . . . (45)

$$F = 0 , \quad \text{et} \quad G = \lambda ;$$

c'est-à-dire, qu'il existe effectivement, dans le système général de la locomotion spontanée, un cas, correspondant au levier $a = 0$, et par conséquent aux quantités $A = 0$ et $B = 0$, dans lequel la force de traction F devient toujours zéro, et la force de rotation G peut former une quantité finie et réelle λ . Et par conséquent, toutes les fois que, dans le système général de locomotion spontanée, on n'opère immédiatement qu'une simple force de rotation G des roues de la locomotive; n'importe par quel moyen, comme on le fait actuellement sur les chemins de fer existants, on rentre dans le présent cas singulier (45) de la *fausse locomotion spontanée*, où il n'existe point de force de traction F, et où, par conséquent, le mouvement des chars n'est ainsi opéré que par cette force de rotation G des roues.

Nous découvrons ainsi la vraie nature du procédé de locomotion dont on se sert actuellement sur les chemins de fer, et nous reconnaissons sur-le-champ que ce procédé, qui exclut toute force de traction F , cette force distinctive et caractéristique de la vraie locomotion spontanée, n'est rien autre qu'un *procédé de fausse locomotion spontanée*, constituant le cas singulier (45), et formant, comme tel, le cas le plus défavorable dans le système général de locomotion spontanée. — Nous allons d'ailleurs le prouver positivement, dans toutes les circonstances, en déduisant ici, de nos susdites lois générales (21) et (26) de la locomotion spontanée, les lois spéciales qui régissent ce cas singulier (45), constituant la présente locomotion sur les chemins de fer.

Pour cela, introduisons successivement, dans nos lois générales (21) et (26), les présentes quantités $\alpha = 0$, $\vartheta = 0$, et par conséquent $A = 0$ et $B = 0$, en observant que, d'après la présente détermination (42), la quantité générale $Ak.(1+j).A$, forme la force G de rotation des roues de la locomotive. — Nous obtiendrons ainsi, d'abord, en vertu de la loi générale (21), pour la vitesse v dans cette fausse locomotion spontanée des chars, l'expression . . . (46)

$$v = \frac{(1 - \zeta).G}{(q \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (\delta + \mu).M};$$

en ne perdant pas de vue que cette force de rotation G peut alors être produite par un moyen quelconque. — Ainsi, en supposant qu'elle est produite par l'action d'une machine à vapeur, comme on la produit actuellement sur les chemins de fer, si l'on désigne par Θ la pression qui, estimée en poids, est exercée sur le piston de cette machine à vapeur, par n le rayon de la manivelle à laquelle la bielle du piston imprime la rotation, et toujours par u la vitesse réelle de la rotation des jantes dans les roues de la locomotive, on aura manifestement . . . (47)

$$G = \frac{2\pi}{\pi r} \cdot \gamma \Theta \cdot n,$$

en désignant par π la circonférence du cercle dont le rayon est l'unité, et en marquant par γ la réduction de la force motrice dans la transformation du mouvement de va-et-vient du piston et de sa bielle, en mouvement de rotation de la manivelle n , réduction qui est ici à peu près $\gamma = \frac{9}{10}$. Et si l'on estime de plus la force de la machine à vapeur en nombre Δ de dynames à nu de forces de chevaux, c'est-à-dire, si l'on fait . . . (48)

$$\frac{2\pi}{\pi r} \cdot \Theta u = \Delta = n \cdot 75;$$

la force de rotation G , d'après (47), sera . . . (49)

$$G = 75 \cdot \gamma n.$$

(40).

RÉFORME DES

On aura donc définitivement, d'après (46), pour la vitesse v du mouvement dans cette fausse locomotion que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer, l'expression . . . (50)

$$v = \frac{75 \cdot \gamma \pi \cdot (1 - \zeta)}{(\varphi \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (6 + \mu) \cdot M};$$

dont on tire, pour la détermination de la force motrice η , l'expression réciproque . . . (51)

$$\eta = \frac{(\varphi \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (6 + \mu) \cdot M v}{75 \cdot \gamma \cdot (1 - \zeta)};$$

expressions dans lesquelles, d'après la détermination suffisante (10) de la quantité téléologique ζ , on a . . . (52)

$$1 - \zeta = \frac{\psi - 6 \cdot (\varphi + \tan \alpha)}{\psi - \varphi 6}.$$

Introduisant ensuite, dans la loi secondaire (26), les susdites valeurs $\psi \equiv 0$ et $B \equiv 0$, correspondant au présent cas de la fausse locomotion spontanée, nous obtiendrons, pour cette loi secondaire, et par conséquent pour le riflement des roues des locomotives dont on se sert aujourd'hui sur les chemins de fer, l'expression . . . (53)

$$\frac{\mu}{v} = \frac{6 + \mu \zeta}{6 \cdot (1 - \zeta)};$$

où l'on a, pour les quantités ζ et $(1 - \zeta)$, les valeurs (10) et (52), en considérant toujours la quantité 6, comme étant sensiblement égale à l'unité.

Telles (51) et (53) sont donc, à leur tour, les deux lois principales de la fausse locomotion spontanée des chars, de cette locomotion que l'on pratique aujourd'hui sur les chemins de fer, et dans laquelle, par l'absence totale de la force de traction F , on ne peut produire que la plus petite efficacité du mouvement. — Et c'est aussi d'après ces deux lois, telles qu'on les réalise par routine sur les chemins de fer, que l'on a calculé toutes les circonstances de cette fausse locomotion, dans les deux susdites tables provisoires N^{os} 2 et 3, qui sont reproduites dans le précédent Document sur la réforme de la locomotion terrestre.

Mais, ce qu'il faut ici remarquer essentiellement, c'est que ce sont précisément ces lois (51) et (53) que, dans le Document que nous venons de nommer, nous proposons à la Commission des Ponts et Chaussées pour en faire des expériences sur les chemins de fer, afin de constater, par ces expériences, la vérité de notre présente réforme de la locomotion. On voit, en effet, par la manière dont ces lois (51) et (53) sont ici déduites de nos lois générales (21) et (26), que la vérité de ces lois spéciales (51) et (53), qui président à la fausse locomotion actuelle sur les chemins de fer, implique nécessairement la vérité des lois générales (21) et (26), qui régissent toute la locomotion

spontanée des chars, et par conséquent la vérité des lois spéciales (36) et (38), qui président à la susdite vraie locomotion spontanée, et qui forment également un cas particulier des lois générales (21) et (26). Et pour mieux saisir cette nécessaire connexion logique entre les lois générales (21) et (26) de toute la locomotion spontanée, et les présentes lois spéciales (51) et (53) de la fausse locomotion actuelle sur les chemins de fer, il suffit de déduire, de l'expression (47) de la force de rotation G , la pression Θ qui s'exerce sur le piston de la machine à vapeur, en éliminant, de cette expression (47), d'une part, la force de rotation G par la loi primitive (46), et de l'autre part, la vitesse réelle u de la rotation des roues par la loi secondaire (53). On obtiendra ainsi, pour cette pression Θ , la détermination générale . . . (54)

$$\Theta = \zeta M \cdot (\varphi \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot \frac{6 + \mu}{\gamma \cdot (6 + \mu \zeta)} \cdot \frac{\pi r}{2\lambda},$$

qui impliquera manifestement la vérité des lois théoriques et générales (21) et (26), combinées avec le moyen pratique (47) de leur fausse réalisation actuelle sur les chemins de fer. Aussi, est-ce là, dans cette expression (54), en y faisant $\gamma = 1$, la troisième et principale loi que, dans le susdit Document, nous proposons à la Commission des Ponts et Chaussées pour constater, par l'expérience, à l'aide d'un simple manomètre, la vérité des lois théoriques qui constituent les principes de notre réforme de la locomotion.

Procédons maintenant à notre deuxième élément primordial de cette réforme de la locomotion terrestre, c'est-à-dire, à l'élément géométrique qui, comme nous l'avons vu dans l'Aperçu précédent, consiste dans la position libre et excentrique de l'essieu dans les roues, et qui, par la seule force de pression qu'exerce alors le poids du char, devient l'élément statique de cette réforme de la locomotion, et se manifeste ainsi principalement dans la locomotion *INERTA*; tandis que la traction-propre dont nous venons de fixer les lois, constitue le premier élément primordial de cette réforme, c'est-à-dire, l'élément *mécanique* qui, comme nous l'avons vu également dans l'Aperçu précédent, consiste dans l'application spéciale de la propre force motrice du char, par laquelle il devient l'élément *dynamique* dans notre réforme de la locomotion, et se manifeste alors principalement dans la locomotion *SPONTANÉE*.

Or, pour fixer également les lois du deuxième élément primordial de notre réforme, c'est-à-dire, de l'élément géométrique ou statique, concevons des roues dans lesquelles la position de l'essieu soit libre, et puisse conséquemment devenir excentrique, telles que sont nos *roues à rails-circulaires*, par lesquelles la masse du char se trouve ainsi détachée complètement du sol. Ces roues seront nécessairement composées de deux roues, savoir, d'une roue *extérieure* qui, détachée de la masse du char, roule librement sur le sol, et porte dans son plan des rails-circulaires, et d'une roue *intérieure* qui, portant l'essieu, et se trouvant ainsi attachée à la masse du char, roule libre-

nient sur ces rails-circulaires, par le moyen de roulettes, attachées à la circonférence extérieure de cette roue intérieure. Désignons toujours par r le rayon de la roue extérieure; par r le rayon de la roue intérieure, auquel sont attachés les axes des roulettes; par l le rayon de ces axes, et par w le rayon de ces roulettes. Désignons de plus par b l'embase des roulettes, c'est-à-dire, la largeur de l'anneau par lequel elles s'appuient contre la roue intérieure qui porte les axes de ces roulettes; par c la largeur de l'anneau qui forme le rebord des roulettes, par lequel elles s'appuient contre les côtés latéraux des rails-circulaires qui sont attachés à la roue extérieure; par β le facteur du frottement de l'embase b des roulettes, et par γ le facteur du frottement de leur rebord c , frottements qui proviennent du dévers de la roue entière, du dévers dont nous désignerons l'angle moyen par δ . Désignons enfin par R le rayon des rails-circulaires, dont les centres doivent naturellement coïncider avec les axes des roulettes, lorsque les centres de la roue extérieure et de la roue intérieure coïncident ensemble. Nous aurons alors, pour l'excentricité e de ces roues, l'expression . . . (55)

$$e = R - w.$$

Fa la première chose que nous ayons ici à connaître, c'est manifestement la réduction λ du susdit facteur de traction p [registre (1)], telle que cette réduction λ est opérée sur les axes l des roulettes w dans nos présentes roues à rails-circulaires. Or, d'après l'expression (xlviii) du deuxième Complément du premier Mémoire, ou d'après l'expression (81) du troisième de ces Mémoires présentés aux Ponts et Chaussées de France, cette réduction en question suit la loi générale . . . (56)

$$\lambda p = \frac{e}{R} \cdot \left(1 + \frac{l}{2w} \right) \cdot \left\{ p \cdot \cos \delta + \frac{R}{r} \cdot \frac{\sin \delta}{2w} \cdot [(2l + b) \cdot \beta + c \cdot \gamma] \right\};$$

où l'on voit que le terme qui dépend du $\sin \delta$ et du facteur $\frac{e}{r}$ est toujours une quantité assez petite pour que l'on puisse le négliger, surtout lorsque la route est assez bonne pour ne pas causer un dévers δ considérable. — Sur les chemins de fer, où l'on a toujours $\delta = 0$, la présente réduction du tirage p des roulettes sera . . . (57)

$$\lambda p = \frac{e}{R} \cdot \left(1 + \frac{l}{2w} \right) \cdot p;$$

et ce tirage λp des roulettes, dans nos roues à rails-circulaires, sera toujours, sur les chemins de fer, beaucoup plus petit que le tirage p des roues ordinaires dont on se sert actuellement sur ces voies métalliques, parce que, d'après l'expression (170) du troisième Mémoire, le rapport le plus convenable entre les quantités e et R , peut se réduire jusqu'à la quantité . . . (58)

$$\frac{e}{R} = \frac{3}{4}.$$

MATHEMATIQUES.

101

Sur les routes ordinaires, ce rapport peut même se réduire convenablement à une quantité plus petite; de sorte que, d'après la loi (56), le tirage λp des roulettes, dans nos roues à rails-circulaires, sera toujours, sur ces routes ordinaires, beaucoup plus petit que le susdit tirage q [registre (1)] des roues ordinaires.

Après avoir ainsi fixé préliminairement le tirage λp des roulettes dans nos roues à rails-circulaires, qui, par leur excentricité, constituent le deuxième élément primordial de notre réforme générale de la locomotion, procédons maintenant aux lois qui président à l'action de cet élément, tout à la fois, et géométrique et statique, par lequel se trouve, à son tour, réalisée notre réforme de la locomotion inerte. — Or, en ne perdant pas de vue notre susdite ligne centrale de la roue [registre (1)], concevons des lignes qui lui soient parallèles, et qui passent par les centres de nos rails-circulaires, lignes que nous nommerons *lignes centrales des rails*, et dont les lignes perpendiculaires, qui passeront également par les centres des rails, formeront les *lignes de traction de rails*, et seront parallèles à notre susdite ligne de traction de la roue [registre (1)]. Concevons maintenant, sur chacun de ces rails-circulaires, le point où, dans le mouvement de nos roues composées, se trouveront appuyées les roulettes de la roue intérieure, et désignons par ξ l'arc des rails, compris entre ce point d'appui des roulettes et l'intersection inférieure des rails avec leurs respectives lignes centrales, arc ξ que nous nommerons *arc générateur du mouvement*, par les raisons que voici.

En observant que la masse du char est répartie sur les roulettes de la roue intérieure, on peut considérer la *pression* de cette masse sur les rails-circulaires de la roue extérieure, comme formant, dans la direction parallèle à la ligne centrale, la susdite *force motrice* Ah , pour l'action de notre premier élément primordial, de cet élément mécanique et spécialement dynamique qui opère la locomotion spontanée. En effet, désignant par N le poids de nos roues à rails-circulaires, et conservant ici toute la notation que nous avons adoptée dans le registre (1), nous aurons manifestement, d'après l'expression (9) du troisième Mémoire, pour la présente détermination de la force motrice Ah , l'expression . . . (59)

$$Ah = (M - N) \cos \alpha \cdot g.$$

De plus, en suivant les expressions ultérieures du troisième Mémoire, les susdites coordonnées a et l du point où s'applique cette force, seront ici . . . (60)

$$a = e \sin \xi, \quad \text{et} \quad l = -e \cos \xi;$$

la quantité e étant la présente excentricité (55) de nos roues à rails-circulaires. Et nous aurons alors, d'après les présentes formules (11) à (13), pour l'angle vecteur α et pour le levier idéal x , les déterminations . . . (61)

RÉFORME DES

$$\sin \alpha = \frac{e \cdot \sin \xi}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{r - e \cdot \cos \xi}{r}; \quad \text{et}$$

$$s = \sqrt{a^2 + (r + e)^2} = \sqrt{r^2 - 2re \cdot \cos \xi + e^2}.$$

Enfin, d'après les présentes expressions (15), les quantités auxiliaires A et B qui entrent dans la construction (16) des forces immédiates F et G, seront ici . . . (62)

$$A = \tan \alpha = \frac{e \cdot \sin \xi}{r - e \cdot \cos \xi},$$

$$B = \cos \alpha \cdot (1 - \cos \alpha) = \frac{(r - e \cdot \cos \xi) \cdot \{s - (r - e \cdot \cos \xi)\}}{r^2 - 2re \cdot \cos \xi + e^2}.$$

Et par conséquent, ces forces F et G, qui opèrent immédiatement le mouvement du char, et dont la première F est une force de traction, dans la direction α de la voie, et la seconde G, une force de rotation des jantes, dans la direction de leur mouvement rotatif, recevront ici, d'après leur construction générale (16), les déterminations spéciales . . . (63)

$$F = (M - N) \cdot \cos \alpha \cdot g \cdot \{ \varpi \cdot (1 - j'') + (1 - \varpi) \cdot B \} \cdot A,$$

$$G = (1 - \varpi) \cdot (M - N) \cdot \cos \alpha \cdot g \cdot \{ (1 - j') - B \} \cdot A;$$

la quantité j' ayant ici la valeur générale . . . (64)

$$j' = \frac{e \cdot \cos \xi}{r},$$

dont la valeur moyenne, ou du moins sa première détermination, sera . . . (65)

$$j' = \frac{e \cdot \cos 30^\circ}{r} = \frac{e \cdot \sqrt{3}}{2r}.$$

Ainsi, en introduisant ces valeurs (63) des forces F et G dans notre présent problème-universel (7) de la locomotion spontanée, nous obtiendrons, pour cette locomotion spontanée de nos roues à rails-circulaires, telle qu'elle sera produite par la simple pression de la masse du char, l'équation . . . (66)

$$P \cdot v = (M - N) \cdot \cos \alpha \cdot g \cdot (1 - j') \cdot \left\{ 1 - \zeta \cdot (1 - \varpi) \cdot \left[1 - \frac{B}{1 - j'} \right] \right\} \cdot A,$$

dans laquelle, d'après (2) et (3), on aura toujours . . . (67)

$$P = (q \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (G + \mu) \cdot M = (q \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot [\mu] \cdot M,$$

en faisant . . . (68)

$$[\mu] = G + \mu = 1 + q\mu + \mu.$$

Et cette équation générale (66) du mouvement spontané de nos roues à rails-

circulaires, en y introduisant la présente valeur (62) de A , se réduira à la forme plus simple et plus explicite . . . (69)

$$rP.v = (M - N) \cdot \cos \alpha \cdot gH \cdot e \cdot \sin \xi ;$$

dans laquelle H formera la quantité téléologique . . . (70)

$$H = 1 - \zeta \cdot (1 - \zeta) \cdot \left[1 - \frac{B}{1 - f} \right],$$

qui, d'après les expressions (9) ou (10), devient égale à l'unité sur la voie horizontale.

Mais, il faut ici remarquer essentiellement que, pour soutenir ainsi les roulettes à la hauteur constante de l'arc générateur ξ , il faut, durant la rotation des rails correspondant à cet arc ξ , soulever les roulettes, et par conséquent le char, au-dessus de la direction α de la voie, d'une quantité $e \cdot (1 - \cos \xi)$; de sorte que cette élévation constante des roulettes et du char, dans l'étendue correspondante $\xi \cdot r$ de la voie, équivaut à l'ascension du char sur une pente idéale dont l'inclinaison ω , comparée à l'inclinaison α de la voie, serait déterminée par l'expression . . . (71)

$$\tan \omega = \frac{e \cdot (1 - \cos \xi)}{\xi \cdot r};$$

en faisant auxiliairement . . . (72)

$$\theta = \frac{M - N}{M} = 1 - \frac{N}{M};$$

et en observant que, dans cette comparaison des arcs α et ω , la masse entière M du char se trouve élevée sur la pente réelle α , et seulement la masse $(M - N)$ se trouve élevée sur la pente idéale ω . Et par suite de cette élévation constante de la masse $(M - N)$ sur la pente idéale ω , la résistance P au mouvement du char se trouve nécessairement diminuée en ce que, au lieu de l'ascension de la masse M sur la pente entière α , il ne restera que l'ascension de cette masse M sur la pente $(\alpha - \omega)$. Ainsi, la présente expression (67) de cette résistance P sera proprement . . . (73)

$$P = [\varphi \cdot \cos \alpha + \sin(\alpha - \omega)] \cdot [\mu] \cdot M;$$

en rejetant ici, pour la pratique, les petites quantités du troisième ordre. Et introduisant alors cette valeur dans l'équation (69), nous obtiendrons définitivement, pour la détermination complète et exacte du mouvement spontané de nos roues à rails circulaires, en tant que ce mouvement sera opéré par la simple réaction de la masse du char, les deux équations conjointes et générales . . . (74)

$$r \cdot \left\{ \varphi \cdot \cos \alpha + \sin(\alpha - \omega) \right\} \cdot [\mu] \cdot v = \theta \cdot \cos \alpha \cdot gH \cdot e \cdot \sin \xi,$$

$$\tan \omega = \frac{e \cdot (1 - \cos \xi)}{\xi \cdot r};$$

(41)

les quantités $[\mu]$, H , et θ étant données par les formules (68), (70) et (72). — Or, c'est de ces deux équations qu'il faut manifestement déduire l'expression générale de l'arc générateur ξ qui, par les conditions statiques de la simple pression de la masse $(M - N)$ du char, rend possible, avec la vitesse v , ce mouvement spontané de nos roues à rails-circulaires sur une pente quelconque α . Et observons que, lorsque le poids N des roues elles-mêmes est considéré comme nul comparativement au poids total M du char, la quantité auxiliaire θ devient égale à l'unité, et les poids M et N disparaissent entièrement de nos deux équations fondamentales (74) de ce spécial mouvement spontané; de sorte que, quelle que soit la masse ou le poids M du char, ce poids suffira toujours, par sa simple pression sur les rails-circulaires, pour opérer le mouvement du char avec une vitesse donnée v , en faisant agir cette pression à l'extrémité de l'arc générateur ξ , déterminé par ces équations (74).

Avant de procéder à cette détermination générale de l'arc générateur ξ , observons que, pour la voie horizontale, où la quantité téléologique H devient égale à l'unité, comme nous l'avons déjà remarqué sous la marque (70), si l'on suppose $[\mu] = 1$, en ne considérant ainsi que le simple mouvement du char, avec toute abstraction de sa fonction de remorqueur, les deux présentes équations générales deviennent . . . (74')

$$r \cdot \left\{ \varphi \cdot \cos \alpha + \sin(\alpha - \omega) \right\} \cdot v = \theta \cdot \cos \alpha \cdot g \cdot \sin \xi,$$

$$\tan \omega = \frac{\theta \cdot (1 - \cos \xi)}{\xi \cdot r};$$

et ce sont là les deux équations transcendentes d'un ordre supérieur que, sous la marque (7), dans le Programme scientifique (page 22), qui est à la tête de l'ouvrage présent, nous avons proposées comme un des exemples difficiles de l'application de notre problème-universel (1) des mathématiques à la solution générale de tous les problèmes de ces sciences (*).

Nous allons maintenant reproduire ici, dans toute sa généralité, la solution des présentes équations transcendentes (74) et (74'), telle que, d'après l'indication du Programme scientifique que nous venons de rappeler, cette solution se trouve donnée, par notre méthode secondaire, c'est-à-dire, par l'application de notre problème-universel des mathématiques, d'abord, à la marque (383) du premier, et ensuite, à la marque (75) du dernier de nos trois Mémoires

(*) Le deuxième exemple difficile que, dans le même Programme scientifique, nous avons alligné à la marque (8), et qui constitue une équation différentielle d'un ordre transcendant, a été pris dans la théorie générale par laquelle, dans la première Mémoire, nous avons déterminé la présente (36) réduction $\lg$ du tirage des roulettes dans nos roues à rails-circulaires, comme on le verra dans le septième des ouvrages annoncés par ce Programme, où seront produits les trois Mémoires présentés au Conseil général des Ponts et Chaussées de France.

soumis au Conseil général des Ponts et Chaussées de France. — Or, cette grande et difficile solution des équations transcendantes (74) d'ordre supérieur, solution si décisive pour notre réforme de la locomotion, où elle constitue la loi statique générale du mouvement spontané, servant de complément à la solution loi dynamique générale (14) de ce mouvement spécial, la voici . . .

(75)

$$\begin{aligned} \sin \xi = & \frac{rv. [\mu]}{6r} \cdot \frac{\varphi + \tan \alpha}{gH + v. [\mu] \cdot X} \\ & - v. [\mu] \cdot \frac{6r}{r} \cdot \tan \alpha \cdot \frac{\Omega \cdot \left\{ X \cdot \sin \phi \right\}^2}{gH + v. [\mu] \cdot \frac{\tan \phi}{\phi} \cdot (1 - X)} \\ & + v. [\mu] \cdot \left(\frac{6r}{r} \right)^2 \cdot \frac{\Omega \cdot \left\{ X \cdot \sin \phi \right\}^3}{gH + v. [\mu] \cdot \frac{\tan \phi}{\phi} \cdot (1 - X)} \\ & - \text{etc., etc.;} \end{aligned}$$

en désignant par ϕ la première détermination de l'arc ξ en question, telle qu'elle est donnée par le premier terme de cette expression générale (75), c'est-à-dire, par l'expression initiale . . . (76)

$$\sin \phi = \frac{rv. [\mu]}{6r} \cdot \frac{\varphi + \tan \alpha}{gH + v. [\mu] \cdot X};$$

et en dénotant par X la quantité auxiliaire . . . (77)

$$X = \frac{\tan \frac{1}{2} \phi}{\phi},$$

dont la valeur moyenne et suffisante est . . . (78)

$$X = 0,568310, \quad \text{ou à peu près} \quad X = \frac{4}{7}.$$

Quant à la quantité Ω , qui entre encore dans la présente solution générale (75), elle est sensiblement égale à $\frac{\pi}{2}$; mais, sa détermination rigoureuse est . . . (79)

$$\Omega = \frac{\pi}{2} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \tan^2 \alpha + \frac{1^{11}}{2^{11}} \cdot \tan^4 \alpha - \text{etc.};$$

en faisant . . . (80)

$$\tan \alpha = \frac{6r \cdot (1 - \cos \phi)}{\phi \cdot r}.$$

Telle (75) est donc cette décisive détermination de l'arc générateur ξ , qui constitue l'élément principal dans les équations statiques (74) du mouvement (41).

spontané, opéré par la simple pression de la masse du char, dans nos roues excentriques à rails-circulaires. — Nous disons que cette détermination de l'arc ξ est décisive, parce que, comme nous allons le voir, elle va nous faire connaître immédiatement le tirage de ces roues à rails-circulaires, et par conséquent la réduction du tirage que ces roues excentriques opéreront généralement dans toute la locomotion inerte.

Avant tout, pour bien fixer la signification de ces résultats, nous devons prévenir que le tirage φ qui entre dans les dernières expressions, est proprement le tirage des chars avec les roues à rails-circulaires, tel qu'il a lieu sur les différentes routes, et tel que nous allons le déterminer. En attendant, il faut prendre, pour la première détermination de cette quantité φ , l'actuel tirage qui a lieu, avec les roues ordinaires, sur les différentes routes. Ainsi, sur les chemins de fer, ce tirage général φ représentera provisoirement le susdit tirage spécial ρ qui s'exerce sur ces voies métalliques, et dont la valeur moyenne, d'après notre registre (1), est à peu près $\rho = \frac{1}{200}$; et sur les routes ordinaires, ce tirage général φ représentera provisoirement le tirage spécial qui s'exerce sur chacune de ces routes, et dont la valeur moyenne, d'après le même registre (1), est à peu près $\varphi = \frac{1}{40}$. — Procédons maintenant, avec cette décisive détermination (75) de l'arc générateur ξ , qui, par les expressions (61), fixe l'arc vecteur α , à la détermination finale du tirage de ces roues excentriques à rails-circulaires.

Or, en désignant également par $n\Delta$ la force motrice de ces roues excentriques, force qui, à l'instar des forces motrices ordinaires dans la locomotion inerte des chars, imprime à l'essieu des roues une impulsion dans la direction α de la voie, on aura, en vertu de l'expression (56) de notre troisième Mémoire, entre les éléments qui concourent au mouvement des roues à rails-circulaires dont il est question, le théorème fondamental . . . (81)

$$(M - N) \cdot \left\{ \lambda \rho \cdot \cos(\alpha + \xi) + \sin(\alpha + \xi) \right\} \cdot v = \\ = \left\{ \frac{8g \cdot \cos(\alpha + \xi) \cdot \cos \xi \cdot Z}{r \cdot \cos \alpha \cdot (\varphi + \tan \alpha) \cdot [\rho]} - \lambda \rho \cdot \sin \xi \right\} \cdot n\Delta;$$

en formant la quantité auxiliaire . . . (82)

$$Z = (1 + \beta) - \zeta \cdot (1 - \varphi) \cdot \left\{ (1 + \beta) - \frac{K}{1 - f} \right\},$$

dont les éléments β et K sont . . . (83)

$$\beta = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \xi}{\cos(\alpha + \xi)}, \quad \text{et} \quad K = \cos^2 \alpha \cdot \left\{ 1 + \cos \alpha - 2 \cdot \cos^2 \alpha \right\}.$$

Et de ce théorème général (81), qui forme en quelque sorte la loi stéadime

de notre présente réforme de la LOCOMOTION INERTE, on pourra manifestement déduire toutes les circonstances de cette réforme. — Ainsi, on pourra en déduire immédiatement la force motrice $\pi\Delta$, savoir . . . (84)

$$\pi\Delta = \frac{r \cdot \cos \alpha \cdot (M - N) \cdot \left\{ \lambda p \cdot \cos(\alpha + \xi) + \sin(\alpha + \xi) \right\} \cdot (\varphi + \tan \alpha) \cdot v}{\theta g \cdot \cos \xi \cdot \cos(\alpha + \xi) \cdot Z - \lambda p \cdot r \cdot \sin \xi \cdot \cos \alpha \cdot (\varphi + \tan \alpha) \cdot [\mu]}$$

Et puisque, en désignant par Φ le tirage de ces roues excentriques à rails-circulaires, on a . . . (85)

$$\pi\Delta = \Phi M \cdot v,$$

l'expression générale (84) de cette force motrice $\pi\Delta$ donnera, à son tour, pour ce tirage Φ de nos roues excentriques, la détermination . . . (86)

$$\Phi = \frac{\theta r \cdot \cos \alpha \cdot \left\{ \lambda p \cdot \cos(\alpha + \xi) + \sin(\alpha + \xi) \right\} \cdot (\varphi + \tan \alpha)}{\theta g \cdot \cos \xi \cdot \cos(\alpha + \xi) \cdot Z - \lambda p \cdot r \cdot \sin \xi \cdot \cos \alpha \cdot (\varphi + \tan \alpha) \cdot [\mu]}$$

Et dans cette détermination, d'après l'observation que nous avons faite plus haut, à la suite de l'expression générale (75), la quantité φ doit être proprement le tirage même Φ que donne la présente détermination. Mais, pour nous en tenir à une limite certaine, nous considérerons ici cette quantité φ comme étant, sur les différentes routes, le susdit tirage qui y a lieu avec les roues ordinaires, nommément dans le numérateur de la présente formule (86); car, par la même raison, nous considérerons cette quantité φ dans le terme négatif du dénominateur de cette formule (86), comme ayant, en dernière détermination, sa véritable valeur Φ , ce qui, au reste, changera très-peu la valeur de ce terme négatif.

Or, le tirage général des roues ordinaires, en le désignant par Γ , est notoirement . . . (87)

$$\Gamma = \varphi \cdot \cos \alpha + \sin \alpha;$$

donc, en divisant ces deux quantités (86) et (87) l'une par l'autre, on aura, pour la réduction du tirage, opérée par nos roues excentriques à rails-circulaires, l'expression générale . . . (88)

$$\frac{\Phi}{\Gamma} = \frac{\theta r \cdot \cos \alpha \cdot \left\{ \lambda p \cdot \cos(\alpha + \xi) + \sin(\alpha + \xi) \right\} \cdot \sec \alpha}{\theta g \cdot \cos \xi \cdot \cos(\alpha + \xi) \cdot Z - \lambda p \cdot r \cdot \sin \xi \cdot \cos \alpha \cdot (\varphi + \tan \alpha) \cdot [\mu]}$$

C'est par cette formule que, dans le précédent Document sur la réforme de la locomotion, se trouvent calculées les réductions qui y forment la table provisoire N°. 1, en tenant compte, comme nous l'avons dit, de l'absence possible de toute perfection technique, dans la construction matérielle de nos roues excentriques à rails-circulaires. Et par conséquent, cette table provisoire N°. 1, concernant la locomotion inerte, se trouve ainsi démontrée à son tour, tout comme l'ont été plus haut les deux tables provisoires N°. 2 et 3, qui,

concernant la locomotion spontanée, ont été produites également dans le même Document. En effet, comme on vient de le voir, ces trois tables provisoires, N^{os} 1, 2 et 3, qui ont pour objet la transition actuelle de la fausse locomotion, pratiquée encore par routine sur les chemins de fer, à la vraie locomotion, indiquée enfin par la science, sont déduites respectivement des présentes lois élémentaires (36), (38), (51), (53) et (88), de ces lois irréfragables qui toutes sont démontrées rigoureusement dans les trois Mémoires présentés au Conseil général des Ponts et Chaussées de France.

Nous donnons donc ici, comme nous l'avons promis à la fin du précédent Complément de la Réforme des Mathématiques, les lois principales de notre présente réforme de la locomotion terrestre, du moins pour ce qui concerne la partie élémentaire de cette réforme, c'est-à-dire, ses deux éléments primordiaux, géométrique et mécanique, ou proprement statique et dynamique. — Quant à la partie systématique de cette réforme de la locomotion terrestre, qui concerne la combinaison finale de ces éléments, toutes ses lois se trouvent également produites et démontrées rigoureusement dans les trois Mémoires qui sont sous les yeux du Conseil éclairé que nous venons de nommer.

Nous produirons, dans le septième de nos ouvrages ultérieurs, où seront publiés ces trois Mémoires, les lois systématiques en question, qui constituent l'accomplissement final de la présente réforme de la locomotion, et qui ont servi pour calculer nos trois tables normales, celles que, par anticipation, nous avons données dans le susdit Document, afin de faire connaître immédiatement les grands et définitifs résultats de cette réforme. — D'ailleurs, nous devons nous abstenir de produire ici ces lois systématiques, parce que, dans ce moment, où la barbarie et la routine de la locomotion actuelle sur les chemins de fer, sont considérées comme des preuves échantées de la haute civilisation présente de l'humanité, on ne saurait encore concevoir ces résultats définitifs de notre réforme (*); et il serait non-seulement inutile, mais peut-

(*) Toutefois, pour ne faire auc idée de la cause, en apparence si mystérieuse, de ces résultats prétendument inconcevables, il suffit de distinguer, dans l'action de la gravitation des corps, ses deux modes bien connus, savoir, le mode *dynamique*, où la gravitation agit par la chute des corps, et le mode *statique*, où elle agit par la pression des corps. — Or, le premier de ces deux modes, est le seul dont on ait fait usage, jusqu'à ce jour, pour produire le mouvement d'autres corps, en se servant ainsi de la gravitation, dans la chute des corps, comme d'un *agent mécanique*. Et le second de ces deux modes, celui où la gravitation agit dans la pression des corps, n'a pas encore été utilisé ainsi, comme *agent mécanique*, pour la production du mouvement dans les corps. Et cependant, cette action statique de la gravitation, qui s'exerce par la pression, est notoirement équivalente, dans chaque instant du temps, à son action dynamique, à celle qui s'exerce par la chute des corps. Il importerait donc constamment, pour le progrès de la Mécanique, d'utiliser cette immense force de pression, répandue avec profusion sur notre globe, et d'en faire ainsi un *nouvel agent mécanique*, propre à la production du mouvement dans les corps. — Eh bien, c'est ce *nouvel agent mécanique* qui, comme on vient de le voir, est la cause toute occulte des résultats prétendument inconcevables de notre réforme de la locomotion.

être peu digne de la science de produire aujourd'hui les lois finales qui régissent ces grands résultats. Déjà même les résultats élémentaires de cette réforme de la locomotion, qui, dans le susdit Document, sont fixés par les trois tables provisoires, et qui forment l'obligation légale et peut-être morale de la Commission et du Conseil général des Ponts et Chaussées de France, ne peuvent-ils être réalisés aujourd'hui, malgré les preuves mathématiques rigoureuses qui les rendent incontestables, et malgré les périlleuses crises financières qui accompagnent la barbare industrie actuelle des chemins de fer. Et, ce qu'il faut surtout remarquer, c'est que, comme on vient de le voir, ces preuves mathématiques, qui, pour être comprises, n'exigent que des connaissances scientifiques ordinaires, sont tellement simples que, sans aucune exagération, nous pouvons, encore une fois, déclarer ici, de la manière la plus formelle, qu'il faut absolument faire valoir l'un ou l'autre, ou une PROFONDE IGNORANCE OU UNE PROFONDE IMMORALITÉ, pour continuer, par les faux procédés de routine, l'actuelle exploitation ruineuse, et surtout l'actuelle construction barbare des chemins de fer.

FIN DES PRINCIPES

DE LA RÉFORME DES MATHÉMATIQUES (*).

(*) *Post-Scriptum.* — Nous disons : *Fin des principes* de cette Réforme, parce que la réforme elle-même ne sera terminée que par la production des ouvrages qui sont annoncés dans le Programme scientifique qui est à la tête de l'ouvrage présent. Toutefois, ces principes sont tellement accomplis déjà que, lors même qu'il ne serait plus en notre pouvoir de produire ces ouvrages ultérieurs, les géomètres pourront, avec le temps, probablement après quelques siècles, en suivant les principes que nous venons de leur dévoiler, achever cette grande réforme de leur science. — Deux questions seulement paraissent indispensables pour l'accomplissement absolu des principes présents : ce sont, d'abord, pour les mathématiques pures, la *Résolution générale des Equations algébriques de tous les degrés*, et ensuite, pour les mathématiques appliquées, la *Théorie générale et rigoureuse des Marées*, servant à compléter la présente Réforme de la Théorie mathématique de la Terre. — En conséquence, nous nous sommes proposés de donner encore immédiatement ce dernier accomplissement de nos principes, en le produisant à la suite de la seconde division de la présente Réforme du Savoir hu-

main, c'est-à-dire, à la suite de la *Réforme de la Philosophie*, qui doit faire l'objet du second tome de cette Réforme générale. Bien plus, de crainte que nous ne soyons de nouveau empêché de produire cette deuxième et décisive division de la présente Réforme du Savoir humain, nous nous déterminons maintenant à produire sur-le-champ, en même temps que la présente Réforme des Mathématiques, au moins la première des deux grandes questions complémentaires que nous venons de signaler, savoir, la *Résolution générale des Equations*. Nous produisons ainsi cette Résolution par anticipation sur notre *Manifeste historique* qui, ayant pour objet la *Transition de la Réforme des Mathématiques à la Réforme de la Philosophie*, devait paraître à la fin de cette Réforme de la Philosophie, pour signaler la connexion de cette double réforme, des sciences et de la philosophie, et pour établir, à l'avenir, dans cette réforme des mathématiques et par conséquent des sciences, ce donnant la solution de tous leurs grands problèmes, un critérium infaillible pour juger, par cette puissance scientifique, la vérité de toute production qui désormais se présenterait encore sous le nom de philosophie. Et pour produire ainsi immédiatement la Résolution des Equations, qui fait partie de notre *Manifeste historique*, nous sommes forcés de produire au moins la première partie de ce Manifeste, dans laquelle il est question de cette Résolution des Equations. En conséquence, l'ouvrage que nous publions en même temps que l'ouvrage présent, et qu'il faut alors considérer comme une suite de la présente *Réforme des Mathématiques*, contiendra, en outre de la Résolution générale des Equations, la première partie de notre *Manifeste historique*, et il portera ainsi le titre : *Résolution générale des Equations algébriques de tous les degrés, précédée du Manifeste historique concernant l'actuelle Réforme du Savoir humain, et offrant, pour cette Réforme générale et absolue, tout à la fois, sa couronne et sa garantie, par la solution philosophique du plus grand problème des sciences, de ce problème mystérieux des Equations, que les efforts de tous les savants n'ont pu, jusqu'à ce jour, ni résoudre, ni même comprendre.*

FIN.

A91
1134985





